происходит независимо от движения центра масс. Угловое положение мобильной мехатронной системы относительно ее центра инерции по трем осям задается углами крена, тангажа и рыскания, определяющими вращение мультикоптера вокруг осей $Ox_2y_2z_2$ ($O_1x_1y_1z_1$) соответственно. Связь между динамическими и кинематическими параметрами в инерциальной и подвижной системе координат будем задавать через матрицу поворота от подвижной к инерционной системе.

УДК 621.865:004.896

РАЗРАБОТКА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ МУЛЬТИКОПТЕРА

Чигарев А.В., Ширвель П.И., Конон И.И.
Белорусский национальный технический университет,
Минск, Республика Беларусь

Настоящий проект подводит некоторый итог научных исследований коллектива авторов. Эти исследования были вызваны задачами определения в реальном режиме времени ориентации мобильных мехатронных систем типа «мультикоптер» с целью обеспечения дальнейших натурных и численных экспериментов в реальном воздушном и виртуальном 3D пространстве. Разработанные математические зависимости позволяют определить ориентацию гексакоптера, когда известны значения опорных физических параметров в данной точке пространства. Также в работе представлен последовательный вывод соотношений для механико-математической модели многофункционального мультикоптера с N двигателями, имеющим в общем случае только одну плоскость симметрии. Конкретнее, рассматривается гексакоптер с известными техническими и физическими параметрами, движением которого можно управлять, изменяя силу тяги роторов двигателей в зависимости от скорости вращения пропеллеров.

Считая мультикоптер твердым телом, рассмотрим движение свободного твердого тела, представленного на схемах выше. Примем, что m – масса аппарата, $\bar{\vartheta}$ – скорость центра масс, $\bar{L}$ – кинетический момент аппарата в его движении относительно центра масс, $\bar{F}$ и $\bar{M}$ – главный вектор и главный момент внешних сил относительно точки O. Из основных теорем динамики твердого тела следует, два векторных дифференциальных уравнения: $\frac{d\left(\bar{K}_0\right)}{dt}=\sum_k \bar{F}_k$ и $\frac{d\bar{L}_0}{dt}=\sum_i \bar{M}_i$. Здесь $\bar{K}_0 = m\bar{\vartheta}$ – вектор количества движения мобильной мехатронной системы, $\bar{F}_k$ – действующие внешние силы; $\bar{L}_0 = J\cdot\bar{\omega}$ – вектор кинетического момента относительно центра масс, J – тензор инерции, $\bar{\omega}$ – вектор угловой скорости мультикоптера относительно точки O; $\bar{M}_i$ – внешние моменты, действующие на мобильную мехатронную систему.

Так как управляющая сила (тяга движителей) прикладывается в подвижной системе координат, жестко фиксированной с телом, запишем уравнения движения в связной системе $Oxyz$ с учетом возможного вращательного движения аппарата (и одновременно с ним связанной системы координат с угловой скоростью $\bar{\omega}$):

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} vr - wq \\ wp - ur \\ uq - vp \end{bmatrix} + \frac{1}{m}\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} vr - wq \\ wp - ur \\ uq - vp \end{bmatrix} + \frac{C_n^b}{m}\begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{z_1} \end{bmatrix}$$

Здесь $\overline{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k}$; $\overline{\vartheta} = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k}$; $\overline{\omega} = p\bar{i} + q\bar{j} + r\bar{k}$; где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные орты в связанной с телом системе отсчета *Oxyz*, $O_1x_1y_1z_1$ – инерционная система отсчета.

Далее определим координаты сил в проекциях на оси *Oxyz*: сил тяги пропеллеров (задаются в базисе связанной с аппаратом системы); силы тяжести (направлена по местной вертикали в $O_1x_1y_1z_1$, ее далее конвертируем в *Oxyz* с помощью матрицы поворота C_n^b; сил, вызывающих дисбаланс во время движения; силы сопротивления окружающей среды. Отметим, что в справочных таблицах значения ускорения свободного падения уже обычно приводятся с учетом переносной силы инерции в зависимости от высоты, поэтому переносная сила фактически уже учтена при задании силы тяжести, входящей в состав внешних сил. В задачах динамики полета показано, что для скоростей, меньших 1 км/с, влиянием Кориолисовой силой инерции и ее моментом можно пренебречь.

Предполагая, в общем случае, что рассматриваемая мобильная мехатронная система типа мультикоптер, с учетом реализации требуемого функционала, может представлять собой аппарат, симметричный относительно вертикальной плоскости, например, *x-z* (имеет только одну плоскость симметрии), $J_{xy} = J_{yx} = J_{yz} = J_{zy} = 0$ (*Oy* – центральная ось, *O* – центр масс), используя динамическое уравнение Эйлера перейдем в систему отсчета, жестко связанную с мультикоптером. В системе *Oxyz* тензор момента инерции будет постоянен и его можно вынести за производную. Таким образом, разделим изменение кинетического момента на компонент, который описывает изменение величины *L* и компонент, который компенсирует это изменение в направлении *L*: $\frac{d\overline{L}}{dt} = \frac{\tilde{d}\overline{L}}{dt} + (\overline{\omega} \times \overline{L})$. Здесь *L* – изменение углового момента мультикоптера по отношению к его фиксированным осям; $\frac{\tilde{d}\overline{L}}{dt}$ – локальная производная, вычисляемая в подвижной системе координат *Oxyz*; ω – скорость изменения осей, связанных с аппаратом, по отношению к пространственным осям.

Выражая угловые ускорения и скорости поворота, проведя упрощения и преобразования, получим следующую систему дифференциальных уравнений вращения мультикоптера:

$$\dot{\omega}_x = \frac{I_z M_x}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \frac{I_{xz} M_y}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \frac{(I_x - I_y + I_z) I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2}\omega_x\omega_y + \frac{(I_y - I_z) I_z - I_{xz}^2}{I_x I_z - I_{xz}^2}\omega_y\omega_z;$$

$$\dot{\omega}_y = \frac{M_y}{J_y} - \frac{(J_x - J_z)\omega_x\omega_z}{J_y} - \frac{J_{xz}(\omega^2{}_x - \omega^2{}_z)}{J_y};$$

$$\dot{\omega}_z = \frac{I_{xz} M_x}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \frac{I_x M_y}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \frac{(I_x^2 - I_y I_x + I_{xz}^2)}{I_x I_z - I_{xz}^2}\omega_x\omega_y + \frac{(I_x - I_x - I_z) I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2}\omega_y\omega_z.$$

Здесь M_x, M_y, M_z – проекции суммарного момента сил на связные оси (момент крена, тангажа и рыскания); $\omega_x, \omega_y \omega_z$ – проекции вектора угловой скорости мультикоптера на оси связной системы координат; J_x, J_y, J_z, J_{xz} – осевые и центробежный моменты инерции мультикоптера.

Заметим, что в уравнениях выше проекции результирующих моментов на связные оси определены в соответствии с принятым на схеме направлением вращения винтов и для выбранного расположения начала системы координат.

$$M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} M_x^{тяги} + M_x^{инерц\_двигат} \\ M_y^{тяги} + M_y^{инерц\_двигат} \\ M_z^{тяги} + M_z^{инерц\_двигат} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l/2\left(2F_2 - 2F_5 + F_1 - F_6 + F_3 - F_4\right) \\ \sqrt{3}l/2\left(F_6 - F_4 + F_1 - F_3\right) \\ k\left(F_5 - F_6 + F_1 - F_2 + F_3 - F_4\right) \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} \omega_y\left(\omega_2 - \omega_1 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6\right) \\ \omega_x\left(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 + \omega_5 - \omega_6\right) \\ 0 \end{bmatrix}\left(J_{rotor} + J_{propeller}\right),$$

где $M_{тяги}$ – та часть внешнего момента, действующего на мехатронную систему, вызываемая силой тяги пропеллеров двигателей $\overline{F}_{тяги}$, приложенной на расстоянии l от центра тяжести до оси пропеллеров, т.е. моменты, создаваемые винтами; $\overline{M}_{инерц\_двигат}$ – гироскопические моменты двигателей и винтов; k – коэффициент перевода силы тяги во вращательный момент; $J_{rotor}, J_{propeller}$ –моменты инерции роторов и винтов.

Таким образом, общая система дифференциальных уравнений движения мобильной мехатронной системы примет вид:

$$
\begin{cases}
\dot{u} = vr - wq + F_x / m; \\
\dot{v} = wp - ur + F_y / m; \\
\dot{w} = uq - vp + F_z / m; \\
\dot{p} = \dfrac{I_z M_x}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \dfrac{I_{xz} M_y}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \dfrac{(I_x - I_y + I_z) I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} pq + \dfrac{(I_y - I_z) I_z - I_{xz}^2}{I_x I_z - I_{xz}^2} qr; \\
\dot{q} = \dfrac{M_y}{J_y} - \dfrac{(J_x - J_z) pr}{J_y} - \dfrac{J_{xz}(p^2 - r^2)}{J_y}; \\
\dot{r} = \dfrac{I_{xz} M_x}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \dfrac{I_x M_y}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \dfrac{(I_x^2 - I_y I_x + I_{xz}^2)}{I_x I_z - I_{xz}^2} pq + \dfrac{(I_y - I_x - I_z) I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} qr.
\end{cases}
$$

Представленные уравнения описывают динамику несимметричного мультикоптера с учетом принятых допущений. Из системы уравнений движения аппарата следует частный случай – динамически симметричного мультикоптера (*Oz* – центральная ось динамической симметрии тела). Как видно, уравнения являются нелинейными и их точное решение с помощью аналитических методов и стандартных средств в общем случае невозможно.

Для численной оценки движения мультикоптера (гексакоптера), будет рассмотрена базовая модель, которая состоит из крестообразной несущей конструкции с шестью винтами, установленными на ее концах. Нечетные винты (роторы 1,3,5) вращаются против часовой стрелки, в то время как четные (роторы 2,4,6) вращаются по часовой стрелке. При проведении практических расчетов будем считать инерцию двигателей летательного аппарата малой, считая, что гироскопические силы роторов и винтов незначительные.

Заметим, что уравнения, описывающие движение мобильной мехатронной системы значительно упрощаются, если расположить систему координат *Oxyz* (строительные оси аппарата) по его главным осям инерции (при условии, что мы заранее вычислили направление главных осей инерции летательного аппарата).

Отметим, что расчеты показывают, что принятая вертикальная симметрия мультикоптера, при условии постоянства массы, дает численные значения I_{xz} значительно меньшие, чем I_x, I_y и I_z (т.е. I_{xz} при проведении оценочных расчетов в дальнейшем можно будет в определенной степени пренебречь). Дальнейшее исследование уравнений движения мультикоптера, а также их решение осуществляется с использованием методов компьютерного моделирования (численное решение).

УДК 681.5

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ МОБИЛЬНЫХ РОБОТОВ ПРИ АВТОМАТИЗАЦИИ СКЛАДОВ

Прокопеня О.Н., Никонов М.Н.