УДК 517.968

В.Т. Дацык
Беларусь, Брест, БрГТУ

ОБ ОДНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ

В теории суммирования рядов и интегралов Фурье одной из важных задач является нахождение главного члена уклонения функций определенного класса от ее линейных средних (операторов приближения) с равномерной оценкой остатка относительно всего класса указанных функций. Впервые такая задача была решена в 1932 году Е.В. Вороновской. Для функций класса $C^2[0;1]$ с помощью полиномов Бернштейна была доказана следующая асимптотическая формула [1, с. 317]:

$$f(x) - B_n(f;x) = -\frac{1}{2}\frac{x(1-x)}{n}f''(x) + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{1}$$

Обобщением результата (1) занимались многие математики, например: С.Н. Бернштейн, И.П. Натансон, П.П. Коровкин, А.В. Ефимов и др.

Отправляясь от результатов из [2; 3] и формулы, полученной А.В. Ефимовым [4, с. 94], найдены асимптотические представления типа Вороновской обобщенных средних интегралов и сопряженных интегралов Фурье выделенных классов функций.

Обозначим через $W^{(2\rho+1)}D$ (ρ – фиксированное целое неотрицательное число) класс абсолютно интегрируемых на числовой прямой функций f вместе со своими производными до порядка $2\rho+1$ включительно, причём $|f^{(2\rho+1)}(t)| \leqslant D < +\infty$.

Видно, что все производные до порядка 2ρ включительно, а также сама функция $f(t)$ принадлежат классу Липшица порядка $\alpha = 1$ [8]. Тогда для функций введенного класса $W^{(2\rho+1)}D$ справедливы представления

$$f^{(m)}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} u^m du \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\left(u(x-t) + \frac{m\pi}{2}\right)dt, \tag{2}$$

$$\overline{f^{(m)}}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} u^m du \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\left(u(x-t) + \frac{(m+1)\pi}{2}\right)dt, \tag{3}$$

где $m = 0, 1, ..., 2\rho$ [9; 10].

Введём обобщённые средние сопряжённого интеграла Фурье.

$$\overline{U}_\sigma(f;x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\sigma K(\sigma,u)du\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin u(x-t)dt, \tag{4}$$

где

$$K(\sigma,u) := \sum_{m=0}^{\infty} a_m(\sigma)\left(\frac{u}{\sigma}\right)^m \tag{5}$$

есть сумма или абсолютно сходящийся ряд по степеням $\frac{u}{\sigma}$, $0 \leqslant u \leqslant \sigma$, $\sigma > 0$. При этом коэффициенты $a_m(\sigma)$ таковы, что ряд

$$A_\sigma := a_0(\sigma) + \sum_{m=1}^{\infty} m|a_m(\sigma)| \tag{6}$$

сходится.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если $f \in W^{(2\rho+1)}D$, то*

$$\overline{U}_\sigma(f;x) = \sum_{\nu=0}^{\rho}(-1)^\nu \overline{f}^{(2\nu)}(x)\frac{a_{2\nu}(\sigma)}{\sigma^{2\nu}} + \sum_{\nu=1}^{\rho+1}(-1)^{\nu+1} f^{(2\nu-1)}(x)\frac{a_{2\nu-1}(\sigma)}{\sigma^{2\nu-1}} +$$

$$+\frac{(-1)^\rho}{\sigma^{2\rho+1}} J_{\sigma,\rho}(x)\sum_{m=0}^{\infty} a_m(\sigma) + \frac{1}{\sigma^{2\rho+1}}\Big(O(w_2(1/\sigma; f^{(2\rho+1)})) + B_{\sigma,\rho}\Big)A_\sigma, \tag{7}$$

где $B_{\sigma,\rho} = O(1)$,

$$J_{\sigma,\rho}(x) := \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \Phi_x^{(2\rho+1)}(t)\frac{\sin\sigma t}{t}dt,$$

$$\Phi_x^{(2\rho+1)}(t) := f^{(2\rho+1)}(x+t) - 2f^{(2\rho+1)}(x) + f^{(2\rho+1)}(x-t).$$

Доказательство. Учитывая равенство (5), представим оператор (4) в виде ряда:

$$\overline{U}_\sigma(f;x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m(\sigma)}{\sigma^m}\overline{V}_m(f;x), \tag{8}$$

где

$$\overline{V}_m(f;x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\sigma u^m du\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin u(x-t)dt. \tag{9}$$

Обозначим

$$\overline{r}_m(f;x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{\infty} u^m du \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin u(x-t)dt. \qquad (10)$$

Тогда из равенств (2), (3), (9), (10) будем иметь:

$$\overline{V}_{2\nu}(f;x) = (-1)^{\nu}\overline{f^{(2\nu)}}(x) - \overline{r}_{2\nu}(f;x) \qquad (11)$$

и

$$\overline{V}_{2\nu-1}(f;x) = (-1)^{\nu+1}\overline{f^{(2\nu-1)}}(x) - \overline{r}_{2\nu-1}(f;x). \qquad (12)$$

Далее проводим оценку $\overline{r}_m(f;x)$ при $m < 2\rho+1$ и $\overline{V}_m(f;x)$ при $m \geqslant 2\rho+1$, получим

$$\overline{r}_m(f;x) = \frac{(-1)^{\rho+1}}{\sigma^{2\rho+1-m}}J_{\sigma,\rho}(x) + \frac{m+1}{\sigma^{2\rho+1-m}}\left(O(w_2(1/\sigma;f^{(2\rho+1)})) + B_{\sigma,\rho}\right) \qquad (13)$$

и

$$\overline{V}_m(f;x) = \frac{(-1)^{\rho}}{\sigma^{2\rho+1-m}}J_{\sigma,\rho}(x) + \frac{m+1}{\sigma^{2\rho+1-m}}\left(O(w_2(1/\sigma;f^{(2\rho+1)})) + B_{\sigma,\rho}\right). \qquad (14)$$

С учётом представлений (11)-(12) и оценок (13)-(14) приходим к справедливости заключения теоремы.

Следствие 1. *Если $f \in W^{(2\rho+1)}D$ и удовлетворяет условию Гельдера порядка $\alpha \in (0;1)$, то в формуле* (7) :

$$B_{\sigma,\rho} = O\left(\frac{1}{\sigma^{\alpha}}\right) \quad \text{и} \quad O(w_2(1/\sigma;f^{(2\rho+1)})) = O\left(\frac{1}{\sigma^{\alpha}}\right).$$

Следствие 2. *Для методов суммирования, у которых $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m(\sigma) = 0$, например для средних Зигмунда с $K(\sigma,u) = 1 - u^m/\sigma^m$, слагаемое с множителем $J_{\sigma,\rho}(x)$ в формуле* (7) *будет отсутствовать. В случае выполнения условий следствия 1 будем иметь*

$$\overline{U}_{\sigma}(f;x) = \overline{f}(x) + O\left(\frac{1}{\sigma^{2\rho+1+\alpha}}\right), \quad \sigma > 2\rho+1. \qquad (15)$$

Список литературы

1. Дзядык, В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядык. – М., 1977. – 512 с.

2. Семенчук, Н. П. Обобщенный метод суммирования интегралов Фурье дифференцируемых функций / Н. П. Семенчук // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1977. – № 1. – С. 19–24.

3. Семенчук, Н. П. Асимптотические формулы типа Вороновской для обобщенных средних сопряженного интеграла Фурье / Н. П. Семенчук, В. Т. Дацык // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1996. – № 2. – С. 130–131.

4. Ефимов, А. В. О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера / А. В. Ефимов // Изв. Акад. наук СССР. Сер. «Математика». – 1958. – Т. 22, № 1. – С. 81–116.

5. Двайт, Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. – М. : Наука, 1973. – 228 с.

6. Ибрагимов, И. И. Экстремальные свойства целых функций конечной степени / И. И. Ибрагимов. – Баку : Акад. наук, 1962. – 316 с.

7. Никольский, С. М. Обобщение одного неравенства С.Н. Бернштейна / С. М. Никольский // Докл. АН СССР. – 1948. – Т. 60, № 9. – С. 1507–1510.

8. Натансон, И. П. Об одном способе суммирования интегралов Фурье / И. П. Натансон // Мат. сб. – 1940. – Т. 49, № 7. – С. 313–320.

9. Титчмарш, Е. Т. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Т. Титчмарш. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 479 с.

10. Бойцун, Л. Г. О суммировании тригонометрических интегралов Фурье методом Г. Ф. Вороного / Л. Г. Бойцун // Изв. вузов. Математика. – 1971. – № 10. – С. 16–22.