УДК 551.492
Волчек А.А., Махнист Л.П., Рубанов В.С.

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ МАЛОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МНОГОЛЕТНИХ КОЛЕБАНИЙ РЕЧНОГО СТОКА

Введение. Рассмотрим марковский процесс для описания колебаний речного стока, используемый в стохастической гидрологии.

Пусть $\overline{V}$ – среднегодовой расход воды, а V_t – расход воды в момент времени t. Тогда, полагая $X_t = \left(V_t - \overline{V}\right)/\overline{V}$, процесс многолетних колебаний стока можно описать с помощью стационарного решения стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Орнштейна-Уленбека с непрерывным временем [1]:

$$dX_t = -kX_t dt + \sigma dW_t\,, \qquad (1)$$

где $X_t = (V_t - \overline{V})/\overline{V}$, $\sigma = C_V\sqrt{2k}$, σ – интенсивность «белого шума», C_V – коэффициент изменчивости речного стока, W_t – стандартный винеровский процесс, k^{-1} – время релаксации речного стока.

Заметим, что уравнению (1) соответствует уравнение Фоккера-Планка, т.е. прямого уравнения Колмогорова

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial x}(x\,p) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < \infty,$$

где коэффициент k определяется по формуле $k = -\ln r$, так как автокорреляционная функция колебаний стока имеет вид e^{-kt}, а r – коэффициент автокорреляции годового стока.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ сток равен y, а x_* – некоторое фиксированное значение стока. Выясним, за какой промежуток времени значение V будет находиться в полуинтервале $\left[x_*, \infty\right)$ при условии, что $y \in \left[x_*, \infty\right)$. Решить эту задачу можно с помощью обратного уравнения Колмогорова. Так как случайные колебания стока, описываемые СДУ (1), однородны по времени, то для двумерной плотности вероятности справедливо соотношение

$$p(x, t/y, 0) = p(x, 0/y, t).$$

Обратное уравнение Колмогорова для процесса (1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x, t/y, 0) = -ky\frac{\partial}{\partial y}p(x, t/y, 0) + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 p(x, t/y, 0)}{\partial y^2}. \qquad (2)$$

Пусть T – момент времени, в который значение V покинет промежуток $\left[x_*, \infty\right)$. Тогда

$$prob(T \ge t) = G(y,t),\; G(y,t) = \int_{x_*}^{\infty} p(x, t/y, 0)dx.$$

Интегрируя (2) по x на интервале от x_* до ∞, получаем

$$\frac{\partial G(y,t)}{\partial t} = -k\,y\frac{\partial G(y,t)}{\partial y} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 G(y,t)}{\partial y^2}.$$

Учитывая условия отражения на бесконечности и поглощения в точке $y = x_*$, получим следующие краевые условия:

$$G(y,t)\big|_{y=x_*} = 0, \qquad \left.\frac{\partial G(y,t)}{\partial y}\right|_{y=\infty} = 0.$$

Так как функция $1 - G(y,t)$ является распределением случайной величины T, то среднее время достижения границы x_* и его дисперсия определяются соотношениями

$$T_1 = -\int_0^{\infty} t\,\frac{\partial G(y,t)}{\partial t}dt = \int_0^{\infty} G(y,t)\,dt,$$

$$T_2 = -\int_0^{\infty} t^2\,\frac{\partial G(y,t)}{\partial t}dt = 2\int_0^{\infty} tG(y,t)\,dt.$$

Интегрируя (2) по t на интервале от 0 до ∞ и, учитывая, что

$$\int_0^{\infty}\frac{\partial G}{\partial t}dt = G(x,0) = -1,$$

получаем следующие уравнения для T_1 и T_2:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\frac{d^2T_1}{\partial y^2} - k\,y\frac{dT_1}{\partial y} = -1, \text{ при } \frac{dT_1}{\partial y}(\infty) = 0,$$

$$T_1(y)\big|_{y=x_*} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2\frac{d^2T_2}{\partial y^2} - k\,y\frac{dT_2}{\partial y} = -T_1, \text{ при } \frac{dT_2}{\partial y}(\infty) = 0,$$

$$T_2(y)\big|_{y=x_*} = 0.$$

Введя безразмерные величины

$$kT_1 = \theta_1,\; k^2T_2 = \theta_2,$$

$$y\sqrt{\frac{2k}{\sigma^2}} = \frac{y}{C_V} = \xi,\; x_*\sqrt{\frac{2k}{\sigma^2}} = \frac{x_*}{C_V} = \xi_*,$$

приходим к системе

$$\begin{gathered}\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi\frac{d\theta_1}{d\xi} = -1,\; \frac{d\theta_1}{d\xi}(\infty) = 0,\quad \theta_1(\xi)\big|_{\xi=\xi_*} = 0,\\ \frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} - \xi\frac{d\theta_2}{d\xi} = -\theta_2,\; \frac{d\theta_2}{d\xi}(\infty) = 0,\quad \theta_2(\xi)\big|_{\xi=\xi_*} = 0.\end{gathered} \qquad (3)$$

Система (3), приведенная в [1], при решении различных прикладных задач, например в [2], интегрировалась численными методами.

Волчек Александр Александрович, *д.г.н., профессор, декан факультета водоснабжения и гидромелиорации Брестского государственного технического университета.*
Махнист Леонид Петрович, *к.т.н., доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Рубанов Владимир Степанович, *к.ф.-м.н., доцент, проректор по научной работе Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Методика решения уравнений модели. Найдем точное решение первого уравнения системы (3), предлагаемое в [3].

Введем обозначение $\dfrac{d\theta_1}{d\xi} = f(\xi)$. Тогда, учитывая, что $\dfrac{d^2\theta_1}{d\xi^2} = \dfrac{df}{d\xi}$, приходим к линейному дифференциальному уравнению первого порядка $\dfrac{df}{d\xi} - \xi f = -1$, с начальным условием $f(\xi)\big|_{\xi=\infty} = 0$.

Решение последнего уравнения будем отыскивать в виде $f(\xi) = u(\xi)v(\xi)$. Тогда, учитывая, что $f'(\xi) = u'(\xi)v(\xi) + u(\xi)v'(\xi)$, получим уравнение $u'v + uv' - \xi uv = -1$ или $u'v + u(v' - \xi v) = -1$ (*).

Найдем одно из ненулевых решений уравнения $v' - \xi v = 0$. Разделяя переменные в уравнении $\dfrac{dv}{d\xi} = \xi v$, решением которого, очевидно, является $v = 0$, получим $\dfrac{dv}{v} = \xi d\xi$. Интегрируя последнее уравнение, имеем $\displaystyle\int \frac{dv}{v} = \int \xi d\xi + C_2$. Откуда $ln|v| = \dfrac{\xi^2}{2} + ln C_1$ или $v = \pm C_1 e^{\frac{\xi^2}{2}}$. Следовательно, $v = Ce^{\frac{\xi^2}{2}}$ – общее решение дифференциального уравнения $v' - \xi v = 0$.

Выберем одно из ненулевых решений этого уравнения, например, $v = e^{\frac{\xi^2}{2}}$, при $C = 1$. Подставляя его в уравнение (*), имеем $u'e^{\frac{\xi^2}{2}} = -1$ или $u' = -e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Откуда $u = -\displaystyle\int e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi + C$.

Следовательно,

$$f(\xi) = u(\xi)v(\xi) = (C - \int e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi)e^{\frac{\xi^2}{2}}$$ – общее решение дифференциального уравнения $\dfrac{df}{d\xi} - \xi f = -1$.

Заметим, что $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$. Тогда учитывая начальное условие $f(\xi)\big|_{\xi=\infty} = 0$, имеем $f(\xi) = \left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) e^{\frac{\xi^2}{2}}$.

Действительно,

$$f(\xi)\big|_{\xi=\infty} = \lim_{\xi\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) e^{\frac{\xi^2}{2}} = \lim_{\xi\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}{e^{-\frac{\xi^2}{2}}}$$

и, учитывая $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, получаем, что последний предел имеет неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Тогда, используя правило Лопиталя, имеем

$$f(\xi)\big|_{\xi=\infty} = \lim_{\xi\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right)'}{(e^{-\frac{\xi^2}{2}})'} =$$

$$= \lim_{\xi\to+\infty} \frac{0 - e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{e^{-\frac{\xi^2}{2}} \cdot (-\xi)} = \lim_{\xi\to+\infty} \frac{1}{\xi} = 0.$$

Таким образом, $f(\xi) = \left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) e^{\frac{\xi^2}{2}}$ – решение дифференциального уравнения $\dfrac{df}{d\xi} - \xi f = -1$, удовлетворяющее начальному условию $f(\xi)\big|_{\xi=\infty} = 0$.

Используя разложение функции e^z в ряд Маклорена, имеем

$$e^{\frac{\xi^2}{2}} = 1 + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^4}{2^2 2!} + \frac{\xi^6}{2^3 3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!}$$ и

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2^2 2!} - \frac{t^6}{2^3 3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!}.$$

Тогда

$$\int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_0^{\xi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!}\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}\Bigg|_0^{\xi} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \xi^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}.$$

Следовательно, решение $f(\xi) = \left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) e^{\frac{\xi^2}{2}}$ можно представить в виде

$$f(\xi) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \xi^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!}\right)$$ или

$$f(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \xi^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!}\right).$$

Тогда, используя правило Коши умножения рядов, получим

$$f(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k k!(2k+1)2^{n-k}(n-k)!}\right) \xi^{2n+1} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)(n-k)!}\right) \frac{\xi^{2n+1}}{2^n} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}\right) \frac{\xi^{2n+1}}{2^n n!}.$$

Докажем следующее утверждение.

Утверждение. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

Доказательство. Используя бином Ньютона, $(1-x^2)^n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{2k}$ и интегрируя, имеем

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{2k} dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k x^{2k+1}}{2k+1}\bigg|_0^1 = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}.$$

Заметим, что с другой стороны

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m(1-x^2)^n dx = \int_0^1 \frac{(1-x^2)^n}{m+1} dx^{m+1} =$$

$$= \frac{x^{m+1}(1-x^2)^n}{m+1}\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} d(1-x^2)^n =$$

$$= 2n\int_0^1 \frac{x^{m+2}}{m+1}(1-x^2)^{n-1}dx = \frac{2n}{m+1}I_{m+2,n-1}.$$

Тогда $I_{m,n} = \dfrac{(2n)!!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(m+2k-1)} I_{m+2n,0}$ и

$$I_{0,n} = \frac{(2n)!!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)} I_{2n,0} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_{2n,0}.$$

Учитывая, что $I_{2n,0} = \int\limits_0^1 x^{2n}dx = \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\bigg|_0^1 = \dfrac{1}{2n+1}$,

имеем $I_{0,n} = \dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n,0} = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ и

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1} = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = I_{0,n} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Заметим также, что значения $I_{m,n}$ связаны с бета-функцией $B(p,q) = \int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ соотношением:

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m(1-x^2)^n dx = \begin{vmatrix} x^2 = t, x = \sqrt{t} \\ 2xdx = dt \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^n dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2}, n+1\right).$$

Тогда, используя свойства бета-функции $B(p,q)$ и гамма-функции $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ – интегралов Эйлера первого и второго рода, получим

$$I_{0,n} = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2}, n+1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}+n+1\right)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)n!}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\prod\limits_{j=1}^{n+1}\left(\frac{1}{2}+n+1-j\right)} =$$

$$= \frac{2^n n!}{2^{n+1}\prod\limits_{j=1}^{i+n+1}\left(\frac{1}{2}+n+1-j\right)} =$$

$$= \frac{(2n)!!}{\prod\limits_{j=1}^{n+1}(1+2n+2-2j)} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Следовательно, $f(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!}$.

Так как $\dfrac{d\theta_1}{d\xi} = f(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!}$, то

$$\theta_1 = \int\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!}\right)d\xi =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)} + C$$

решение уравнения $\dfrac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi\dfrac{d\theta_1}{d\xi} = -1$.

Учитывая, начальное условие, $\theta_1(\xi)\big|_{\xi=\xi_*} = 0$, получаем, что

$$\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*), \tag{4}$$

где

$$S_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$$

или $S_1(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\dfrac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(k-1)!!k}$, а $\{t\}$ – дробная часть числа t.

Используя предлагаемую методику, можно найти решение второго уравнения системы (3).

О свойствах и сходимости решения дифференциального уравнения. Исследуем решение $\theta_1(\xi)$ на сходимость. Решение $\theta_1(\xi)$ запишем в виде

$$S_1(\xi) = A(\xi) - B(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} -$$

$$-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}.$$

Общие члены этих рядов $a_n = a_n(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\cdot\dfrac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$ и $b_n = b_n(\xi) = \dfrac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям $a_{n+1} = \dfrac{(2n+1)\xi^2}{(2n+2)(2n+3)}a_n$, $a_0 = \xi\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ и $b_{n+1} = \dfrac{(2n+2)\xi^2}{(2n+3)(2n+4)}b_n$, $b_0 = \dfrac{\xi^2}{2}$,

Эти рекуррентные соотношения целесообразно использовать для вычисления значений частичных сумм рядов $A(\xi)$, $B(\xi)$.

Отметим свойства рядов $A(\xi)$, $B(\xi)$:

1. $a_n > 0$, $b_n > 0$, для любого $\xi > 0$.
2. $A(-\xi) = -A(\xi)$, $B(-\xi) = B(\xi)$
3. $S_1(\xi) + S_1(-\xi) = -2B(\xi)$, $S_1(\xi) - S_1(-\xi) = 2A(\xi)$.

Исследуем на сходимость ряды $A(\xi)$, $B(\xi)$. Используя признак Д'Аламбера, имеем $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\xi^2(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)} < \frac{\xi^2}{2n+3} < q < 1$, если $n > \frac{\xi^2}{2q} - 1{,}5$ и $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(2n+2)\xi^2}{(2n+3)(2n+4)} < \frac{\xi^2}{2n+4} < q < 1$, если $n > \frac{\xi^2}{2q} - 2$.

Следовательно, начиная с некоторого номера, например, $n_0 = \left[\frac{\xi^2}{2q}\right]$, выполняются неравенства $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$, $\frac{b_{n+1}}{b_n} < q$. Тогда остатки рядов $A(\xi)$, $B(\xi)$, удовлетворяют неравенствам: $\left|\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\right| \le \frac{|a_n|}{1-q}$, $\sum_{k=n}^{+\infty} b_k \le \frac{b_n}{1-q}$ и сходятся со скоростью, не меньшей, чем скорость бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q.

Таким образом, значения рядов $A(\xi)$, $B(\xi)$, с заданной точностью $\varepsilon > 0$, можно получить, вычисляя n-ые частичные суммы этих рядов $\sum_{k=0}^{n-1} a_k$, $\sum_{k=0}^{n-1} b_k$, если выполняются неравенства:

$$|a_n| \le \varepsilon(1-q),\ b_n \le \varepsilon(1-q),\ \text{и}\ n \ge n_0 = \left[\frac{\xi^2}{2q}\right].$$

Так, например, для $q = 0{,}5$ неравенства принимают вид:

$$|a_n| \le \varepsilon,\ b_n \le \varepsilon,\ \text{и}\ n \ge n_0 = \left[\xi^2\right]. \qquad (5)$$

Таким образом, точность 2ε вычисления значений $S_1(\xi), S_1(\xi_*)$ обеспечивается вычислением n-ых частичных сумм рядов $\sum_{k=0}^{n-1} a_k(\xi)$, $\sum_{k=0}^{n-1} b_k(\xi)$ при выполнении условий (5), что гарантирует точность 4ε вычисления значения $\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*)$.

Учитывая следствие формулы Стирлинга: $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} < n! < n^n\sqrt{2\pi n}e^{-n+\frac{1}{12n}}$, имеем

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}(2n+1)!!(2n+2)}{|\xi|(2n)!!(2n+1)} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}(2n)!(2n+2)}{|\xi|2^{2n}(n!)^2} >$$

$$> \frac{\sqrt{\pi}}{|\xi|\sqrt{2}} \frac{(2n+2)(2n)^{2n}e^{-2n}2\sqrt{\pi n}}{2^{2n}n^{2n}2\pi n e^{-2n+\frac{1}{6n}}} =$$

$$= \frac{(n+1)\sqrt{2n}}{n e^{\frac{1}{6n}}|\xi|} > \frac{\sqrt{2n}}{e^{\frac{1}{6}}|\xi|} \ge 1,$$

если $n \ge \frac{\sqrt[3]{e}\xi^2}{2}$. Следовательно, для $n \ge n_0 = \left[\xi^2\right]$ выполняется неравенство $|a_n| \ge b_n$. Это неравенство позволяет упростить проверку условий (5) при вычислении ***n***-ых частичных сумм рядов $\sum_{k=0}^{n-1} a_k(\xi)$ и $\sum_{k=0}^{n-1} b_k(\xi)$.

Заметим также, что из приведенных выше рассуждений доказана сходимость на всей числовой прямой степенных рядов в решении (4).

Заключение. Рассмотрим пример, приведенный в [1]. Пусть среднегодовой сток Волги $\overline{V} = 239$ км³/год, среднеквадратичное отклонение равно 46 км³/год. Тогда $C_v = 0{,}19$. Если коэффициент корреляции r между смежными значениями стока равен 0,42, тогда $k = -\ln 0{,}42 \cong 0{,}9$ год$^{-1}$, $\sigma = 0{,}257$ год$^{-0.5}$, $\sigma^2 = 0{,}066$ год$^{-1}$. Предположим, что в начальный момент времени $V = 377$ км³/год. Через сколько лет сток достигнет 101 км³/год, т.е. уменьшится на шесть среднеквадратичных отклонений (276 км³/год)? В данном случае $\xi_* = -3$ (это отклонение от среднегодового значения стока, взятое в долях C_V), а времени перехода стока от одного состояния к другому соответствует $\xi = 3$.

Таблица 1. Решения уравнения системы (3)

ξ_*	ξ					
	-2	-1	0	1	2	3
-3	76,5	84,8	86,9	87,8	88,4	88,7
-2		8,3	10,4	11,3	11,8	12,2
-1			2,1	3,0	3,5	3,9
0				0,9	1,4	1,8

В соответствии с табл. 1, полученной с использованием решения (4), $\theta_1 = 88{,}7$, а размерное время составляет $88{,}7 : 0{,}9 \approx 99$ лет.

По известным значениям C_V и r можно исследовать большой цикл задач стохастической гидрологии [1, 2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Найденов, В.И. Нелинейные модели колебаний речного стока / В.И. Найденов, В.И. Швейкина // Водные ресурсы. Том 29 – № 1. – М., 2002. – С. 62–67.
2. Волчек, А.А. Сравнительная оценка марковских и нелинейных моделей годового стока рек Беларуси / А.А. Волчек, С.И. Парфомук // Вестник Брестского государственного технического университета. – Брест: БГТУ, 2006. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 56–60.
3. Волчек, А.А. О решении одной стохастической модели многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, И.И. Гладкий, Л.П. Махнист, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – Брест, 2008. – № 5: Физика, математика, информатика – С. 83–87.

Материал поступил в редакцию 02.10.09

VOLCHEK A.A., HLADKI I.I., MAKHNIST L.P., RUBANOV V.S. On solution fitability jf one small-parameter dynamic model of many years fluctuations of river flow

Small – parameter dynamic model of many years' fluctuations of river flow has been considered. Methods of stochastic differential equations solutions conforming to this model have been given solutions has been studied.