

С. В. Босаков

**Метод Ритца в контактных
задачах теории упругости**

БРЕСТ - 2006

УДК 539.3
ББК 38.112
Б85

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор **Крушевский А.Е.**

доктор технических наук, профессор **Быховцев В.Е.**

Печатается по решению Ученого Совета УП «Институт БелНИИС» от 30.05.2006г.

Босаков С.В.

Б85 Метод Ритца в контактных задачах теории упругости.
Монография. – Брест. Издательство БрГТУ, 2006. – с. 108.

Приводятся решения ряда контактных задач с помощью метода Ритца. При решении часто используется подход К. Ректориса, позволяющий упростить процедуру расчета. Рассмотрены разнообразные контактные задачи для стержня, круглой и кольцевой пластинок, прямоугольной плиты при действии наиболее распространенных внешних нагрузок.

Для специалистов в теории расчетов балок и плит на упругом основании.

Табл. 4, Ил. 18, Библиогр. 40 назв.

УДК 539.3
ББК 38.112

ISBN 985-493-050-5

© Босаков С.В., 2006
© Из-во БрГТУ, 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	7
Условные обозначения	10
Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА РИТЦА ДЛЯ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ	10
§1.1. Полная потенциальная энергия конструкции на упругом основании	11
§1.2. Суть метода Ритца	13
§1.3. Координатные функции в методе Ритца для изгибаемого стержня со свободными концами	15
§1.4. Координатные функции метода Ритца для осесимметрично изгибаемой круглой плиты постоянного сечения со свободной гранью	20
§1.5. Координатные функции метода Ритца для осесимметрично изгибаемой кольцевой плиты постоянного сечения со свободными гранями	24
§1.6. Пример расчета методом Ритца балки на упругом основании Винклера	28
§1.7. Подход К. Ректориса	31
Глава 2. МЕТОД РИТЦА В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СТЕРЖНЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ	
§2.1. Метод Ритца в плоской контактной задаче	35
§2.2. Контактная задача для штампа	40
§2.3. Пример 2.1. Контактная задача для штампа на упругом клине со свободными гранями	41
§2.4. Пример 2.2. Контактная задача для стержня на упругой полосе	46
§2.5. Пространственная контактная задача для стержня	50
§2.6. Пример 2.3. Контактная задача для стержня на упругом слое	56

Глава 3. МЕТОД РИТЦА В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ КРУГЛОЙ И КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНОК

§3.1. Осесимметричная контактная задача для круглой пластинки	60
§3.2. Осесимметричная контактная задача для кольцевой пластинки	67
§3.3. Неосесимметричная контактная задача для круглого штампа	73
§3.4. Контактная задача для круглой пластинки на упругом полупространстве при действии крестообразной нагрузки	80

Глава 4. МЕТОД РИТЦА В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ

§4.1. Метод Ритца в контактной задаче для прямоугольной плиты конечной жесткости	89
§4.2. Пример 4.1. Расчет прямоугольной плиты на упругом полупространстве	95
§4.3. Перемещения прямоугольного штампа на произвольном упругом основании	98
§4.4. Пример 4.2. Перемещения прямоугольного штампа на упругом четвертьпространстве	101
Библиография	106

ПРЕДИСЛОВИЕ

Известны преимущества вариационных методов при решении задач математической физики. Зачастую именно эти методы позволяют избежать сложных и громоздких выкладок и быстро получить нужный результат с приемлемой для инженера точностью. В задачах статического расчета конструкций один из вариационных принципов (принцип Лагранжа) характеризует тот факт, что в состоянии равновесия любая конструкция деформируется таким образом, что ее полная потенциальная энергия обладает минимумом. В методе Ритца задаются перемещениями конструкций в виде известных (координатных) функций с неопределенными коэффициентами и сводят задачу о минимуме функционала полной энергии конструкции к задаче поиска минимума функции многих переменных, что хорошо разработано в стандартном курсе математического анализа. Классическим примером инженерного использования метода Ритца является работа [9].

Крайне скудна научная литература по применению вариационных методов в контактных задачах теории упругости. Такое положение объясняется сложностью решения контактных задач, особенно для изгибаемых конструкций. Множество задач для балок и плит на основании Винклера методом Ритца рассчитал С.П.Тимошенко[30]. Осесимметричную задачу для круглой плиты на упругом полупространстве методом Ритца рассмотрел А.Р.С. Selvadurai [39]. Ряд работ по решению контактных задач вариационными методами освещен в коллективной монографии[26].

Автор считает своим долгом донести до читателя свои результаты по использованию метода Ритца в контактных задачах. Подход автора использует спектральные соотношения, применяемые в методе ортогональных многочленов [26]. Все теоретические результаты доводятся до числа, производится сопоставление с известными решениями других авторов. В содержании делается упор на инженерное приложение получаемых результатов. Широко используется пакет компьютерной алгебры "Mathematica-4" [17].

Во введении обосновываются предпосылки, принятые в предлагаемом подходе по использованию метода Ритца в контактных задачах теории упругости.

В главе 1 кратко излагаются основы метода Ритца, строятся системы координатных функций для стержня, круглой и кольцевой плит. Приведен пример расчета для балки на основании Винклера.

В главе 2 рассмотрены плоские контактные задачи для жесткого и гибкого стержня (балки) на упругом основании. Такие же координатные функции используются в решении пространственной контактной задачи для стержня при определенном допущении о распределении реактивных давлений по ширине стержня.

Глава 3 посвящена решению осесимметричных и неосесимметричных контактных задач для круглых и кольцевых плит на упругом основании, причем для круглой плиты используются координатные функции, полученные ранее А.И. Цейтлиным [36].

В главе 4 рассмотрены контактные задачи для прямоугольной плиты на упругом основании. Получены новые результаты по определению перемещений прямоугольного штампа.

Все приводимые решения рассматривают конструкцию со статическими граничными условиями, то есть со свободными концами или краями. Это связано с тем, что задачи расчета фундаментных балок и плит приводят к рассмотрению конструкций с именно такими граничными условиями.

Автор выражает надежду, что содержание книги поможет инженеру при решении практических задач расчета балок и плит на упругом основании.

Автор считает своим долгом выразить благодарность инженеру Пашиной Н.А. за помощь в оформлении рукописи и кандидату технических наук, доценту Тарасевичу А.Н. за всестороннюю поддержку при печатании рукописи.

ВВЕДЕНИЕ

Различные задачи инженерной практики приводят к необходимости решения контактных задач. Давление рельса на шпалу, шпалы на грунт, колонны на фундамент, плиты перекрытия на стену - вот типичные примеры практических задач, приводящих к необходимости решения контактной задачи. Обычно основу решения контактной задачи составляет поиск закона распределения реактивных давлений на контакте конструкции с упругим основанием. Это распределение сложным образом зависит от жесткости конструкции, упругих характеристик основания, внешней нагрузки, характера закрепления конструкции. Подробные сведения о моделях упругого основания, методах решения контактных задач можно найти в [13], [14], [26].

Для рассматриваемых в книге плоских контактных задач (плоская деформация) считается справедливым представление функции Грина упругого основания в виде разложения [26]

$$K(x-\xi) = \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \left[-\ln|x-\xi| + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} T_m(x) T_n(\xi) \right], \quad (\text{B.1})$$

где первое слагаемое в скобках представляет решение Фламана [1] для упругой однородной изотропной полуплоскости.

При решении пространственных контактных задач для функции Грина будем пользоваться представлением.

$$K(x-\xi, y-\eta) = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \left[\frac{1}{R} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} C_{mp}^{nq} T_m(x) T_p(\xi) T_n(y) T_q(\eta) \right]$$
$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad (\text{B.2})$$

где первое слагаемое в скобках представляет решение Буссинеска [1] для упругого однородного изотропного полупространства. Представление (B.1) для большинства моделей приведено в книге [14].

Выражение (В.1) и (В.2) представляют функции Грина в виде суммы сингулярного слагаемого и некоторой непрерывной гладкой функции. Для сингулярной части функции Грина в дальнейшем будет использоваться спектральное соотношение способа ортогональных полиномов [18] в плоском случае

$$\int_{-1}^1 \ln|x-\xi| \frac{T_m(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = -\pi \ln 2, \quad m=0; \quad (В.3)$$

$$= -\frac{\pi}{m} T_m(x), \quad m=1,2,\dots;$$

и осесимметричном

$$\int_0^1 K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) \frac{P_{2n}(\sqrt{1-\rho^2})}{(r+\rho)\sqrt{1-\rho^2}} \rho d\rho = \left(\frac{\pi(2n-1)!!}{2 \cdot 2n!!}\right)^2 P_{2n}(\sqrt{1-r^2}),$$

где $T_m(z)$ – полином Чебышева первого рода;

$K(z)$ – полный эллиптический интеграл;

$P_{2n}(z)$ – полином Лежандра [16].

Подробнее о решении контактных задач способом ортогональных многочленов можно найти в книгах [14], [26], [28].

При решении всех рассмотренных в работе задач ищутся в первую очередь перемещения (прогибы, осадки) конструкции по методу Ритца. При этом за координатные функции принимаются собственные функции дифференциального уравнения изгибных колебаний конструкции со статическими граничными условиями. Этот подход ранее был использован проф. А.И. Цейтлиным [36] для решения осесимметричных контактных задач. Вследствие ортогональности принятых координатных функций процесс получения решения значительно упрощается. Для прямоугольной плиты подобные функции найти не удалось, поэтому в качестве координатных функций здесь используются ряды по полиномам Чебышева первого рода. Как известно, уравнения равновесия и статические граничные условия при этом удовлетворяются автоматически [21] при взятии достаточного числа членов ряда. Надо отметить, что в статье [40] неожиданно сделан пессимистический вывод о невозможности построе-

ния собственных функций дифференциального уравнения изгибных колебаний прямоугольной плиты со свободными гранями.

Автор не заострял внимание на чисто математических вопросах существования и сходимости решений бесконечных систем, к которым сводится решение почти всех задач, рассмотренных в книге, считая справедливым утверждение о том, что процедура метода ортогональных многочленов приводит к регулярным бесконечным системам, которые можно решать способом усечения [26].

Решение всех контактных задач, приведенных в книге, осуществляется в традиционной постановке [15], т.е. в контактной зоне не учитываются касательные напряжения.

Репозиторий БРГАУ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

\mathcal{E} – полная энергия конструкции и действующей на нее нагрузки;

$EI(x)$ – закон изменения изгибной жесткости по длине стержня;

2ℓ – длина стержня;

E_0, ν_0 – модуль упругости и коэффициент Пуассона упругого основания;

ν_p – коэффициент Пуассона материала плиты;

$D(x,y), D(r,\theta)$ – закон изменения цилиндрической жесткости плиты в декартовых или полярных координатах;

S – площадь плиты;

$W(x,y), W(r,\theta)$ – прогибы плиты в декартовых или полярных координатах;

U – энергия изгиба конструкции;

A – энергия деформаций упругого основания;

Π – работа внешней нагрузки;

k – коэффициент постели упругого основания Винклера;

$q(x), q(x,y), q(r,\theta)$ – внешняя нагрузка на стержень, плиту в декартовых или полярных координатах;

$p(x), p(x,y), p(r,\theta)$ – нормальная составляющая реактивных давлений в контактной зоне стержня или плиты в декартовых или полярных координатах;

$2a, 2b$ – размеры прямоугольной плиты;

b, a – размеры кольцевой плиты или полярные координаты концов стержня на упругом клиновидном основании;

a, b, c, d – координаты углов прямоугольного штампа на упругом четвертьпространстве.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА РИТЦА ДЛЯ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

§1.1. Полная потенциальная энергия конструкции на упругом основании

Согласно принципу Лагранжа [1] при нагружении конструкции (балка, плита) на упругом основании статической нагрузкой ее полная потенциальная энергия в состоянии равновесия принимает минимальное значение. Величина полной потенциальной энергии конструкции на упругом основании состоит из трех слагаемых: энергии деформаций конструкции, энергии деформаций упругого основания и работы внешней нагрузки. Рассмотрим определение каждого слагаемого полной энергии в отдельности.

▪ Энергию деформаций конструкции обычно отождествляют с энергией изгиба конструкции, пренебрегая деформациями сдвига. Это вполне оправдано для стержневых и пластинчатых элементов [1]. Для стержня энергия изгиба определяется по формуле

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI(x) \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx \quad (1.1)$$

Для плиты в декартовых координатах энергия изгиба определяется выражением

$$U = \frac{1}{2} \iint_S D(x, y) \left\{ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 - 2(1 - \nu_p) \left[\frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 w}{dy^2} - \left(\frac{d^2 w}{dx dy} \right)^2 \right] \right\} dy dx \quad (1.2)$$

Для плиты в полярных координатах энергия изгиба находится так

$$U = \frac{1}{2} \iint_S D(r, \theta) \left\{ \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{d\theta^2} \right)^2 - 2(1 - \nu_p) \left\{ \frac{d^2 w}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{d\theta^2} \right) - \left[\frac{d}{dr d\theta} \left(\frac{w}{r} \right) \right]^2 \right\} \right\} r dr d\theta \quad (1.3)$$

Для осесимметрично нагруженных круглых и кольцевых плит выражение (1.3) упрощается вследствие обращения в нуль производных по угловой координате

$$U = \pi \int_a^b D(r) \left[\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 - 2(1-\nu_p) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2} \right] r dr \quad (1.4)$$

▪ При определении энергии деформаций упругого основания на основании закона сохранения энергии ее заменяют работой реактивных давлений $p(x, y)$ в контактной зоне конструкции [39]. Если пренебрегать реактивными касательными усилиями в контактной зоне, то энергия деформаций упругого основания определяется для стержня

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\ell}^{\ell} p(x) y(x) dx \quad (1.5)$$

Так как реактивные давления изменяются от конечной величины в деформированном состоянии до нуля в недеформируемом, то в (1.5) появляется множитель $\frac{1}{2}$.

Для плиты в декартовых или полярных координатах

$$A = \frac{1}{2} \iint_S p(x, y) w(x, y) dx dy; \quad (1.6)$$

$$A = \frac{1}{2} \iint_S p(r, \theta) w(r, \theta) r dr d\theta$$

В случае упругого основания Винклера $p(x)=k y(x)$ и $p(x,y)=k w(x,y)$ и формулы (1.5)-(1.6) для этой модели основания упрощаются. Надо подчеркнуть, что в формулах (1.6) интегрирование производится по области S контакта конструкции с основанием.

▪ При нахождении работы внешней нагрузки не следует забывать, что полная потенциальная энергия конструкции подсчитывается при переводе ее из деформированного состояния в недеформированное, начальное. Поэтому величина работы будет отрицательной.

Для стержня

$$\Pi = - \int_{-\ell}^{\ell} q(x) y(x) dx \quad (1.7)$$

Для плиты в декартовых или полярных координатах

$$\begin{aligned} \Pi &= - \iint_S q(x, y) w(x, y) dx dy \\ \Pi &= - \iint_S q(r, \theta) w(r, \theta) r dr d\theta. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Если на плиту действует моментная нагрузка, то формулы (1.7), (1.8) несколько изменятся [12].

Таким образом, величина полной энергии конструкции на упругом основании и действующей на нее внешней нагрузки определяется формулой

$$\mathcal{E} = U + A + \Pi, \quad (1.9)$$

где каждое из слагаемых справа определяется приведенными выше формулами.

§1.2. Суть метода Ритца

Рассмотрим функционал полной энергии конструкции на упругом основании и действующей на нее нагрузки (1.9)

$$\mathcal{E} = U + A + \Pi \quad (1.10)$$

Зададимся перемещениями (прогибами) конструкции в виде ряда заданных функций $\varphi_i(x)$ или $\varphi_{mn}(x, y)$ с неизвестными коэффициентами a_i .

Для стержня

$$y(x) = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(x) \quad (1.11)$$

Функции $\varphi_i(x)$ в методе Ритца называются координатными или базисными. Они обязательно должны удовлетворять геометрическим граничным условиям рассматриваемой задачи. Если стержень свободно лежит на упругом основании, то $\varphi_i(x) \neq 0$ для $a \leq x \leq b$, где a, b - координаты концов стержня. Статическим граничным условиям на концах стержня удовлетворяют необязательно, так как доказано [21], что они выполняются автоматически при взятии бесконечного числа членов ряда (1.11).

Для плиты в декартовых координатах задаемся

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} \varphi_{mn}(x, y), \quad (1.12)$$

причем $\varphi_{mn}(x,y)$ также удовлетворяет геометрическим граничным условиям. Однако в последнее время появились работы [12],[19], где показано, что весь ряд (1.11),(1.12) должен удовлетворять граничным условиям рассматриваемой задачи, а не обязательно каждая координатная функция в отдельности. Подставим (1.11) или (1.12) в (1.10) и выполним интегрирование по площади контакта конструкции с упругим основанием. В результате мы получим функционал полной энергии в виде функции нескольких переменных $\mathcal{E}(a_1, a_2, a_3, \dots)$ или $\mathcal{E}(a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots)$.

Так как в состоянии равновесия полная энергия \mathcal{E} должна иметь минимум, то коэффициенты a_i и a_{mn} найдем из условия обращения в нуль производных от полной энергии по каждому из коэффициентов a_i или a_{mn} , то есть

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_i} &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N; \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_{mn}} &= 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, M; \quad n = 1, 2, 3, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.13)$$

В результате получается система уравнений, порядок которой равен числу неопределенных коэффициентов a_i или a_{mn} . Решение ее позволяет найти неопределенные коэффициенты, и, следовательно, прогибы конструкции. По прогибам легко определяются усилия в стержне или плите [1],[27].

Помимо заданного соответствия геометрическим граничным условиям, координатные функции должны обладать необходимой полнотой [21]. Это означает, что можно найти решение поставленной задачи с любой степенью точности, увеличивая число членов рядов (1.11) или (1.12).

Рассматриваемые в работе задачи являются линейными [1], поэтому функционал полной энергии (1.10) получается в виде квадратичной функции неопределенных коэффициентов, а разрешающая система (1.13) - системой линейных алгебраических уравнений.

Много примеров на применение метода Ритца в инженерных задачах можно найти в трудах С.П. Тимошенко [30],[31], работах [12],[19],[25] и др. Там же можно найти оригинальные приемы по выбору координатных функций, составлению функционала полной энергии.

Обычно в практических расчетах с использованием метода Ритца первые 2-3 координатные функции дают приемлемую точность для интегральных величин. Но так как сходимость рядов ухудшается при их дифференцировании [35], то для определения производных от интегральных величин нужно увеличивать число членов ряда (1.11),(1.12).

§1.3 Координатные функции в методе Ритца для изгибаемого стержня со свободными концами

При расчете изгибаемого стержня на упругом основании методом Ритца в качестве координатных функции будем принимать собственные функции дифференциального уравнения изгибных колебаний стержня со свободными концами. Система подобных функций была построена

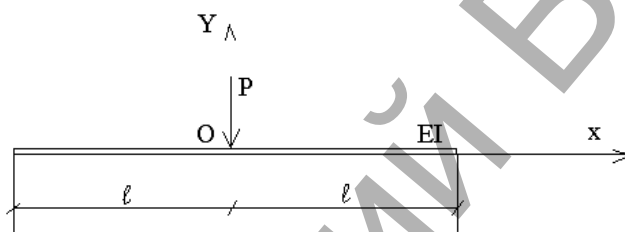


Рис. 1.1. Стержень со свободными концами

В.Н. Фаддеевой [32] и использовалась в работах [7],[8],[36] при решении конкретных задач. Рассмотрим функционал энергии изгиба стержня постоянной жесткости со свободными концами (рис.1.1).

Согласно (1.1)

$$U = \frac{EI}{2} \int_{-l}^l \left(\frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{x}^2} \right)^2 d\bar{x} \quad (1.14)$$

Выполним в (1.14) интегрирование по частям. Последовательно получаем

$$U = \frac{EI}{2} \int_{-l}^l \left(\frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{x}^2} \right) \left(\frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{x}^2} \right) d\bar{x} = \frac{EI}{2} \left[\frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{x}^2} \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \Big|_{-l}^l - \int_{-l}^l \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \frac{d^3 \bar{y}}{d\bar{x}^3} d\bar{x} \right] \quad (1.15)$$

Независимо от граничных условий на концах стержня (шарнирное опирание, жесткое защемление, свободный конец) получаем, что первое слагаемое в выражении (1.15) обращается в нуль. Далее получаем

$$-\frac{EI}{2} \int_{-l}^l \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \frac{d^3 \bar{y}}{d\bar{x}^3} d\bar{x} = -\frac{EI}{2} \left[\bar{y} \frac{d^3 \bar{y}}{d\bar{x}^3} \Big|_{-l}^l - \int_{-l}^l \bar{y} \frac{d^4 \bar{y}}{d\bar{x}^4} d\bar{x} \right] \quad (1.16)$$

Опять же, независимо от граничных условий на концах стержня выражение (1.16) равно

$$\frac{EI}{2} \int_{-\ell}^{\ell} \bar{y} \frac{d^4 \bar{y}}{d\bar{x}^4} d\bar{x} \quad (1.17)$$

Сопоставим (1.14) и (1.17). Если теперь в качестве координатных функций выбрать собственные функции дифференциального уравнения изгибных колебаний стержня, которые ортогональны [20]

$$\frac{d^4 \bar{y}_i}{d\bar{x}^4} = \lambda^4 \bar{y}_i; \quad (1.18)$$

$$\bar{y}(x) = \sum a_i \bar{y}_i(\bar{x}),$$

то энергия изгиба стержня при представлении (1.18) определится выражениями (1.14) и (1.17)

$$U = \frac{EI}{2} \int_{-\ell}^{\ell} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^4 a_i \bar{y}_i(\bar{x}) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{y}_k(\bar{x}) d\bar{x} = \frac{EI}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^4 a_i^2 \int_{-\ell}^{\ell} \bar{y}_i^2 d\bar{x} \quad (1.19)$$

Таким образом, матрица $\frac{dU}{da_i}$ ($i=1,2,\dots$) будет диагональной, что значительно сокращает объем вычислений. Поэтому ниже построим требуемую систему координатных функций.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \lambda^4 y = 0 \quad (1.20)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=\pm 1} = \left. \frac{d^3 y}{dx^3} \right|_{x=\pm 1} = 0 \quad (1.21)$$

Решение уравнения (1.20) записывается так

$$y(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x + C_3 \operatorname{ch} \lambda x + C_4 \operatorname{sh} \lambda x. \quad (1.22)$$

Тогда производные равны

$$\frac{dy}{dx} = \lambda(-C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 \operatorname{sh} \lambda x + C_4 \operatorname{ch} \lambda x), \quad (1.23)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \lambda^2(-C_1 \cos \lambda x - C_2 \sin \lambda x + C_3 \operatorname{ch} \lambda x + C_4 \operatorname{sh} \lambda x), \quad (1.24)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \lambda^3(C_1 \sin \lambda x - C_2 \cos \lambda x + C_3 \operatorname{sh} \lambda x + C_4 \operatorname{ch} \lambda x) \quad (1.25)$$

Выполняя однородные граничные условия (1.21) с учетом (1.24) и (1.25), приходим к системе однородных линейных алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} -\cos \lambda & \sin \lambda & ch\lambda & -sh\lambda \\ -\sin \lambda & -\cos \lambda & -sh\lambda & ch\lambda \\ -\cos \lambda & -\sin \lambda & ch\lambda & sh\lambda \\ \sin \lambda & -\cos \lambda & sh\lambda & ch\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Раскрывая определитель, получаем из (1.26)

$$tg^2\lambda - th^2\lambda = 0. \quad (1.27)$$

Будем рассматривать отдельно симметричные формы колебаний стержня

$$y(x) = C_1 \cos \lambda x + C_3 ch\lambda x \quad (1.28)$$

и антисимметричные формы колебаний

$$y(x) = C_2 \sin \lambda x + C_4 sh\lambda x \quad (1.29)$$

Тогда для симметричной формы колебаний (1.28) необходимо раскрыть определитель

$$\begin{bmatrix} -\cos \lambda & ch\lambda \\ -\sin \lambda & -sh\lambda \end{bmatrix} = 0; \quad (1.30)$$

или $th\lambda + tg\lambda = 0$, причем собственные числа равны $\lambda_1=0$; $\lambda_2=2.365020$; $\lambda_3=5.497804$; и [38]

$$\lambda_i = \pi \left(i - \frac{5}{4} \right), \quad i \geq 4.$$

Каждому собственному числу соответствует своя форма колебаний. Найдем эти формы. Для $\lambda_1=0$

$$y_1(x) = C_1 + C_3 = const \quad (1.31)$$

Для λ_i ($i>1$)

$$y_i(x) = C_1 \cos \lambda_i x + C_3 ch\lambda_i x = C_1 \left(\cos \lambda_i x + \frac{C_3}{C_1} ch\lambda_i x \right) \quad (1.32)$$

Подставляя (1.32) в одно из граничных условий (1.21), получаем

$$C_1 \left[-\cos \lambda_i + \frac{C_3}{C_1} ch\lambda_i \right] = 0; \quad \frac{C_3}{C_1} = \frac{\cos \lambda_i}{ch\lambda_i}$$

и

$$y_i(x) = C_1 \left(\cos \lambda_i x + \frac{\cos \lambda_i}{ch \lambda_i} ch \lambda_i x \right) = C_1' \left(\frac{\cos \lambda_i x}{\cos \lambda_i} + \frac{ch \lambda_i x}{ch \lambda_i} \right) \quad (1.33)$$

Собственные функции (1.33) использованы автором в контактной задаче для упругой полуполосы [7].

Таким образом, собственные формы симметричных изгибных колебаний стержня со свободными концами описываются уравнениями

$$y_1(x) = C_1; \\ y_i(x) = C_i \left(\frac{\cos \lambda_i x}{\cos \lambda_i} + \frac{ch \lambda_i x}{ch \lambda_i} \right), \quad (1.34)$$

а собственные числа равны

$$\lambda_1=0; \quad \lambda_2=2.365020; \quad \lambda_3=5.497804 \quad \lambda_i = \pi \left(i - \frac{5}{4} \right), \quad i \geq 4 \quad (1.35)$$

Нормируем собственные функции. Для этого возьмем интегралы и определим C_i в (1.34)

$$\int_{-1}^1 [y_1(x)]^2 dx = 1, \quad C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ \int_{-1}^1 [y_i(x)]^2 dx = 1, \quad C_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.36)$$

Итак, нормированные собственные функции симметричных изгибных колебаний стержня со свободными концами описываются уравнениями

$$y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ y_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos \lambda_i x}{\cos \lambda_i} + \frac{ch \lambda_i x}{ch \lambda_i} \right); \quad i > 1, \quad x = \frac{\bar{x}}{\ell}, \quad (1.37)$$

где собственные числа определяются (1.35). На рис.1.2 приведены графики функций (1.37).

Для антисимметричных форм собственных колебаний аналогично принимаем и последовательно получаем

$$y(x) = C_2 \sin \mu x + C_4 sh \mu x; \quad (1.38)$$

$$\begin{bmatrix} -\sin \mu & sh \mu \\ -\cos \mu & ch \mu \end{bmatrix} = 0; \quad (1.39)$$

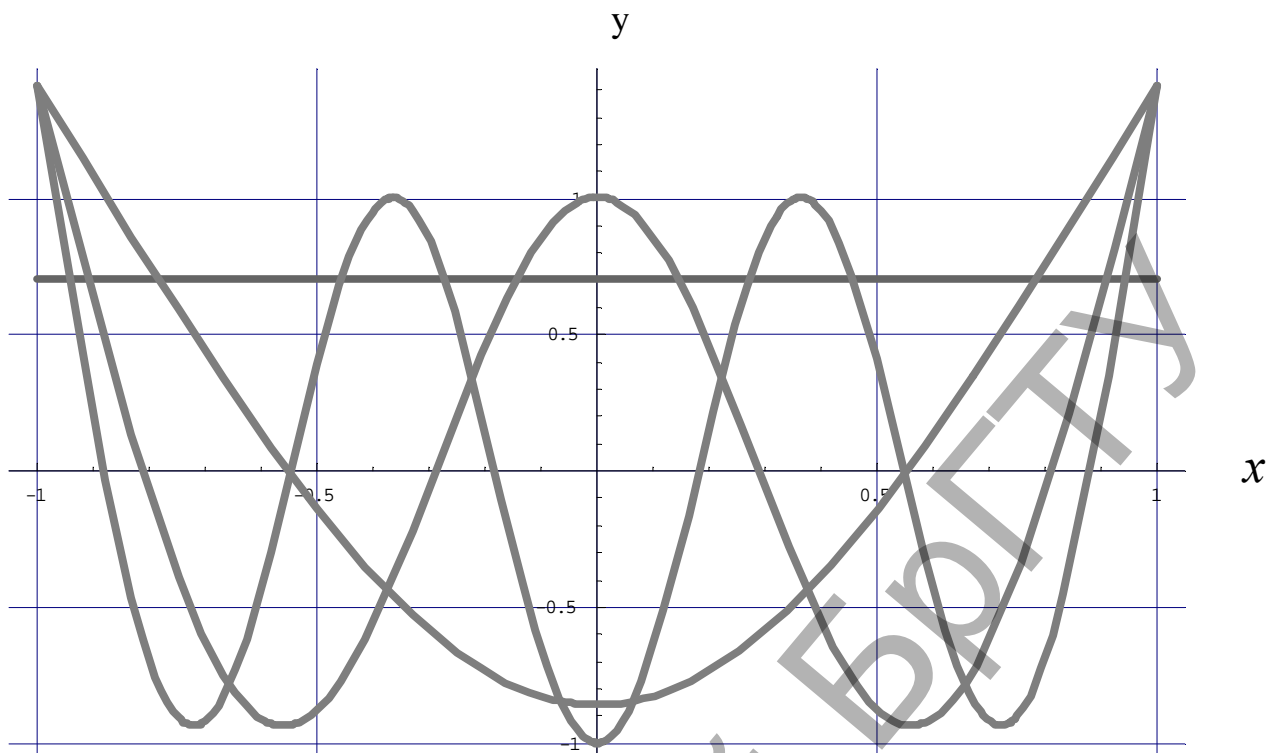


Рис.1.2. Графики первых ортонормированных собственных функций дифференциального оператора симметричных изгибных колебаний стержня со свободными концами

Или $tg\mu - th\mu = 0$; $\mu_1 = 0$;

$$\mu_2 = 3.926602; \quad \mu_i = \pi \left(i - \frac{1}{4} \right), \quad i \geq 3. \quad (1.40)$$

и для нормированных собственных функций находим

$$y_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x;$$

$$y_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sin \mu_i x}{\sin \mu_i} + \frac{sh \mu_i x}{sh \mu_i} \right), \quad i > 1. \quad (1.41)$$

На рис.1.3 приведены графики первых четырех собственных функций дифференциального оператора антисимметричных колебаний стержня со свободными концами. В заключение отметим, что при переходе в (1.20) к безразмерным координатам в четвертой производной по x в знаменателе появляется множитель l^4 .

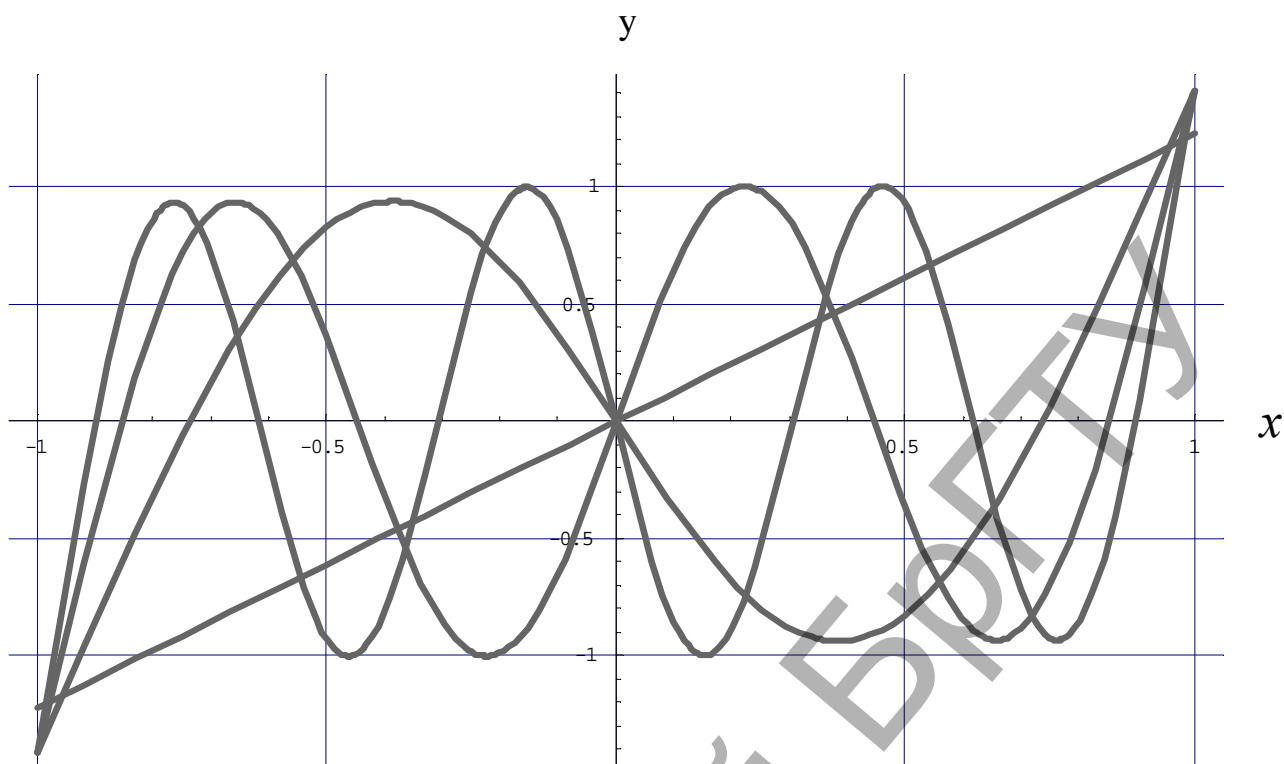


Рис.1.3. Графики первых ортонормированных собственных функций дифференциального оператора антисимметричных изгибных колебаний стержня со свободными концами

§1.4. Координатные функции метода Ритца для осесимметрично изгибаемой круглой плиты постоянного сечения со свободной гранью

Рассмотрим круглую плиту постоянной жесткости со свободной гранью (рис 1.4). Построим для нее систему координатных функций для решения контактной задачи методом Ритца.

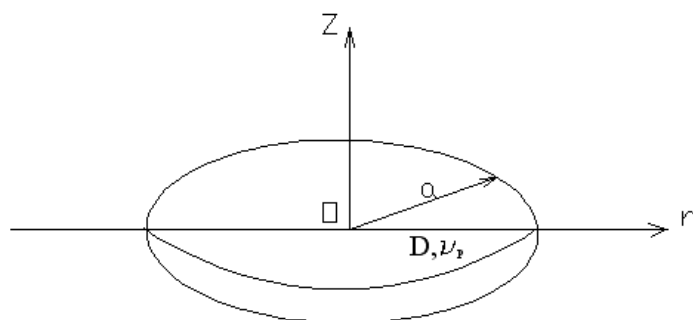


Рис 1.4. Круглая плита

Для этого решим дифференциальное уравнение изгиба в полярных координатах

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \lambda^4 w = 0, \quad (1.42)$$

относительно функции прогибов плиты $w(r, \theta)$ и собственных чисел λ_i при выполнении статических граничных условий на краю плиты при $r=a$ для радиальных изгибающего момента и приведенной поперечной силы.

Будем искать решение (1.42) в виде произведения

$$w(r, \theta) = w_n(r) \cdot \cos n \theta \quad (1.43)$$

В (1.43) для упрощения считается, что прогибы симметричны относительно полярной координаты θ . После подстановки (1.43) в (1.42), выполнения дифференцирования и сокращения на $\cos n \theta$ получаем

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right) - \lambda^4 w_n = 0 \quad (1.44)$$

Общее решение (1.44) известно [16] и имеет вид

$$w_n(r) = C_{1n} J_n \left(\lambda \frac{r}{a} \right) + C_{2n} Y_n \left(\lambda \frac{r}{a} \right) + C_{3n} I_n \left(\lambda \frac{r}{a} \right) + C_{4n} K_n \left(\lambda \frac{r}{a} \right) \quad (1.45)$$

Так как граничных условий два и прогибы ограничены в начале координат, то в (1.45) нужно оставить два слагаемых. Поэтому принимаем для круглой плиты

$$w(r) = C_{1n} J_n \left(\lambda \frac{r}{a} \right) + C_{3n} I_n \left(\lambda \frac{r}{a} \right) \quad (1.46)$$

Для осесимметрично изгибаемой круглой плиты нужно принять $n=0$, и тогда

$$w(r) = C_{10} J_0 \left(\lambda \frac{r}{a} \right) + C_{30} I_0 \left(\lambda \frac{r}{a} \right), \quad (1.47)$$

причем на свободном краю плиты граничные условия при $r = a$ становятся

$$\left. \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu_p}{r} \frac{dw}{dr} \right|_{r=a} = 0 \quad (1.48)$$

$$\left. \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right|_{r=a} = 0$$

Подставим (1.47) в (1.48). Получается система двух линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов C_{10} и C_{30} .

Требование существования решения приводит к необходимости раскрыть определитель

$$\begin{bmatrix} J_0(\lambda) - \frac{1-\nu_p}{\lambda} J_1(\lambda) & -I_0(\lambda) + \frac{1-\nu_p}{\lambda} I_1(\lambda) \\ J_1(\lambda) & I_1(\lambda) \end{bmatrix} = 0 \quad (1.49)$$

Из (1.49) получаем трансцендентное уравнение для определения совокупности собственных чисел λ_i

$$J_0(\lambda)I_1(\lambda) + J_1(\lambda)I_0(\lambda) - \frac{2}{\lambda}(1-\nu_p)J_1(\lambda)I_1(\lambda) = 0 \quad (1.50)$$

В таблице 1.1 приведены величины первых собственных чисел при различных значениях коэффициента Пуассона ν_p материала круглой плиты.

Таблица 1.1

Таблица собственных чисел для круглой плиты со свободной гранью

λ	Коэффициент Пуассона ν_p плиты					
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
λ_1	0	0	0	0	0	0
λ_2	2.871224	2.918874	2.961727	3.000523	3.035847	3.068170
λ_3	6.145423	6.164422	6.182688	6.200258	6.217166	6.233446
λ_4	9.332803	9.344652	9.356218	9.367509	9.378534	9.389300
λ_5	12.497296	12.505916	12.514387	12.522712	12.530893	12.538934
λ_6	15.652643	15.659421	15.666106	15.672701	15.679206	15.685623
λ_7	18.803416	18.809001	18.814524	18.819984	18.825384	18.830724
λ_8	21.951573	21.956323	21.961028	21.965688	21.970304	21.974876
λ_9	25.098094	25.102220	25.106324	25.110388	25.114419	25.118417

Так как из (1.49)

$$C_{30} = -\frac{J_1(\lambda_i)}{I_1(\lambda_i)} C_{10},$$

то совокупность собственных функций для рассматриваемой плиты определяется выражением

$$w_i(r) = C_i \left[J_0\left(\lambda_i \frac{r}{a}\right) - \frac{J_1(\lambda_i)}{I_1(\lambda_i)} I_0\left(\lambda_i \frac{r}{a}\right) \right] \quad (1.51)$$

Условие нормирования собственных функций

$$\int_0^a \left[w_i \left(\lambda_i \frac{r}{a} \right) \right]^2 r dr = 1$$

дает величину коэффициента C_i в (1.51)

$$C_i = \sqrt{\frac{2I_1^2(\lambda_i)}{I_0(\lambda_i)I_2(\lambda_i)J_1^2(\lambda_i) - J_0(\lambda_i)J_2(\lambda_i)I_1^2(\lambda_i)}} \quad (1.52)$$

Первое собственное число $\lambda_1=0$ соответствует поступательному перемещению круглой плиты. Нормированная собственная функция

$$w_1 = \sqrt{2}$$

Более подробный вывод выражения для нормированной первой собственной функции имеется в монографии А.И. Цейтлина [36].

Таким образом, нормированные собственные функции для круглой плиты со свободной гранью описываются уравнениями (1.51), где C_i определяется по формуле (1.52). На рис. 1.5 приведены графики первых четырех нормированных собственных функций для круглой плиты со свободной гранью.

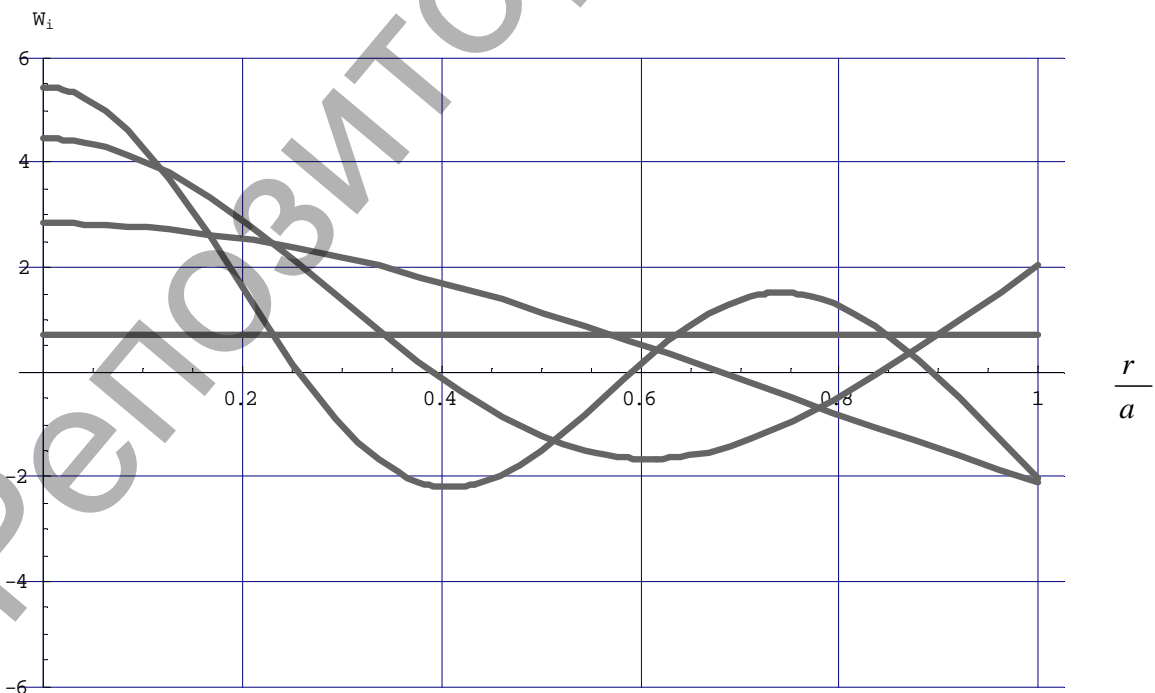


Рис. 1.5. Графики четырех первых нормированных собственных функций для круглой плиты со свободными краями

§1.5. Координатные функции метода Ритца для осесимметрично изгибаемой кольцевой плиты постоянного сечения со свободными гранями

Для определения собственных функций дифференциального уравнения изгибных колебаний кольцевой плиты постоянного сечения (рис.1.6) необходимо решить уравнение (1.42) при статических граничных условиях на двух гранях плиты.

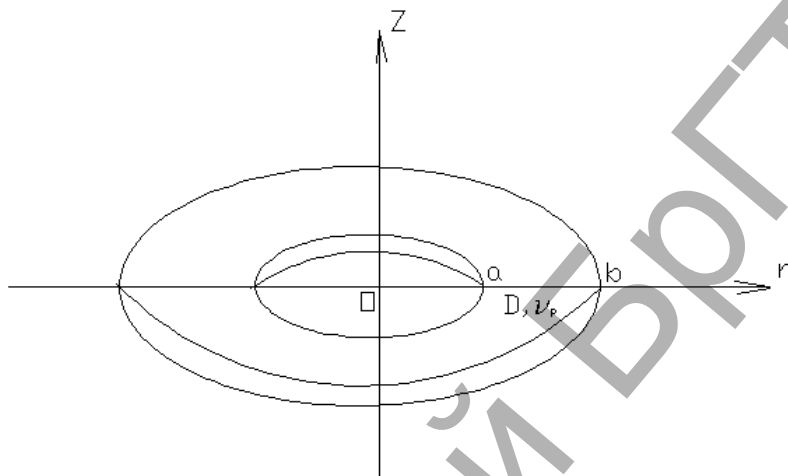


Рис. 1.6. Кольцевая плита со свободными краями

Поэтому в общем виде решение уравнения останется таким же (1.45), но для осесимметричных колебаний кольцевой плиты необходимо принять $n=0$

$$w(r) = C_1 J_0\left(\lambda \frac{r}{b}\right) + C_2 Y_0\left(\lambda \frac{r}{b}\right) + C_3 I_0\left(\lambda \frac{r}{b}\right) + C_4 K_0\left(\lambda \frac{r}{b}\right) \quad (1.53)$$

Выполнение однородных граничных условий при $r=a$ и $r=b$ для усилий (1.48) приводит к необходимости раскрыть определитель вида

$$\begin{vmatrix} J_1(\lambda) & Y_1(\lambda) & I_1(\lambda) & -K_1(\lambda) \\ J_1\left(\lambda \frac{a}{b}\right) & Y_1\left(\lambda \frac{a}{b}\right) & I_1\left(\lambda \frac{a}{b}\right) & -K_1\left(\lambda \frac{a}{b}\right) \\ J_0(\lambda) - \frac{1-\nu_p}{\lambda} J_1(\lambda) & Y_0(\lambda) - \frac{1-\nu_p}{\lambda} Y_1(\lambda) & -I_0(\lambda) + \frac{1-\nu_p}{\lambda} I_1(\lambda) & -K_0(\lambda) - \frac{1-\nu_p}{\lambda} K_1(\lambda) \\ J_0\left(\lambda \frac{a}{b}\right) - \frac{1-\nu_p}{\lambda} J_1\left(\lambda \frac{a}{b}\right) & \dots & -I_0\left(\lambda \frac{a}{b}\right) + \frac{1-\nu_p}{\lambda} I_1\left(\lambda \frac{a}{b}\right) & \dots \end{vmatrix} \quad (1.54)$$

Выражение (1.54) показывает, что совокупность собственных чисел λ_i для кольцевой плиты со свободными гранями будет зависеть от коэффициента Пуассона материала плиты и отношения радиуса отверстия к внешнему радиусу кольцевой плиты. В таблице 1.2 приведены величины первых собственных чисел осесимметричных колебаний кольцевой плиты со свободными гранями для некоторых значений коэффициента Пуас-

сона материала плиты и отношений радиуса отверстия к радиусу плиты.

Таблица 1.2

Таблица первых собственных чисел осесимметричных колебаний
кольцевой плиты постоянного сечения

$$\frac{a}{b} = 0.25$$

ν_p	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
$\frac{1}{6}$	0	2.890953	6.766830	10.766801	14.871181	19.011741	23.169918
$\frac{1}{4}$	0	2.893848	6.747097	10.746975	14.854427	18.997588	23.157769
$\frac{1}{3}$	0	2.887546	6.723228	10.724975	14.836427	18.982641	23.145073

$$\frac{a}{b} = 0.5$$

ν_p	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
$\frac{1}{6}$	0	3.087623	9.626189	15.805781	22.060501	28.327655	34.600577
$\frac{1}{4}$	0	3.068806	9.615038	15.797284	22.053988	28.322208	34.596177
$\frac{1}{3}$	0	3.037888	9.602536	15.788251	22.047196	28.316780	34.591663

$$\frac{a}{b} = 0.75$$

ν_p	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
$\frac{1}{6}$	0	3.968348	18.976017	31.445820	44.005389	56.566267	69.129310
$\frac{1}{4}$	0	3.934536	18.971861	31.442836	44.003145	56.564472	69.127816
$\frac{1}{3}$	0	3.884697	18.967290	31.439692	44.000822	56.562630	69.126290

Для определения i -ой собственной функции, соответствующей собственному числу λ_i , запишем (1.53) в таком виде

$$w(r) = C_{1i} \left[J_0 \left(\lambda_i \frac{r}{b} \right) + \frac{C_{2i}}{C_{1i}} Y_0 \left(\lambda_i \frac{r}{b} \right) + \frac{C_{3i}}{C_{1i}} I_0 \left(\lambda_i \frac{r}{b} \right) + \frac{C_{4i}}{C_{1i}} K_0 \left(\lambda_i \frac{r}{b} \right) \right], \quad (1.55)$$

где отношения $\frac{C_{2i}}{C_{1i}}$, $\frac{C_{3i}}{C_{1i}}$, $\frac{C_{4i}}{C_{1i}}$ определяются из системы уравнений

$$[K] \vec{G} = \vec{S}, \quad (1.56)$$

$$\vec{G}^T = [\gamma_{2i} \quad \gamma_{3i} \quad \gamma_{4i}]$$

$$K = \begin{pmatrix} Y_1(\lambda) & I_1(\lambda) & -K_1(\lambda) \\ Y\left(\lambda \frac{a}{b}\right) & I_1\left(\lambda \frac{a}{b}\right) & -K_1\left(\lambda \frac{a}{b}\right) \\ Y_0(\lambda) - \frac{1-\nu_p}{\lambda} Y_1(\lambda) & -I_0(\lambda) + \frac{1-\nu_p}{\lambda} I_1(\lambda) & -K_0(\lambda) - \frac{1-\nu_p}{\lambda} K_1(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$\vec{S}^T = - \begin{bmatrix} J_1(\lambda) & J_1\left(\lambda \frac{a}{b}\right) & J_0(\lambda) - \frac{1-\nu_p}{\lambda} J_1(\lambda) \end{bmatrix};$$

$$\gamma_{2i} = \frac{C_{2i}}{C_{1i}}; \quad \gamma_{3i} = \frac{C_{3i}}{C_{1i}}; \quad \gamma_{4i} = \frac{C_{4i}}{C_{1i}}$$

В результате решения системы (1.56) получены выражения для γ_{2i} , γ_{3i} , γ_{4i} , которые вследствие громоздкости здесь не приводятся.

Нормируя собственные функции, получаем нормирующий множитель, который также вследствие громоздкости здесь не приводится [10].

Отдельно рассмотрим случай $\lambda_i=0$. Для него [1]

$$w_1(r) = C_{11} + C_{21} \frac{r^2}{b^2} + C_{31} \ln \frac{r}{b} + C_{41} \frac{r^2}{b^2} \ln \frac{r}{b}, \quad (1.57)$$

так как радиальные момент и сила (1.48)

$$M_r = -D \left[\frac{2C_{21}}{b^2} - \frac{C_{31}}{r^2} + \frac{C_{41}}{b^2} \left(3 + 2 \ln \frac{r^2}{b^2} \right) \right], \quad (1.58)$$

$$Q_r = -D \frac{4C_{41}}{b^2} \frac{1}{r},$$

то выполняя граничные условия для (1.58) при $r=a$ и $r=b$, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{b^2} & -\frac{1}{b^2} & \frac{3}{b^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{b^3} \\ 0 & \frac{2}{b^2} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{b^2} \left(3 + 2 \ln \frac{a}{b} \right) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{ab^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \\ C_{41} \end{bmatrix} = 0. \quad (1.59)$$

Откуда следует, что

$$C_{21} = C_{31} = C_{41} = 0 \quad (1.60)$$

и

$$w_1 = C_{11}$$

Поэтому первая нормированная собственная функция будет определяться выражением

$$w_1(r) = \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}} \quad (1.61)$$

На рис. 1.7 приведены графики первых трех нормированных собственных функций для кольцевой плиты со свободными гранями при $\frac{a}{b} = 0.5$ и $\nu_p = \frac{1}{6}$.

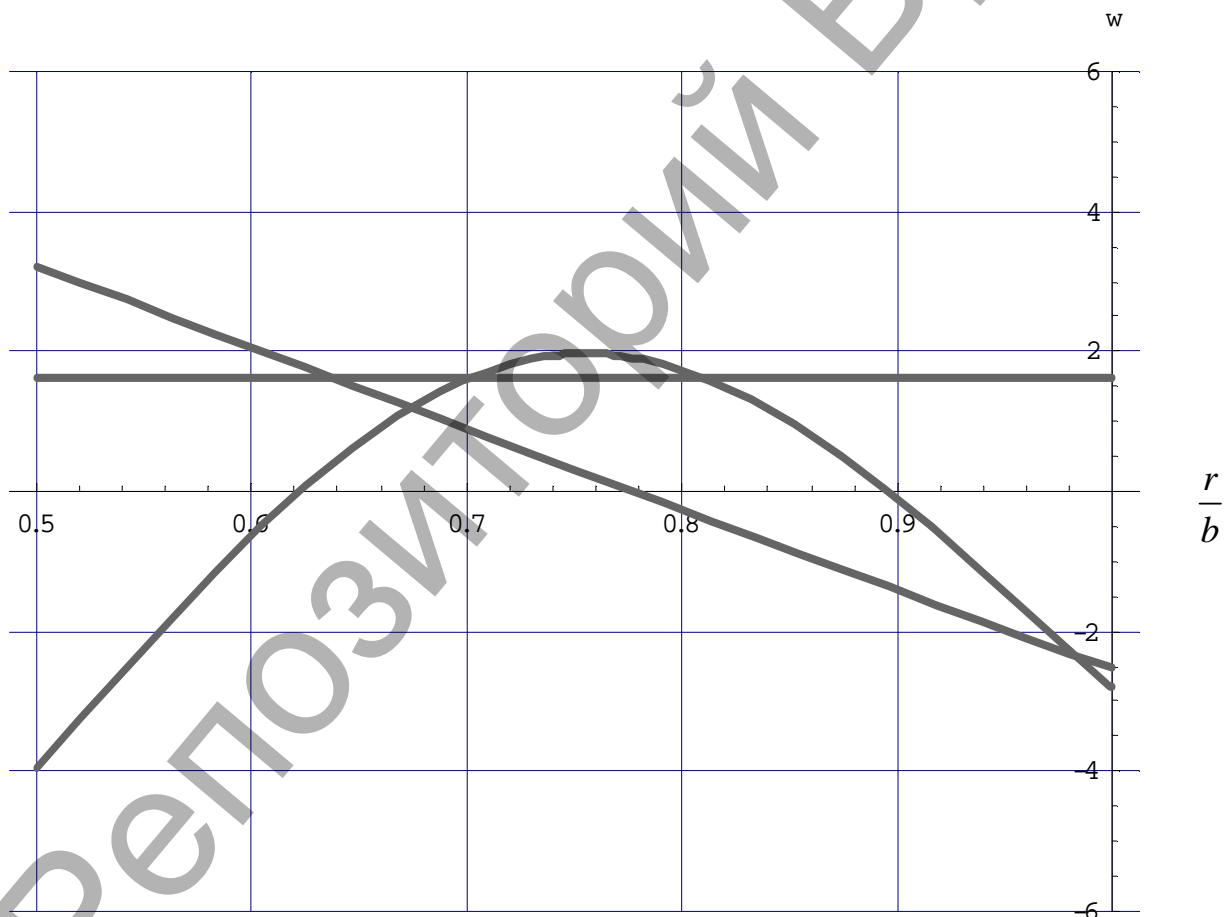


Рис. 1.7. Первые нормированные собственные функции для кольцевой

плиты при $\frac{a}{b} = 0.5$, $\nu_p = \frac{1}{6}$

Таким образом, полученные нормированные собственные функции для кольцевой плиты определяются выражениями (1.55) и (1.61).

§1.6. Пример расчета методом Ритца балки на упругом основании Винклера

Рассмотрим балку постоянной изгибной жесткости EI , лежащей на упругом основании Винклера, характеризующимся коэффициентом постели k , под действием сосредоточенной силы P (рис. 1.8). Выберем три варианта координатных функций и поэтапно проведем расчет этой балки методом Ритца с этими координатными функциями.

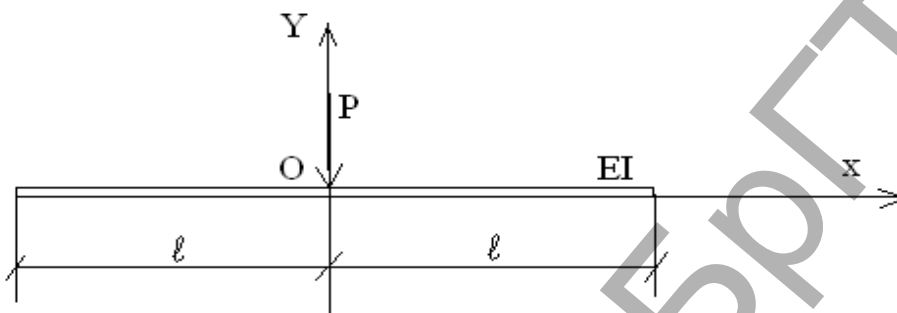


Рис. 1.8. Балка на основании Винклера с коэффициентом постели k

Последовательность этапов расчета дает алгоритм расчета балки методом Ритца. Собственным весом балки при вычислениях пренебрегаем.

Этап 1. Выбор координатных функций.

$$\text{Вариант а: } y(x) = A_0 + A_2 \frac{x^2}{\ell^2} + A_4 \frac{x^4}{\ell^4} \quad (1.62)$$

Эта система функций не удовлетворяет ни одному статическому граничному условию на концах балки.

$$\text{Вариант б: } y(x) = A_0 + A_1 \cos \frac{\pi x}{2\ell} + A_3 \cos \frac{3\pi x}{2\ell} \quad (1.63)$$

Эта система координатных функций удовлетворяет граничному условию для изгибающих моментов на концах балки.

Вариант в:

$$y(x) = A_1 \frac{1}{\sqrt{2}} + A_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{ch\lambda_2 \frac{x}{\ell} + \cos \lambda_2 \frac{x}{\ell}}{ch\lambda_2 + \cos \lambda_2} \right) + A_3 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{ch\lambda_3 \frac{x}{\ell} + \cos \lambda_3 \frac{x}{\ell}}{ch\lambda_3 + \cos \lambda_3} \right); \quad (1.64)$$

$$\lambda_2 = 2.365020; \quad \lambda_3 = 5.497804$$

Последняя система функций удовлетворяет всем статическим условиям задачи. В силу симметрии по x задачи, координатные функции всех вариантов выбраны четные, с одинаковым числом неизвестных коэффициентов.

Этап 2. Определяем энергию изгиба по формуле (1.14)

$$U = \frac{EI}{2} \int_{-\ell}^{\ell} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx \quad (1.65)$$

Этап 3. Определяем энергию деформаций упругого основания. Для основания Винклера [30]

$$A = \frac{k}{2} \int_{-\ell}^{\ell} y^2 dx \quad (1.66)$$

Этап 4. Определяем работу внешних сил

$$\text{Вариант а: } \Pi = -P \cdot A_0; \quad (1.67)$$

$$\text{Вариант б: } \Pi = -P (A_0 + A_1 + A_3); \quad (1.68)$$

$$\text{Вариант в: } \Pi = \frac{-P}{\sqrt{2}} \left[A_1 + A_2 \left(\frac{1}{ch\lambda_2} + \frac{1}{\cos\lambda_2} \right) + A_3 \left(\frac{1}{ch\lambda_3} + \frac{1}{\cos\lambda_3} \right) \right] \quad (1.69)$$

Этап 5. Составляем функционал полной энергии

$$\mathcal{E} = U + A + \Pi \quad (1.70)$$

и дифференцируем его по каждому из неизвестных коэффициентов A_i .
Получается система линейных алгебраических уравнений вида

$$[\lambda] \vec{A} = \vec{S}, \quad (1.71)$$

где для варианта а:

$$[\lambda] = k\ell \begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} + 8\beta & \frac{2}{7} + 16\beta \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{7} + 16\beta & \frac{2}{9} + 288\beta \end{bmatrix}; \quad (1.72)$$

$$\vec{A}^T = [A_0 \quad A_2 \quad A_4];$$

$$\vec{S}^T = P[1 \quad 0 \quad 0]; \quad \beta = \frac{EI}{k\ell^4}$$

Для варианта б:

$$[\lambda] = k\ell \begin{bmatrix} 2 & \frac{4}{\pi} & -\frac{4}{3\pi} \\ \frac{4}{\pi} & 1 + \frac{\pi^4}{16}\beta & 0 \\ -\frac{4}{3\pi} & 0 & 1 + \frac{81\pi^4}{16}\beta \end{bmatrix}; \quad (1.73)$$

$$\vec{A}^T = [A_0 \quad A_1 \quad A_3];$$

$$\vec{S}^T = P [1 \quad 1 \quad 1]$$

Для варианта в:

$$[\lambda] = k\ell \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 31.2853\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 913.602\beta \end{bmatrix}; \quad (1.74)$$

$$\vec{A}^T = [A_1 \quad A_2 \quad A_3];$$

$$\vec{S}^T = P [0.707 \quad -0.85959 \quad 1.00578]$$

Этап 6. По найденным в результате решения системы уравнений (1.71) коэффициентам $A_i (i=0,1,2,3,4)$ определяем прогибы балки (1.62-1.64) и внутренние усилия в ней по формулам

$$M(x) = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}; \quad (1.75)$$

$$Q(x) = -EI \frac{d^3 y}{dx^3}; \quad (1.76)$$

Не будем приводить формулы и результаты вычислений для прогибов и усилий. Ограничимся данными составленной таблицы 1.3, в которой приводятся величины для максимальных прогибов и изгибающих моментов в сечении балки при $x=0$. Принято $P=10\text{кН}$; $\ell=1\text{м}$; $k=50000\text{кН/м}^3$; $EI=10^6\text{кН м}^2$.

Таблица 1.3

Результаты расчета балки на основании Винклера для
трех вариантов

Номер варианта	а	б	в	Точное решение [34]
$Y_{\text{макс}}$ (м)	$1.00224 \cdot 10^{-4}$	$1.00246 \cdot 10^{-4}$	$1.00247 \cdot 10^{-4}$	$1.00250 \cdot 10^{-4}$
$M_{\text{макс}}$ (кНм)	1.56011	2.01577	2.05388	2.49723

Анализ данных таблицы 1.3 подтверждает два известных факта из теории метода Ритца:

– при выборе координатных функций нужно отдавать предпочтение ортогональной системе функций, удовлетворяющей всем граничным условиям рассматриваемой задачи. Это приводит к диагональной матрице коэффициентов при неизвестных (1.74) и лучшей сходимости результатов расчета;

– сходимость определения интегральных величин (в рассматриваемом примере - прогибы балки) значительно выше сходимости производных от них (в рассматриваемом примере - изгибающие моменты). Хотя в таблице не приводятся величины поперечных сил для какого-либо сечения балки, априори следует ожидать, что это сопоставление даст еще более худшую погрешность, чем при определении изгибающих моментов.

§1.7. Подход К. Ректориса

Процедуру расчета конструкции методом Ритца можно упростить, если использовать подход К. Ректориса. В монографии [25] он доказал теорему, в которой говорится следующее. Пусть дано уравнение

$$Au = f \quad (1.77)$$

где A - положительный оператор [20]. Это уравнение имеет решение u_0 .

$$Au_0 = f \quad (1.78)$$

Тогда квадратичный функционал

$$F u = (A u, u) - 2(f, u), \quad (1.79)$$

где $(u, v) = \int u v dx$ - скалярное произведение, принимает на u_0 минимальное значение, т.е.

$$F u \geq F u_0 \quad (1.80)$$

К. Ректорис формирует в общем виде систему уравнений для определения коэффициентов при координатных функциях (1.11-1.12). Если принять решение

$$u = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k,$$

то коэффициенты a_k найдутся из следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) & (A\varphi_1, \varphi_2) & \cdots & (A\varphi_1, \varphi_N) \\ (A\varphi_2, \varphi_1) & (A\varphi_2, \varphi_2) & \cdots & (A\varphi_2, \varphi_N) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (A\varphi_N, \varphi_1) & (A\varphi_N, \varphi_2) & \cdots & (A\varphi_N, \varphi_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f, \varphi_1) \\ (f, \varphi_2) \\ \vdots \\ (f, \varphi_N) \end{bmatrix} \quad (1.81)$$

Несмотря на внешнюю кажущуюся простоту реализации метода Ритца в подходе К. Ректориса, этот подход предъявляет более жесткие требования к выбору координатных функций. Положительность оператора A (1.77) сразу подразумевает его симметричность [20], то есть для двух принятых координатных функций u и v должно выполняться

$$(A u, v) = (u, A v),$$

что иногда затрудняет поиск координатных функций при реализации подхода К. Ректориса.

Для нашего случая стержня со свободными концами докажем симметричность оператора

$$(E I y'')'' \quad (1.82)$$

с граничными условиями для свободных концов стержня

$$y''(0) = y'''(0) = y''(l) = y'''(l) = 0$$

Последовательно находим

$$(Au, v) = \int_0^{\ell} (EIu''')' v dx = (EIu''')' v \Big|_0^{\ell} - \int_0^{\ell} (EIu''') v' dx = \left[(EI)' u'' + EIu''' \right] v \Big|_0^{\ell} - \int_0^{\ell} (EIu''') v' dx = -EIu'' v' \Big|_0^{\ell} + \int_0^{\ell} EIu'' v'' dx = \int_0^{\ell} EIu'' v'' dx;$$

Аналогично получаем:

$$(u, Av) = \int_0^{\ell} u'' EI v'' dx \quad (1.83)$$

Откуда следует симметрия оператора A .
Кроме того,

$$(Au, u) = \int_0^{\ell} EIu'' u'' dx > 0, \quad (1.84)$$

так как подынтегральное выражение является величиной, кратной энергии изгиба стержня. Рассмотрим оператор k из примера §1.6

$$(Au, v) = \int_0^{\ell} kuv dx = \int_0^{\ell} ukv dx = (u, Av) \quad , \quad (1.85)$$

т.е. оператор $\left(EI \frac{dy^4}{dx^4} + k \right)$ из разобранных выше примеров §1.6 положительно определенный.

Вернемся опять к примерам §1.6. Рассмотрим каждый вариант в отдельности и попробуем применить подход К. Ректориса.

Вариант а:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1; \\ \varphi_2 &= \frac{x^2}{\ell^2}; \\ \varphi_3 &= \frac{x^4}{\ell^4}. \end{aligned}$$

Вариант б:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1; \\ \varphi_2 &= \cos \frac{\pi x}{2\ell}; \\ \varphi_3 &= \cos \frac{3\pi x}{2\ell}. \end{aligned}$$

Вариант в:

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{ch\lambda_2 \frac{x}{\ell} + \cos\lambda_2 \frac{x}{\ell}}{ch\lambda_2 + \cos\lambda_2} \right);$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{ch\lambda_3 \frac{x}{\ell} + \cos\lambda_3 \frac{x}{\ell}}{ch\lambda_3 + \cos\lambda_3} \right).$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что для первых двух вариантов примера

$$(A\varphi_k, \varphi_i) \neq (\varphi_k, A\varphi_i), \quad i \neq k, \quad (1.86)$$

то есть нарушается условие симметричности оператора $\left(\frac{d^4 y}{dx^4} + k \right)$. И при

таком выборе координатных функций подход К. Ректориса неприменим (он формирует несимметричную систему уравнений метода Ритца).

В третьем варианте, следствие ортогональности собственных функций $\varphi_i (i=1, 2, \dots)$ реализация подхода К. Ректориса приводит к системе уравнений (1.74), так как

$$(A\varphi_i, \varphi_k) = (\varphi_i, A\varphi_k) = 0, \quad i \neq k \quad (1.87)$$

ГЛАВА 2. МЕТОД РИТЦА В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СТЕРЖНЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Ниже рассматриваются плоская и пространственная контактные задачи для изгибаемого стержня на упругом основании. При этом считается, что при решении плоской задачи функция Грина упругого основания допускает представление (В.1); в пространственном решении для стержня также справедливо соотношение (В.2) функции Грина упругого основания.

§ 2.1. Метод Ритца в плоской контактной задаче

Рассмотрим стержень, находящийся на упругом основании в условиях плоской задачи (рис. 2.1).

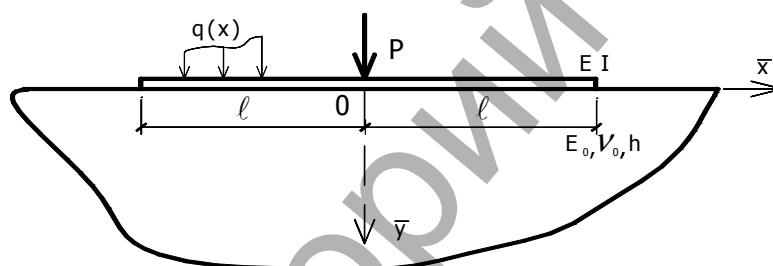


Рис. 2.1. Изгибаемый стержень на упругом основании

Заметим, что изгибная жесткость стержня в данном плоском случае имеет размерность “сила * перемещение”.

Принимаем прогибы стержня в виде (1.37) и (1.41)

$$y(x) = A_1 \frac{1}{\sqrt{2}} + B_1 x \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=2}^{\infty} A_i \left(\frac{ch\lambda_i x}{ch\lambda_i} + \frac{\cos \lambda_i x}{\cos \lambda_i} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=2}^{\infty} B_i \left(\frac{sh\mu_i x}{sh\mu_i} + \frac{\sin \mu_i x}{\sin \mu_i} \right), \quad (2.1)$$

где собственные числа λ_i и μ_i определены в § 1.3 и $x = \frac{\bar{x}}{\ell}$;

A_k, B_k - неизвестные коэффициенты ($k = 1, 2, \dots, n, \dots$).

Тогда энергия изгиба стержня определится выражением (1.1) и из условия ортогональности (2.1) принимает вид

$$U = \frac{EI}{2\ell^3} \sum_{i=2}^{\infty} (A_i^2 \lambda_i^4 + B_i^2 \mu_i^4) \quad (2.2)$$

Далее найдем распределение реактивных давлений в контактной зоне стержня, соответствующее его прогибам по i -ой координатной функции. Для этого решим интегральное уравнение

$$y_i(x) = \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \ell \int_{-1}^1 \left[-\ell n|x-\xi| + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} T_m(x) T_n(\xi) \right] \rho(\xi) d\xi; \quad (2.3)$$

$$y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} A_1 + \sqrt{\frac{3}{2}} B_1 x; \quad (2.4)$$

$$y_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[A_i \left(\frac{ch\lambda_i x}{ch\lambda_i} + \frac{\cos\lambda_i x}{\cos\lambda_i} \right) + B_i \left(\frac{sh\mu_i x}{sh\mu_i} + \frac{\sin\mu_i x}{\sin\mu_i} \right) \right]$$

Принимаем закон изменения реактивных давлений в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода [16] с весом

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sum_{k=0}^{\infty} H_k T_k(\xi), \quad (2.5)$$

где H_k - неизвестные коэффициенты.

Наша цель – выразить коэффициенты H_k разложения (2.5) через A_i и B_i . Это позволит составить функционал полной энергии как квадратичной функции неопределенных коэффициентов A_i и B_i (2.1). Подставим (2.5) в (2.3) и используем соотношение (B.3) и свойство ортогональности полиномов Чебышева первого рода [23] с весом

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(z) T_n(z)}{\sqrt{1-z^2}} dz = \begin{cases} \pi, & m=n=0; \\ \frac{\pi}{2}, & m=n; \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (2.6)$$

Получаем уравнение

$$y_i(x) = \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \ell \left\{ H_0 \left[\pi \ell n 2 + \pi \sum_{m=0}^{\infty} C_{m,0} T_m(x) \right] + H_1 \left[\pi T_1(x) + \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} C_{m,1} T_m(x) \right] + \right. \\ \left. H_2 \left[\frac{\pi}{2} T_2(x) + \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} C_{m,2} T_m(x) \right] + H_3 \left[\frac{\pi}{3} T_3(x) + \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} C_{m,3} T_m(x) \right] + \dots \right\} \quad (2.7)$$

Умножаем (2.7) на $\frac{T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ($n=0,1,2,\dots$) и интегрируем в пределах

$[-1,1]$. При этом используем значения следующих интегралов [16]

$$\begin{aligned} \int_0^1 T_{2n+1}(x) \sin ax \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= (-1)^n \frac{\pi}{2} J_{2n+1}(\alpha); \\ \int_0^1 T_{2n}(x) \cos ax \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= (-1)^n \frac{\pi}{2} J_{2n}(\alpha); \\ \int_0^1 T_{2n+1}(x) \operatorname{sh} ax \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{\pi}{2} I_{2n+1}(\alpha); \\ \int_0^1 T_{2n}(x) \operatorname{ch} ax \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{\pi}{2} I_{2n}(\alpha), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $J_k(z), I_k(z)$ - функции Бесселя действительного и мнимого аргумента [16].

В результате получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений следующего вида

$$[C] \vec{H} = [S]; \quad (2.9)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \ell n 2 + C_{00} & \frac{1}{2} C_{01} & \frac{1}{2} C_{02} & \frac{1}{2} C_{03} & \frac{1}{2} C_{04} \dots \\ \frac{1}{2} C_{10} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} C_{11} & \frac{1}{4} C_{12} & \frac{1}{4} C_{13} & \frac{1}{4} C_{14} \dots \\ \frac{1}{2} C_{20} & \frac{1}{4} C_{21} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4} C_{22} & \frac{1}{4} C_{23} & \frac{1}{4} C_{24} \dots \\ \frac{1}{2} C_{30} & \frac{1}{4} C_{31} & \frac{1}{4} C_{32} & \frac{1}{6} + \frac{1}{4} C_{33} & \frac{1}{4} C_{34} \dots \\ \dots & & & & \end{bmatrix}; \quad (2.10)$$

$$\left[\vec{H} \right]^T = [H_0 \ H_1 \ H_2 \ H_3 \dots]; \quad (2.11)$$

$$S_i = \frac{E_0}{2\ell(1-v_0^2)\sqrt{2}} \begin{bmatrix} A_i F_0(\lambda_i) & 0 \\ 0 & B_i G_1(\mu_i) \\ A_i F_2(\lambda_i) & 0 \\ 0 & B_i G_3(\mu_i) \\ A_i F_4(\lambda_i) & 0 \\ 0 & B_i G_5(\mu_i) \\ \dots & \end{bmatrix}; \quad (2.12)$$

$$F_{2n}(\lambda_i) = \frac{I_{2n}(\lambda_i)}{ch\lambda_i} + (-1)^n \frac{J_{2n}(\lambda_i)}{\cos\lambda_i}; \quad (2.13)$$

$$G_{2n+1}(\mu_i) = \frac{I_{2n+1}(\mu_i)}{sh\mu_i} + (-1)^n \frac{J_{2n+1}(\mu_i)}{\sin\mu_i}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Для $i=1$ (случай жесткого штампа) матрица свободных членов принимает вид

$$S = \frac{E_0}{2\ell(1-\nu_0^2)\sqrt{2}} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} B_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Решение бесконечной системы (2.9) можно представить в форме

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{E_0}{2\ell(1-\nu_0^2)\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_{1,2n+1} F_{2n}(\lambda_i) A_i + \alpha_{1,2n+2} G_{2n+1}(\mu_i) B_i] \\ H_1 &= \frac{E_0}{2\ell(1-\nu_0^2)\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_{2,2n+2} G_{2n+1}(\mu_i) B_i + \alpha_{2,2n+1} F_{2n}(\lambda_i) A_i] \\ H_2 &= \frac{E_0}{2\ell(1-\nu_0^2)\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_{3,2n+1} F_{2n}(\lambda_i) A_i + \alpha_{3,2n+2} G_{2n+1}(\mu_i) B_i] \\ H_3 &= \frac{E_0}{2\ell(1-\nu_0^2)\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_{4,2n+2} G_{2n+1}(\mu_i) B_i + \alpha_{4,2n+1} F_{2n}(\lambda_i) A_i] \\ &\dots \\ H_{2m} &= \frac{E_0}{2\ell(1-\nu_0^2)\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_{2m+1,2n+1} F_{2n}(\lambda_i) A_i + \alpha_{2m+2,2n+1} G_{2n+1}(\mu_i) B_i] \\ H_{2m+1} &= \frac{E_0}{2\ell(1-\nu_0^2)\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_{2m+2,2n+2} G_{2n+1}(\mu_i) B_i + \alpha_{2m+1,2n+1} F_{2n}(\lambda_i) A_i] \end{aligned} \quad (2.16)$$

Для $i=1$

$$H_m = \frac{E_0 \left(A_1 \alpha_{m+1,1} + B_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha_{m+1,2} \right)}{2\ell(1 - \nu_0^2)\sqrt{2}}. \quad (2.17)$$

В формулах (2.16) и (2.17) α_{ik} являются элементами обратной матрицы

$$[C]^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \\ \alpha_{41} & \alpha_{41} & \alpha_{41} & \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Очевидно, энергия деформаций упругого основания равна работе реактивных напряжений в контактной зоне стержня. Поэтому работа реактивных напряжений на прогибах, соответствующих i -ой координатной функции, выразится интегралом

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\ell}^{\ell} \rho(\bar{x}) y_i(\bar{x}) d\bar{x} &= \frac{1}{2} \ell \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=0}^{\infty} H_k T_k(x) \left[\frac{A_i}{\sqrt{2}} \left(\frac{ch\lambda_i x}{ch\lambda_i} + \frac{\cos\lambda_i x}{\cos\lambda_i} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{B_i}{\sqrt{2}} \left(\frac{sh\mu_i x}{sh\mu_i} + \frac{\sin\mu_i x}{\sin\mu_i} \right) \right] dx = \frac{\pi\ell}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left[H_{2k} A_i F_{2k}(\lambda_i) + H_{2k+1} B_i G_{2k+1}(\mu_i) \right], \\ &i=2,3,4,\dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$= \pi\ell \left(\frac{1}{\sqrt{2}} H_0 A_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} H_1 B_1 \right), \quad i=1.$$

Отметим, что в (2.19) первое слагаемое характеризует симметричную составляющую результата, второе – антисимметричную.

Работа внешней нагрузки $q(\bar{x})$

$$\Pi = - \int_{-\ell}^{\ell} q(\bar{x}) y(\bar{x}) d\bar{x}. \quad (2.20)$$

Таким образом, функционал полной энергии является суммой выражений (2.2), (2.19) с учетом всех координатных функций и (2.20).

$$\mathcal{E} = U + A + \Pi \quad (2.21)$$

Продифференцировав (2.21) по A_i и B_i ($i=1,2,\dots$), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений (2.1) следующего вида для симметричного нагружения

$$[\Delta]\bar{A} = \bar{S}, \quad (2.22)$$

где

$$\bar{A}^T = [A_1 \ A_2 \ A_3 \dots]; \quad \beta = \frac{\pi E_0 \ell^3}{(1-\nu_0^2)EI}$$

Отметим, что матрицу Δ легко сделать симметричной.

Вектор свободных членов имеет вид

- для симметрично приложенной сосредоточенной силы P

$$\bar{S}^T = \frac{P(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \left[\frac{8}{\sqrt{2}} \quad \frac{\beta}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_2} + \frac{1}{\cos \lambda_2} \right) \quad \frac{\beta}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_2} + \frac{1}{\cos \lambda_2} \right) \quad \dots \right]$$

- для равномерно – распределенной по всей балке нагрузки интенсивностью q

$$\bar{S}^T = q\ell\sqrt{2}[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots]$$

После решения усеченной системы (2.22) по формулам (2.16) находятся H_k , которые дают распределение реактивных давлений на контакте балки с упругим основанием.

§2.2. Контактная задача для штампа

Для штампа координатная функция включает два слагаемых (2.4)

$$y(x) = y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}A_1 + \sqrt{\frac{3}{2}}B_1x, \quad (2.23)$$

и функционал полной энергии (2.22) при

$$H_m = \frac{E_0}{2\ell(1-\nu_0^2)\sqrt{2}} \left(A_1\alpha_{m+1,1} + \frac{\sqrt{3}}{2}B_1\alpha_{m+1,2} \right), \quad (m=0,1);$$

$$\mathcal{E} = \frac{\pi E_0}{8(1-\nu_0^2)} \left[A_1^2\alpha_{11} + \frac{3}{4}B_1^2\alpha_{22} + \frac{\sqrt{3}}{2}A_1B_1(\alpha_{12} + \alpha_{21}) \right] - R\frac{1}{\sqrt{2}}A_1 - \frac{M}{\ell}\sqrt{\frac{3}{2}}B_1 \quad (2.24)$$

В (2.24) при определении работы внешней нагрузки считается, что главный вектор и главный момент внешней нагрузки равны соответственно R и M , причем равнодействующая R приложена к штампу в начале координат (рис. 2.1).

Система уравнений для определения A_1 и B_1 получается из (2.24) дифференцированием по A_1 , B_1 и имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2\alpha_{11} & \frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_{12} + \alpha_{21}) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_{12} + \alpha_{21}) & \frac{3}{2}\alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \frac{8(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 \sqrt{2}} \begin{bmatrix} R \\ \frac{M}{\ell} \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Рассмотрим случай упругой полуплоскости. В этом случае в (2.10) $C_{ik} = 0$ ($i \neq k$). Поэтому в (2.25)

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0. \quad (2.26)$$

и

$$A_1 = \frac{4(1-\nu_0^2)}{\alpha_{11} \pi E_0 \sqrt{2}} R; \quad B_1 = \frac{16(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 \sqrt{2}} \frac{M}{\ell} \frac{\sqrt{3}}{3\alpha_{22}} \quad (2.27)$$

По выражениям (2.17) определяем

$$H_0 = \frac{E_0}{2\ell(1-\nu_0^2)\sqrt{2}} \alpha_{11} A_1 = \frac{E_0 \alpha_{11}}{2\ell(1-\nu_0^2)\sqrt{2}} \frac{4(1-\nu_0^2)}{E_0 \alpha_{11} \pi E_0 \sqrt{2}} R = \frac{R}{\pi \ell}; \quad (2.28)$$

$$H_1 = \frac{E_0}{2\ell(1-\nu_0^2)\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha_{22} B_1 = \frac{E_0 \sqrt{3}}{2\ell(1-\nu_0^2)\sqrt{2}} \frac{\alpha_{22}}{2} \frac{8(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 \sqrt{2}} \frac{M}{\ell} \frac{2\sqrt{3}}{3\alpha_{22}} = \frac{2M}{\pi \ell^2},$$

что совпадает с решением П.И. Клубина [18]. Отметим, что в (2.27) A_1 характеризует относительное перемещение штампа, так как в случае упругой полуплоскости вертикальные перемещения определяются с точностью до некоторой постоянной.

§2.3. Пример 2.1. Контактная задача для штампа на упругом клине со свободными гранями

Решение этой задачи (рис. 2.2) имеется в книге [14].

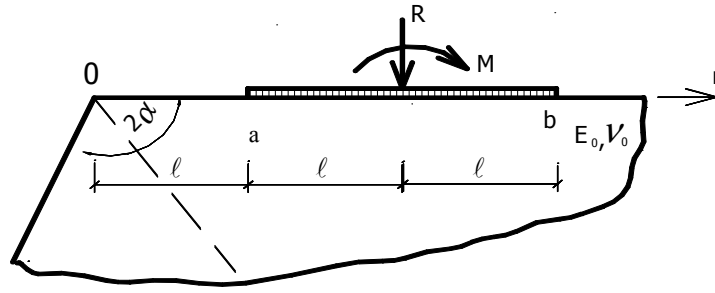


Рис. 2.2. Штамп на упругом плоском клине со свободными гранями

Вертикальные перемещения точки r грани клина $\theta = \alpha$ от действия вертикальной силы P , приложенной к той же грани в точке ρ , определяются выражением [14]

$$V(r) = \frac{2P(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \left\{ -\ln \left| \rho^{\pi\beta(\alpha)} - r^{\pi\beta(\alpha)} \right| + a_1 \frac{\pi}{8\alpha} \operatorname{sech} \left(\frac{\pi}{8\alpha} \ln \frac{\rho}{r} \right) + \right. \\ \left. a_2 \left[\operatorname{sech}^3 \left(\frac{\pi}{8\alpha} \ln \frac{\rho}{r} \right) - \left(\frac{\pi}{8\alpha} \right)^3 \frac{th^2 \left(\frac{\pi}{8\alpha} \ln \frac{\rho}{r} \right)}{ch \left(\frac{\pi}{8\alpha} \ln \frac{\rho}{r} \right)} + \dots \right] \right\}; \quad (2.29)$$

$$\beta(\alpha) = \frac{4\alpha + \sin 4\alpha}{2(4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha)};$$

$$a_1 = \frac{32a^3}{3(4a^2 - \sin^2 2\alpha)} - \frac{4(4a^2 - \sin^2 2\alpha)}{3(4a + \sin 4\alpha)} - \frac{16a^4(4a + \sin 4\alpha)}{3(4a^2 - \sin^2 2\alpha)^2};$$

$$a_2 = -\frac{512a^7}{9(4a^2 - \sin^2 2\alpha)^2} + \frac{128a^5}{15(4a^2 - \sin^2 2\alpha)} + \frac{16(4a^2 - \sin^2 2\alpha)^3}{45(4a + \sin 4\alpha)^3} +$$

$$+ \frac{\left(\frac{256a^5}{9(4a^2 - \sin^2 2\alpha)^2} - \frac{128a^6}{45(4a^2 - \sin^2 2\alpha)} \right) (4a + \sin 4\alpha)}{4a^2 - \sin^2 2\alpha} +$$

$$+ 8a^2 \left(\frac{32a^3}{3(4a^2 - \sin^2 2\alpha)} - \frac{4(4a^2 - \sin^2 2\alpha)}{3(4a + \sin 4\alpha)} - \frac{16a^4(4a + \sin 4\alpha)}{3(4a^2 - \sin^2 2\alpha)^2} \right);$$

В (2.29) сделаем подстановку [14]

$$x = \lambda \ln \frac{r}{b} - 1; \quad \xi = \lambda \ln \frac{\rho}{b} - 1; \quad \lambda = \frac{2}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Тогда получим

$$V(x) = \frac{2P(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \left\{ -\ln \left| be^{\frac{1+\xi}{\lambda}} - be^{\frac{1+x}{\lambda}} \right| + a_1 \frac{\pi}{8\alpha} \operatorname{sech} \frac{\xi-x}{8\lambda\alpha} + \dots \right.$$

Представим [16]

$$\begin{aligned} \ln \left| b \left(e^{\frac{1+\xi}{\lambda}} - e^{\frac{1+x}{\lambda}} \right) \right| &= \ln b + \ln \left(\frac{1+x}{\lambda} - \frac{1+\xi}{\lambda} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1+\xi+1+x}{\lambda} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{\left(\frac{x-\xi}{\lambda} \right)^2}{4k^2\pi^2} \right] = \\ &= \ln b - \ln \frac{x-\xi}{\lambda} + \frac{\xi+x+2}{2\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(x-\xi)^2}{4\lambda^2\pi^2 k^2} \right] + a_1 \frac{\pi}{8\alpha} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\xi-x}{8\lambda\alpha}} + \dots \end{aligned} \quad (2.30)$$

Отметим, что в (2.30) величина $\ln b$ не влияет на распределение реактивных давлений в контактной зоне стержня. Так же заметим, что x и ξ - величины безразмерные, меняющие в пределах $[-1, 1]$.

Разложим третье и четвертое слагаемые (2.30) в двойной ряд по полиномам Чебышева первого рода с весом

$$\frac{\xi+x+2}{2\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(x-\xi)^2}{4\lambda^2\pi^2 k^2} \right] + a_1 \frac{\pi}{8\alpha} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\xi-x}{8\lambda\alpha}} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn}(\lambda) T_m(x) T_n(\xi), \quad (2.31)$$

где

$$C_{mn}(\lambda) = \beta \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{a_1 \pi}{8\alpha \operatorname{ch} \frac{\xi-x}{8\lambda\alpha}} + \frac{\xi+x+2}{2\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(x-\xi)^2}{4\lambda^2\pi^2 k^2} \right] \right\} \frac{T_m(x) T_n(\xi)}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\xi^2}} dx d\xi;$$

$$\beta = \frac{1}{\pi^2}, \quad m = n = 0;$$

$$\beta = \frac{2}{\pi^2}, \quad m = 0, n > 0 \text{ или } n = 0, m > 0; \quad (2.32)$$

$$\beta = \frac{4}{\pi^2}, \quad m, n > 0$$

Элементы матрицы $[C]$ (2.10), зависящие от (2.32), сформированы с помощью квадратурной формулы по узлам полиномов Чебышева первого рода [3]

$$\int_{-1}^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{i=1}^n W_i f(x_i); \quad (2.33)$$

$$x_i = \cos \frac{2i-1}{2n} \pi; \quad W_i = \frac{\pi}{n}$$

и приведены ниже для $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $a = 1\ell$; $b = 3\ell$; $\lambda = 1.82048$; $a_1 = 0.27164$; $a_2 = -0.28116$.

$$[C] = \begin{vmatrix} -0.908284 & 0.923646 & -0.114431 & 0 & 0.000554\dots \\ 0.923646 & -1.88293 & 0 & -0.001271 & 0 \\ -0.114431 & 0 & -0.998046 & 0 & -0.000045 \\ 0 & -0.001271 & 0 & -0.666605 & 0 \\ 0.000554 & 0 & -0.000045 & 0 & -0.499998 \\ \dots & & & & \end{vmatrix} \quad (2.34)$$

Обратная матрица (в 2.35 оставлены только необходимые элементы)

$$[\alpha] = \begin{vmatrix} -2.26203 & -1.10961 & 0.25935 & 0.00212\dots \\ -1.10961 & -1.07539 & 0.12722 & 0.00205 \\ 0.25935 & 0.12722 & -1.03169 & -0.00024 \\ 0.00212 & 0.00205 & -0.00024 & -1.50014 \\ \dots & \dots & & \\ \dots & & & \end{vmatrix} \quad (2.35)$$

и по (2.25) находим

$$A_1 = \frac{8(1-v_0^2)}{\pi E_0 \sqrt{2}} (0.92365 M - 0.44758 R);$$

$$B_1 = \frac{8(1-v_0^2)}{\pi E_0 \sqrt{2}} \left(-2.17422 \frac{M}{\ell} + 0.53327 R \right) \quad (2.36)$$

Тогда на основании (2.17) получаем

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{E_0}{2\ell(1-\nu_0^2)\sqrt{2}} \left(\alpha_{1,1}A_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_{1,2}B_1 \right) = 0.31831 \frac{R}{\ell}; \\ H_1 &= \frac{E_0}{2\ell(1-\nu_0^2)\sqrt{2}} \left(\alpha_{2,1}A_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_{2,2}B_1 \right) = 0.63662 \frac{M}{\ell^2}; \\ H_2 &= \frac{E_0}{2\ell(1-\nu_0^2)\sqrt{2}} \left(\alpha_{3,1}A_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_{3,2}B_1 \right) = -0.03650 \frac{R}{\ell}; \end{aligned} \quad (2.37)$$

Угол поворота штампа определится через B_1

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy_1}{dx} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{B_1}{\ell} = \frac{(1-\nu_0^2)}{E_0\ell^2} (1.17602 R\ell - 4.79484 M) \quad (2.38)$$

Теперь проверим выполнение теоремы о взаимности перемещений. Угол поворота штампа от действия силы $R=1$ равен

$$\varphi_p = 0.53327 \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(R=1)(1-\nu_0^2)}{E_0\ell} = 0.92318 \frac{(R=1)(1-\nu_0^2)}{E_0\ell\sqrt{2}};$$

Линейное перемещение штампа от действия момента M

$$u_M = 0.92365 \frac{(M=1)(1-\nu_0^2)}{E_0\ell\sqrt{2}}$$

Также определим положение силы R на штампе, вызывающее его поступательное перемещение. Обозначим e - расстояние от оси штампа до точки приложения силы. Тогда, очевидно, $M = Re$ и

$$\varphi = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{8(1-\nu_0^2)}{\pi E_0\sqrt{2}} \left(-2.17422 \frac{(M=Re)}{\ell} + 0.53327 R \right) = 0$$

Отсюда

$$\frac{e}{\ell} = \frac{0.53327}{2.17422} = 0.24527$$

По монографии [14]

$$\frac{e}{\ell} = \sqrt{ab} P_{\frac{1}{\pi B}} \left(ch \frac{\pi B}{\lambda} \right) - \frac{a+b}{2} = 0.27685, \quad B = \frac{1}{2} \frac{4\alpha + \sin 4\alpha}{4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha}$$

Различие следует объяснить тем, что авторы [14] при определении $\frac{e}{\ell}$ использовали только сингулярное слагаемое разложения (2.29).

§ 2.4. Пример 2.2. Контактная задача для стержня на упругой полосе

Стержень изгибной жесткостью EI находится на упругой полосе $h = \ell$, жестко соединенной с недеформируемым основанием (рис.2.3). Вертикальные перемещения точки \bar{x} полосы, от действия единичной силы, приложенной в начале координат, определяется формулой [14]

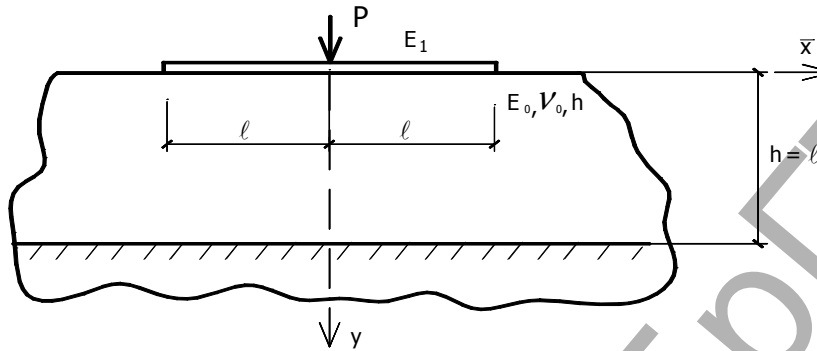


Рис. 2.3. Стержень на упругой полосе

$$K(x) = \frac{2P(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \int_0^\infty L(u, \nu_0) \cos\left(u \frac{\bar{x}}{h}\right) \frac{du}{u}, \quad (2.39)$$

$$L(u, \nu_0) = \frac{2\chi sh2u - 4u}{2\chi ch2u + \chi^2 + 1 + 4u}; \quad \chi = 3 - 4\nu_0.$$

В отличие от предыдущего примера, где для определения коэффициентов $C_{mn}\left(\nu_0, \frac{h}{\ell}\right)$ разложения (2.3) использовалась квадратурная формула по узлам соответствующих полиномов Чебышева, здесь получим точные формулы. Очевидно, перемещения точки \bar{x} поверхности полосы от действия силы, приложенной в точке $\bar{\xi}$ поверхности полосы, выразятся формулой

$$K(x, \xi) = \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \int_0^\infty L(u, \nu_0) \cos\left(u \frac{\bar{x} - \bar{\xi}}{h}\right) \frac{du}{u} \quad (2.40)$$

Представим $\left(x = \frac{\bar{x}}{\ell}; \quad \xi = \frac{\bar{\xi}}{\ell}; \quad \lambda = \frac{\ell}{h}\right)$

$$\int_0^\infty L(u, \nu_0) \cos(u\lambda(x - \xi)) \frac{du}{u} = -\ell n\lambda(x - \xi) + \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty C_{mn}(\lambda, \nu_0) T_m(x) T_n(\xi), \quad (2.41)$$

где

$$C_{mn}(\lambda, \nu_0) = \beta_{mn} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\int_0^\infty L(u, \nu_0) \cos(u\lambda(x - \xi)) \frac{du}{u} \right] \frac{T_m(x) T_n(\xi)}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\xi^2}} dx d\xi;$$

$$\begin{aligned} \text{при } m = n = 0: \quad \beta_{mn} &= \frac{1}{\pi^2}; \\ m = 0; \quad n \neq 0; \\ m \neq 0; \quad n = 0: \quad \beta_{mn} &= \frac{2}{\pi^2}; \\ m \neq n \neq 0: \quad \beta_{mn} &= \frac{4}{\pi^2} \end{aligned}$$

Так же, как [16], в (2.8)

$$\cos(u\lambda(x - \xi)) = \cos(ux\lambda)\cos(u\xi\lambda) + \sin(ux\lambda)\sin(u\xi\lambda);$$

$$\int_{-1}^1 \cos(ux\lambda) \frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi(-1)^{\frac{m}{2}} J_m(u\lambda), \quad m - \text{четное};$$

$$= 0, \quad m - \text{нечетное};$$

$$\int_{-1}^1 \sin(ux\lambda) \frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0, \quad m - \text{четное};$$

$$= \pi(-1)^{\frac{m-1}{2}} J_m(u\lambda), \quad m - \text{нечетное},$$

то после интегрирования находим

$$C_{00}(\lambda, \nu_0) = -\ell n 2\lambda + \int_0^{\infty} L(u, \nu_0) J_0^2(u\lambda) \frac{du}{u};$$

$$C_{0k}(\lambda, \nu_0) = 2(-1)^{\frac{k}{2}} \int_0^{\infty} L(u, \nu_0) J_0(u\lambda) J_k(u\lambda) \frac{du}{u}, \quad k - \text{четное};$$

$$= 0, \quad k - \text{нечетное}; \quad (2.42)$$

$$C_{ik}(\lambda, \nu_0) = 4(-1)^{\frac{i+k}{2}} \int_0^{\infty} L(u, \nu_0) J_i(u\lambda) J_k(u\lambda) \frac{du}{u},$$

причем i и k одновременно либо четные либо нечетные;

$$C_{ik}(\lambda, \nu_0) = 0, \quad \text{если } i - k = \text{нечетному числу};$$

$$C_{ii}(\lambda, \nu_0) = -\frac{2}{i} + 4 \int_0^{\infty} L(u, \nu_0) J_i^2(u\lambda) \frac{du}{u}$$

Формулы (2.42) легко обосновать, если заметить, что

$$\cos a(x - \xi) = \cos a(\xi - x)$$

Поэтому разложение (2.42) будет включать суммы только по четным и только по нечетным полиномам Чебышева первого рода.

Далее принимаем [13]

$$L(u, v_0) = 1 - e^{-2u} + a_1 u e^{-2u} + a_2 u^2 e^{-2u} + \dots, \quad (2.43)$$

$$\text{где } a_1 = -\frac{2(3+\chi^2)}{(1+\chi)^2}; \quad a_2 = -\frac{2(5-2\chi+\chi^2)}{(1+\chi)^2};$$

$$a_3 = -\frac{4(13\chi-5-5\chi^2+\chi^3)}{3(1+\chi)^3}; \quad a_4 = -\frac{2(\chi-3)(13-10\chi+\chi^2)}{3(1+\chi)^3};$$

.....

$$\chi = 3 - 4v_0$$

Представление (2.43) позволяет выполнить интегрирование по u в несобственных интегралах (2.42) с помощью пакета символьной математики

$$C_{00}(\lambda, v_0) = \ln 2 + \frac{\lambda^2}{8} {}_4F_3\left(1, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2, 2, 2; -\lambda^2\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(k)}{2^k} {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{k}{2}, \frac{k}{2}; 1, 1; -\lambda^2\right);$$

$$C_{0,2i}(\lambda, v_0) = -\frac{1}{2^{1+4i} i} {}_4F_3\left(i, \frac{1}{2} + i, \frac{1}{2} + i, 1 + i; 1, 1 + 2i, 1 + 2i; -\lambda^2\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{1}{2^{4i+k} \Gamma(1+2i)} {}_4F_3\left(\frac{1}{2} + i, 1 + i, i + \frac{k}{2}, \frac{1}{2} + i + \frac{k}{2}; 1, 1 + 2i, 1 + 2i; -\lambda^2\right);$$

$$C_{mn}(\lambda, v_0) = -\frac{1}{m!n!} \left[\frac{\lambda^{\frac{m+n}{2}}}{2^{2m+2n}} {}_4F_3\left(\frac{m+n}{2}, \frac{m+n+1}{2}, \frac{m+n+1}{2}, \frac{m+n+2}{2}; 1+m, 1+n, 1+m+n; -\lambda^2\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\lambda^{\frac{m+n}{2}} \Gamma(k+m+n)}{2^{k+2m+2n}} {}_4F_3\left(\frac{m+n+1}{2}, \frac{m+n+2}{2}, \frac{k+m+n}{2}, \frac{1+k+m+n}{2}; 1+m, 1+n, 1+m+n; -\lambda^2\right) \right]; \quad (2.44)$$

$$C_{mm}(\lambda, v_0) = \frac{1}{2m} - \frac{\Gamma(2m)\lambda^{2m}}{2^{4m}(m!)^2} {}_3F_2\left(m, m + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}; 1+m, 1+2m; -\lambda^2\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(k+2m)\lambda^{2m}}{2^{k+4m}(m!)^2} {}_3F_2\left(\frac{1}{2} + m, \frac{k}{2} + m, \frac{1}{2} + \frac{k}{2} + m; 1+m, 1+2m; -\lambda^2\right)$$

Формулы (2.44) позволяют упростить численную процедуру определения коэффициентов разложения (2.41).

Переходим к решению примера для $v_0 = \frac{1}{3}$ и $\beta = 10$. Последовательно находим: $a_1 = -1.62500$; $a_2 = -1.25000$;

$$a_3 = -0.52083; \quad a_4 = -0.04167; \quad a_5 = 0.02240; \quad \dots$$

В силу симметричности нагрузки разложение (2.41) будет включать только четные индексы при C_{mn} .

$$C = \begin{bmatrix} 0.64902 & 0.08200 & 0.00120 & -0.00051 & \dots \\ 0.08200 & 0.18932 & 0.00096 & -0.00081 & \dots \\ 0.00120 & 0.00096 & 0.12167 & 0.00052 & \dots \\ -0.00051 & -0.00081 & 0.00052 & 0.08322 & \dots \\ \dots & & & & \dots \end{bmatrix};$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1.63017 & -0.70810 & 0.03999 & -0.00292 & \dots \\ -0.70810 & 5.61115 & -0.43798 & 0.05287 & \dots \\ 0.03999 & -0.43798 & 8.25354 & -0.05520 & \dots \\ -0.00292 & 0.05287 & -0.05520 & 12.0000 & \dots \\ \dots & & & & \dots \end{bmatrix};$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 3.26033 & 0.57202 & 0.58697 & 0.49430 & \dots \\ 0.71502 & 40.0707 & 2.91489 & 2.47250 & \dots \\ 0.73371 & 2.91489 & 925.684 & 3.05810 & \dots \\ 0.61788 & 2.47250 & 3.0581 & 5587.91 & \dots \\ \dots & & & & \dots \end{bmatrix}$$

и

$$H_0 = 1.00000 \frac{P}{\pi \ell}; \quad A_1 = 1.77674 \frac{P(1-v_0^2)}{\pi E_0};$$

$$H_2 = -0.80064 \frac{P}{\pi \ell}; \quad A_2 = -0.24688 \frac{P(1-v_0^2)}{\pi E_0};$$

$$H_4 = 0.11796 \frac{P}{\pi \ell}; \quad A_3 = 0.01024 \frac{P(1-v_0^2)}{\pi E_0};$$

$$H_6 = -0.02113 \frac{P}{\pi \ell}; \quad A_4 = -0.00188 \frac{P}{\pi E_0};$$

$$H_8 = 0.00748 \frac{P}{\pi \ell}; \quad A_5 = 0.00049 \frac{P(1-v_0^2)}{\pi E_0};$$

...

Отметим, что из уравнений равновесия также следует $H_0 = \frac{P}{\pi \ell}$. За-

метим также, что примененный в настоящем параграфе подход вычисления коэффициентов C_{mn} разложения (2.41) по точным формулам может быть также использован в рассмотренной выше контактной задаче для клиновидного основания.

Для проверки найдем осадку штампа. По таблице 7 [14] осадка плоского штампа при $\nu = 0.3$ и $\frac{h}{\ell} = 1$

$$\delta = 0.362 \frac{P(1 - \nu_0^2)}{E_0}$$

У нас получено для $\nu_0 = \frac{1}{3}$ (от величины коэффициента Пуассона полюсы зависят коэффициенты разложения (2.43))

$$\delta = \frac{A_1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\pi \alpha_{1,1}} \frac{P(1 - \nu_0^2)}{E_0} = 0.391 \frac{P(1 - \nu_0^2)}{E_0}$$

§2.5 Пространственная контактная задача для стержня

Решим вспомогательное интегральное уравнение контактной задачи для стержня на линейно деформируемом основании [26], изогнутого по форме (2.1)

$$y_i(x) = \int_{-b}^b \int_{-\ell}^{\ell} p(\xi, \eta) K(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (2.45)$$

где $2l, 2b$ – линейные размеры стержня в зоне контакта;

$K(x - \xi, y - \eta)$ – ядро интегрального уравнения.

Для закона распределения контактных напряжений $p(\xi, \eta)$ ввиду отсутствия изгиба стержня в поперечном направлении [15] принимаем

$$p(\xi, \eta) = \frac{p(\xi)}{\sqrt{1 - \frac{\eta^2}{b^2}}} \quad (2.46)$$

Тогда, очевидно, уравнение (2.45) будет справедливо при любых y , и поэтому

$$y_i(x) = \int_{-b}^b \int_{-\ell}^{\ell} \frac{p(\xi)}{\sqrt{1 - \frac{\eta^2}{b^2}}} K(x - \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.47)$$

Будем считать, что модель упругого основания позволяет из ядра интегрального уравнения (2.47) выделить решение Буссинеска [14]

$$K(x - \xi, \eta) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E h} \left[\frac{h}{R} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} D_{mn}^i T_m \left(\frac{x}{\ell} \right) T_n \left(\frac{\xi}{\ell} \right) T_i \left(\frac{\eta}{b} \right) \right];$$

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + \eta^2} \quad (2.48)$$

где $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$ – полином Чебышева первого рода;
 h – некоторый линейный размер.

После интегрирования по η (2.47) с учетом (2.48), получаем

$$y_i(x) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E} \ell \int_{-1}^1 \left[2 \frac{K \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 (t - z)^2 + 1}} \right)}{\sqrt{\alpha^2 (t - z)^2 + 1}} + \right. \\ \left. \frac{\pi b}{h} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} D_{mn}^0 T_m(t) T_n(z) p(z) \right] dz; \quad t = \frac{x}{\ell}; \quad z = \frac{\xi}{\ell}; \quad \alpha = \frac{\ell}{b}, \quad (2.49)$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл [16].

Согласно способу ортогональных многочленов [26] принимаем

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \sum_{k=0}^{\infty} H_k T_k(z) \quad (2.50)$$

и разлагаем

$$\frac{K \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 (t - z)^2 + 1}} \right)}{\sqrt{\alpha^2 (t - z)^2 + 1}} = -\ln|t - z| + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} T_m(t) T_n(z) \quad (2.51)$$

Подставляем (2.50) и (2.51) в (2.49) и после интегрирования по z получаем уравнение

$$y_i(x) = 2 \frac{1 - v_0^2}{\pi E} \ell \left\{ \pi \ln 2 H_0 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} H_k T_k(t) + \pi H_0 \sum_{m=0}^{\infty} C_{m0} T_m(t) + \right. \\ \left. \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} H_k C_{mk} T_m(t) + \frac{\pi}{2} \left[\pi H_0 \sum_{m=0}^{\infty} D_{m0}^0 T_m(t) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} D_{mk}^0 H_k T_m(t) \right] \right\} \quad (2.52)$$

При выводе равенства (2.52) использовано спектральное соотношение (B.3)

$$\int_{-1}^1 \ln|x-z| \frac{T_n(z)}{\sqrt{1-z^2}} dz = -\pi \ln 2, \quad n=0; \\ -\frac{\pi}{n} T_n(x), \quad n=1, 2, 3, \dots$$

и свойство ортогональности принятых полиномов Чебышева (2.7)

$$\int_{-1}^1 \frac{T_k(\xi) T_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \pi, \quad k=n=0; \\ = \frac{\pi}{2}, \quad k=n \geq 1; \\ = 0, \quad k \neq n.$$

К (2.52) применим стандартную процедуру способа ортогональных многочленов. Умножим обе части равенства (2.52) на $T_j(t)/\sqrt{1-t^2} dt$ ($j=0,1,2,\dots$) и проинтегрируем в пределах $(-1,+1)$. Получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных H_k ($k=0,1,2,\dots$), которую можно решать способом усечения [26]. В матричной форме решение усеченной системы можно представить так

$$[H^i] = \frac{E}{2(1-v_0^2)\ell} [\alpha] [S_i], \quad (2.53)$$

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \ln 2 + C_{00} + \frac{\pi}{2} D_{00}^0 & \frac{1}{2} C_{01} + \frac{\pi}{4} D_{01}^0 & \frac{1}{2} C_{02} + \frac{\pi}{4} D_{02}^0 \dots \\ \frac{1}{2} C_{10} + \frac{\pi}{4} D_{10}^0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} C_{11} + \frac{\pi}{8} D_{11}^0 & \frac{1}{4} C_{12} + \frac{\pi}{8} D_{12}^0 \dots \\ \frac{1}{2} C_{20} + \frac{\pi}{4} D_{20}^0 & \frac{1}{4} C_{21} + \frac{\pi}{8} D_{21}^0 & \frac{1}{4} + \frac{1}{4} C_{22} + \frac{\pi}{8} D_{22}^0 \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}^{-1};$$

$$[H^i]^T = [H_0^i \quad H_1^i \quad H_2^i \quad H_3^i \quad \dots];$$

$$[S_i]^T = [S_i^1 \quad S_i^2 \quad S_i^3 \quad S_i^4 \dots];$$

$$S_i^k = A_i F_{2k-2,i} + B_i G_{2k-1,i}; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$F_{m,n} = \left[\frac{I_m(\lambda_n)}{ch\lambda_n} + (-1)^m \frac{J_m(\lambda_n)}{\cos \lambda_n} \right];$$

$$G_{m,n} = \left[\frac{I_m(\mu_n)}{sh\mu_n} + (-1)^m \frac{J_m(\mu_n)}{\sin \mu_n} \right],$$

где $J_k(z), I_k(z)$ – функции Бесселя [16].

Здесь использованы значения интегралов (2.8).

Если левая часть уравнения (2.47) будет иметь вид (2.1), то

$$[H] = [H_0 \quad H_1 \quad H_2 \quad \dots] = \begin{bmatrix} H_0^1 & H_0^2 & H_0^3 & \dots \\ H_1^1 & H_1^2 & H_1^3 & \dots \\ H_2^1 & H_2^2 & H_2^3 & \dots \\ H_3^1 & H_3^2 & H_3^3 & \dots \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

где верхний индекс при H показывает номер координатной функции, а нижний значок – степень полинома Чебышева.

Поэтому, окончательно,

$$H_{2m} = \frac{E}{(1-\nu_0^2)\ell\sqrt{2}} \left[\alpha_{2m+1,1} A_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{2m+1,2k+1} F_{2k,i} A_i \right]; \quad (2.55)$$

$$H_{2m+1} = \frac{E}{(1-\nu_0^2)\ell\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \alpha_{2m+2,2} B_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{2m+2,2k+2} G_{2k+1,i} B_i \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Найдем теперь энергию деформаций упругого основания. Как и в работе [39], будем ее определять работой реактивных напряжений (2.46) и (2.50) на осадках основания (2.1), то есть

$$A = \frac{1}{2} \int_{-b}^b \int_{-\ell}^{\ell} y(\bar{x}) \frac{p(\bar{x})}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}} dy d\bar{x} = \quad (2.56)$$

$$\frac{\pi^2 b \ell}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (H_{2m} A_i F_{2m,i} + H_{2m+1} B_i G_{2m+1,i})$$

При получении (2.56) также использованы формулы (1.8). Работа внешней нагрузки $q(x, y)$ на прогибах стержня $y(x)$

$$\Pi = - \int_{-b}^b \int_{-\ell}^{\ell} q(x, y) y(x) dx dy \quad (2.57)$$

Функционал полной энергии для рассматриваемой задачи

$$\mathfrak{E} = U + A + \Pi \quad (2.58)$$

и после вычислений

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = & \frac{EI}{2\ell^3} \sum_{i=1}^{\infty} (A_i^2 \lambda_i^4 + B_i^2 \mu_i^4) + \\ & \frac{\pi^2 E b}{4(1 - \nu_0^2)} \left[\alpha_{11} A_1^2 + \frac{3}{4} \alpha_{22} B_1^2 + A_1 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{1,2k+1} F_{2k,i} A_i + \right. \\ & \frac{\sqrt{3}}{2} B_1 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{2,2k+2} G_{2k+1,i} B_i + \\ & A_1 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{2m+1,1} F_{2m,i} A_i + \frac{\sqrt{3}}{2} B_1 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{2m+2,2} G_{2k+1,i} B_i + \\ & \left. \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} F_{2m,i} A_i \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_{2m+1,2k+1} F_{2k,n} A_n + \right. \\ & \left. \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} G_{2m+1,i} B_i \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_{2m+2,2k+2} G_{2k+1,n} B_n \right] + \Pi \quad (2.59) \end{aligned}$$

и является квадратичной функцией коэффициентов A_m, B_m ($m=1,2,3,\dots$).

Продифференцируем (2.59) по каждому из коэффициентов A_m, B_m ($m=1,2,3,\dots$). Получаем систему линейных алгебраических уравнений вида (2.22), решение которой позволяет определить перемещения стержня. В системе естественным образом возникает безразмерная величина

$$\beta = \frac{E \ell^3 b}{(1 - \nu_0^2) EI} - \text{показатель гибкости [15], характеризующий упругие свойства}$$

системы стержень-основание. Для случая симметричного действия нагрузки матрица Δ подобна (2.22), для антисимметричного имеет вид (2.60).

$$\Delta = \begin{bmatrix}
\frac{3}{2} \alpha_{2,2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_{2,2k+2} + \alpha_{2k+2,2}) G_{2k+1}(\mu_2) & \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_{2,2k+2} + \alpha_{2k+2,2}) G_{2k+1}(\mu_3) & \dots \\
\frac{\pi}{4} \beta \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_{2,2k+2} + \alpha_{2k+2,2}) G_{2k+1}(\mu_2) & \mu_2^4 + \frac{\pi}{2} \beta \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} G_{2m+1}(\mu_2) \cdot G_{2k+1}(\mu_2) \alpha_{2m+2,2k+1} & \frac{\pi}{4} \beta \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [G_{2m+1}(\mu_2) G_{2k+1}(\mu_3) + G_{2k+1}(\mu_2) G_{2m+1}(\mu_3)] \alpha_{2m+2,2k+2} & \dots \\
\frac{\pi}{4} \beta \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_{2,2k+2} + \alpha_{2k+2,2}) G_{2k+1}(\mu_3) & \frac{\pi}{4} \beta \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [G_{2m+1}(\mu_3) G_{2k+1}(\mu_2) + G_{2k+1}(\mu_3) G_{2m+1}(\mu_2)] \alpha_{2m+1,2k+2} & \mu_3^4 + \frac{\pi}{2} \beta \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} G_{2m+1}(\mu_3) G_{2k+1}(\mu_3) \cdot \alpha_{2m+2,2k+1} & \dots \\
\dots & & & \dots
\end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Вектор свободных членов будет определяться видом внешней нагрузки.

Отдельно рассмотрим случай жесткого узкого прямоугольного штампа.

Для $\beta = 0$ матрица Δ (2.22) и вектор свободных членов становятся

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2\alpha_{11} & * & * & \dots \\ 0 & * & 0 & \dots \\ 0 & 0 & * & \dots \\ \dots & & & \end{bmatrix}, \quad \vec{S}_1 = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} & \frac{4\sqrt{2}(1-\nu_0^2)}{\pi^2 E_0 b} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

где звездочками обозначают ненулевые элементы. Отсюда получаем

$$A_1 = \frac{2R(1-\nu_0^2)}{\alpha_{11} \pi^2 E_0 b}; \quad A_2 = A_3 = \dots = 0, \quad (2.62)$$

где R - равнодействующая внешней симметричной нагрузки. Для коэффициентов разложения (2.50) в случае рассматриваемого штампа получаем на основании (2.55)

$$H_0^1 = \frac{E_0}{2(1-\nu_0^2)\ell} \alpha_{11} \quad A_1 = \frac{R}{\pi^2 b \ell}; \quad (2.63)$$

$$H_2^1 = \frac{R}{\pi^2 b \ell} \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}};$$

$$H_4^1 = \frac{R}{\pi^2 b \ell} \frac{\alpha_{51}}{\alpha_{11}};$$

...

Отметим, что из уравнения равновесия также следует, что

$$H_0^1 = \frac{R}{\pi^2 b \ell} \quad (2.64)$$

§2.6. Пример 2.3. Контактная задача для стержня на упругом слое

Стержень изгибной жесткостью EI и размерами контактной поверхности $2\ell * 2b$ лежит на упругом слое $h=0.5\ell$, шарнирно соединенным с недеформируемым основанием. На стержень действует сосредоточен-

ный момент (рис. 2.4).

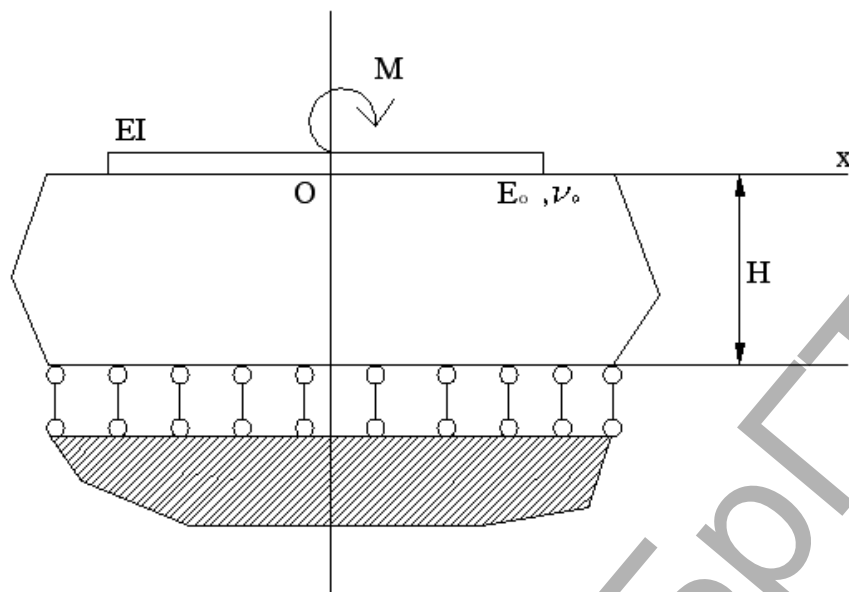


Рис. 2.4. Действие изгибающего момента на стержень

Для рассматриваемой антисимметричной нагрузки необходимо принять (2.1)

$$y(x) = B_1 \frac{\bar{x}}{\ell} \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=2}^{\infty} B_i \left(\frac{sh \mu_i \frac{\bar{x}}{\ell}}{sh \mu_i} + \frac{\sin \mu_i \frac{\bar{x}}{\ell}}{\sin \mu_i} \right), \quad (2.65)$$

где, на основании (2.59), коэффициенты $B_i (i=1,2,\dots)$ определяются из решения усеченной системы (2.60), а вектор неизвестных коэффициентов в разложении (2.50) имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} H_1^1 & H_1^2 & H_1^3 & \dots \\ H_3^1 & H_3^2 & H_3^3 & \dots \\ H_5^1 & H_5^2 & H_5^4 & \dots \\ \dots & & & \dots \end{pmatrix}; \quad (2.66)$$

и вектор свободных членов, определяемый из соотношения $\Pi = -M \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \Big|_{x=0}$,

$$\vec{S} = \frac{M(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 b l} \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{\frac{3}{2}}}{\pi} \\ \frac{\mu_2}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{sh\mu_2} + \frac{1}{\sin\mu_2} \right) \beta \\ \frac{\mu_3}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{sh\mu_3} + \frac{1}{\sin\mu_3} \right) \beta \\ \dots \end{bmatrix}; \quad (2.67)$$

Ядро интегрального уравнения (2.47) для шарнирно опертого слоя согласно [13] имеет вид

$$K(r) = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 h} \left[\frac{h}{r} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(n+1)}{\left(4 + \frac{r^2}{h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} P_n \left(\frac{2h}{\sqrt{4h^2 + r^2}} \right) \right];$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2};$$

$$a_0 = -1; \quad a_1 = -\frac{3}{2}; \quad a_2 = -1; \quad a_3 = -\frac{1}{3}; \quad a_4 = 0; \quad a_5 = \frac{1}{18}; \dots \quad (2.68)$$

В результате вычислений для $\beta = 500$ и $\frac{b}{l} = 10$ получено

$$C^{-1} = \begin{vmatrix} 2.71305 & -0.94869 & 0.01712 & 0.08257 & 0.08800 & 0.07658 \\ -0.94869 & 5.07393 & -0.79207 & 0.15931 & 0.19165 & 0.17092 \\ 0.01712 & -0.79207 & 7.62551 & -0.51223 & 0.43384 & 0.40221 \\ 0.08257 & 0.15931 & -0.51223 & 11.5389 & 0.10088 & 0.95702 \\ 0.08800 & 0.19165 & 0.43384 & 0.10088 & 17.7361 & 1.44403 \\ 0.07658 & 0.17092 & 0.40221 & 0.95702 & 1.44403 & 28.2881 \end{vmatrix};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4.06957 & 0.75075 & 0.73660 & 0.69468 & 0.62597 \\ 294.82 & 2545.17 & 354.526 & 408.76 & 380.296 \\ 280.263 & 354.526 & 5859.27 & 206.703 & 383.091 \\ 272.8 & 408.76 & 206.703 & 15947.4 & 133.631 \\ 245.819 & 380.296 & 383.091 & 133.631 & 36891.2 \end{vmatrix};$$

$$\vec{S}^T = \frac{M(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 b \ell} [1.55939 \quad -1909.32 \quad -3538.55 \quad -5104.83 \quad \dots]$$

и

$$H_1 = 0.63662 \frac{M}{\pi b \ell^2}; \quad B_1 = 0.454526 \frac{M(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 b \ell};$$

$$H_3 = -1.86696 \frac{M}{\pi b \ell^2}; \quad B_2 = -0.867488 \frac{M(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 b \ell};$$

$$H_5 = 2.50662 \frac{M}{\pi b \ell^2}; \quad B_3 = 0.633236 \frac{M(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 b \ell};$$

$$H_7 = -2.30588 \frac{M}{\pi b \ell^2}; \quad B_4 = -0.315373 \frac{M(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 b \ell};$$

$$H_9 = 2.33514 \frac{M}{\pi b \ell^2}; \quad B_5 = 0.181422 \frac{M(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 b \ell};$$

...

Отметим, что из уравнений равновесия $H_1 = \frac{2M}{\pi^2 b \ell^2}$.

При действии сосредоточенного момента на абсолютно жесткую балку можно получить из (2.60) и (2.67) при $\beta = 0$ для угла поворота

$$\varphi = \frac{4}{\pi \alpha_{2,2}} \frac{M(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 b \ell^2}$$

Если в рассмотренном примере принять $h = 100\ell$ (почти упругое полупространство) и $\beta = 0$, то находим $\alpha_{22} = 2.26392$ и для угла поворота получим

$$\varphi = 1.792 \frac{M(1-\nu_0^2)}{E_0 \ell^3}$$

Для сравнения, в таблице 53 [15] находим

$$\varphi = 2.088 \frac{M(1-\nu_0^2)}{E_0 \ell^3}$$

ГЛАВА 3. МЕТОД РИТЦА В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ КРУГЛОЙ И КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНОК

В настоящей главе методом Ритца решаются контактные задачи для круглой и кольцевой пластинок на упругом основании общего типа. Подобная задача для упругого полупространства рассматривалась А.Р.С. Selvadurai [39], где в качестве координатных функций был принят полином шестой степени. В данной работе за координатные функции принимаются собственные функции дифференциального уравнения осесимметричных изгибных колебаний круглой пластинки со свободными краями. Далее для нахождения коэффициентов при принятых координатных функциях используется теорема К.Ректориса [25] о минимуме квадратичного функционала. При определении коэффициентов разрешающих уравнений косвенно используются способы ортогональных многочленов и специальной аппроксимации [14].

§3.1. Осесимметричная контактная задача для круглой пластинки

Рассмотрим тонкую круглую пластинку радиуса a на произвольном упругом основании под действием осесимметричной внешней нагрузки $q(r)$. Будем искать прогибы пластинки в виде ряда

$$W(r) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i w_i\left(\frac{r}{a}\right), \quad (3.1)$$

где A_i – произвольные постоянные, а координатные функции $w_i(z)$ определяются выражением (1.51)

$$w_i(z) = J_0(\lambda_i z) - \frac{J_1(\lambda_i)}{I_1(\lambda_i)} I_0(\lambda_i z), \quad i \geq 2 \quad (3.2)$$

$$w_0(z) = \sqrt{2},$$

где $J_k(z), I_k(z)$ – функции Бесселя первого рода и модифицированная функция Бесселя.

Каждая из принятых координатных функций (3.1) является собственной функцией уравнения осесимметричных колебаний круглой пластинки

$$\left(A - \frac{\lambda^4}{a^4}\right) w_i = 0, \quad (3.3)$$

$$Aw_i = \left(\frac{d^4}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \right) w_i$$

с граничными условиями для свободного края круглой пластинки

$$\left(\frac{d^2 w_i}{dr^2} + \frac{\nu_p}{r} \frac{dw_i}{dr} \right) \Big|_{r=a} = 0;$$

$$\left(\frac{d^3 w_i}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w_i}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw_i}{dr} \right) \Big|_{r=a} = 0$$

Как показано А.И.Цейтлиным [36], каждое собственное число λ_i является корнем трансцендентного уравнения

$$J_0(\lambda_i)I_1(\lambda_i) + J_1(\lambda_i)I_0(\lambda_i) = \frac{2}{\lambda_i}(1 - \nu_p) J_1(\lambda_i)I_1(\lambda_i), \quad (3.4)$$

где ν_p – коэффициент Пуассона материала пластинки.

Собственные функции обладают свойством ортогональности

$$\int_0^a w_i\left(\frac{r}{a}\right) w_k\left(\frac{r}{a}\right) r dr = 0, \quad i \neq k; \quad (3.5)$$

$$= a^2 \Phi(\lambda_i), \quad i = k;$$

$$\Phi(\lambda_i) = \frac{1}{2} \left\{ J_0^2(\lambda_i) + J_1^2(\lambda_i) - 2 \frac{J_1(\lambda_i)}{I_0(\lambda_i)\lambda_i} [J_1(\lambda_i)I_0(\lambda_i) + J_0(\lambda_i)I_1(\lambda_i)] + \frac{J_1^2(\lambda_i)}{I_1^2(\lambda_i)} [I_0^2(\lambda_i) - I_1^2(\lambda_i)] \right\}, \quad i > 1.$$

Если $i=1$, то

$$\lambda_1 = 0; \quad \Phi_1(\lambda_1) = 1$$

Рассмотрим интегральное уравнение осесимметричной контактной задачи для круглой пластинки при неклассическом основании [14]

$$w_i\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a p(\rho) \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho \cos \varphi + \rho^2}} + \frac{1}{h} \int_0^\infty [L(u) - 1] J_0\left(\frac{u}{h} \sqrt{r^2 - 2r\rho \cos \varphi + \rho^2}\right) du \right\} \rho d\rho d\varphi, \quad (3.6)$$

где E_0, ν_0, h – характеристики упругого основания;

$p(\rho)$ – неизвестный закон распределения контактных напряжений, вызывающий изгиб пластинки по форме (3.1).

После выполнения интегрирования по угловой координате φ , получаем

$$w_i\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \int_0^a p(\rho) \left\{ 4 \frac{K\left(\frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho+r}\right)}{\rho+r} + \frac{2\pi}{h} \int_0^\infty [L(u)-1] J_0\left(\frac{r}{h}u\right) J_0\left(\frac{\rho}{h}u\right) du \right\} \rho d\rho. \quad (3.7)$$

Принимаем разложение [14]

$$\int_0^\infty [L(u)-1] J_0\left(\frac{r}{h}u\right) J_0\left(\frac{\rho}{h}u\right) du = \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty C_{mn} P_{2m}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right) P_{2n}\left(\sqrt{1-\frac{\rho^2}{a^2}}\right), \quad (3.8)$$

где $P_m(z)$ – полиномы Лежандра, обладающие свойством ортогональности [16]

$$\int_0^1 P_{2i}(\sqrt{1-x^2}) P_{2j}(\sqrt{1-x^2}) \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad i \neq j; \quad (3.9)$$

$$= \frac{1}{4i+1}, \quad i = j.$$

Тогда коэффициенты разложения будут равны

$$C_{2m,2n} = (4m+1)(4n+1) \frac{\pi h}{2a} \frac{(2m-1)!!(2n-1)!!}{(2m!!)(2n!!)} \int_0^\infty [L(u)-1] J_{2m+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{h}u\right) J_{2n+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{h}u\right) \frac{du}{u}. \quad (3.10)$$

Будем искать распределение контактных напряжений в виде ряда [18]

$$p(r) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}} \sum_{k=0}^\infty H_{2k} P_{2k}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right) \quad (3.11)$$

После интегрирования (3.7) с учетом (3.10) и (3.11), получаем

$$w_i(x) = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} a \left[\pi^2 \sum_{k=0}^\infty H_{2k} \left[\frac{(2k-1)!!}{(2k!!)} \right]^2 P_{2k}\left(\sqrt{1-x^2}\right) + \right.$$

$$\frac{2\pi a}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2k,2n} \frac{H_{2k}}{4k+1} P_{2k}(\sqrt{1-x^2}), \quad x = \frac{r}{a}. \quad (3.12)$$

Здесь (3.12) использовано значение интеграла [14],[18]

$$\int_0^1 \frac{\tau P_{2m}(\sqrt{1-\tau^2})}{\sqrt{1-\tau^2}} K\left(\frac{2\sqrt{\tau t}}{\tau+t}\right) \frac{d\tau}{\tau+t} = \frac{\pi^2}{4} \left[\frac{(2m-1)!!}{(2m!!)} \right]^2 P_{2m}(\sqrt{1-t^2});$$

и свойство ортогональности принятых полиномов Лежандра (3.9).

Далее используем стандартную процедуру способа ортогональных многочленов [26]. Умножаем обе части уравнения (3.12) на $P_{2l}(\sqrt{1-x^2})x dx / \sqrt{1-x^2}$ ($l=0,1,2,\dots$) и интегрируем по x в пределах $[-1,+1]$. Получается следующая бесконечная система линейных алгебраических уравнений, которая допускает решение способом усечения [26]

$$[C] [H^k] = \frac{E_0}{(1-\nu_0^2)a} A_k [F_{2k}(\lambda_i)], \quad (3.13)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \pi + \frac{2a}{h} C_{00} & \frac{2a}{5h} C_{20} & \frac{2a}{9h} C_{40} & \dots \\ \frac{2a}{5h} C_{20} & \frac{\pi}{20} + \frac{2a}{25h} C_{22} & \frac{2a}{45h} C_{42} & \dots \\ \frac{2a}{9h} C_{40} & \frac{2a}{45h} C_{42} & \frac{\pi}{64} + \frac{2a}{81h} C_{44} & \dots \\ \dots & & & \dots \end{bmatrix};$$

$$[H^k]^T = [H_0^k \quad H_2^k \quad H_4^k \quad H_6^k \quad \dots];$$

$$[F_k]^T = [F_k(\lambda_1) \quad F_k(\lambda_2) \quad F_k(\lambda_3) \quad F_k(\lambda_4) \quad \dots];$$

$$F_{2m}(\lambda_k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \left[\frac{J_{2m+\frac{1}{2}}(\lambda_k)}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{J_1(\lambda_k)}{I_1(\lambda_k)} \frac{J_{2m+\frac{1}{2}}(i\lambda_k)}{\sqrt{i\lambda_k}} \right].$$

Решение системы (3.13) получаем в таком виде

$$[H^k] = \frac{E_0}{(1-\nu_0^2)a} A_k [\alpha] [F_{2k}(\lambda_i)], \quad [\alpha] = [C]^{-1}; \quad (3.14)$$

При представлении (3.11) решение усеченной системы (3.13) можно записать

$$\begin{aligned} \frac{(1-\nu_0^2)a}{E_0} H_0 &= \alpha_{11} \sqrt{2} A_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_i F_{2k}(\lambda_i) \alpha_{1,k+1}; \\ \frac{(1-\nu_0^2)a}{E_0} H_{2m} &= \alpha_{m,1} \sqrt{2} A_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_i F_{2k}(\lambda_i) \alpha_{m,k+1} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений К.Ректориса [25] для определения коэффициентов A_i (3.1) при решении рассматриваемой задачи способом Ритца

$$\begin{cases} (Aw_1, w_1)A_1 + (Aw_1, w_2)A_2 + (Aw_1, w_3)A_3 + \dots = \frac{1}{D}[(w_1, q) - (w_1, p)]; \\ (Aw_2, w_1)A_1 + (Aw_2, w_2)A_2 + (Aw_2, w_3)A_3 + \dots = \frac{1}{D}[(w_2, q) - (w_2, p)]; \\ (Aw_3, w_1)A_1 + (Aw_3, w_2)A_2 + (Aw_3, w_3)A_3 + \dots = \frac{1}{D}[(w_3, q) - (w_3, p)]; \\ \dots \end{cases} \quad (3.16)$$

Для рассматриваемой задачи вследствие соотношений (3.3) и (3.5) все побочные коэффициенты при неизвестных A_i в системе (3.16) обращаются в нуль и матрица коэффициентов при неизвестных становится диагональной, т.е.

$$\begin{aligned} (A w_i, w_k) &= 0; \\ (A w_i, w_i) &= \frac{\lambda_i^4}{a}; \end{aligned}$$

Для правой части (3.16) с учетом (3.5) и (3.11) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{D}(w_1, p) &= \frac{2\pi E_0}{(1-\nu^2)D} a \left[A_1 \alpha_{1,1} \sqrt{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_i F_{2k}(\lambda_i) \alpha_{1,k+1} \right]; \\ \frac{1}{D}(w_i, p) &= \frac{2\pi E_0}{(1-\nu^2)D} a \sum_{k=0}^{\infty} F_{2k}(\lambda_i) \left[A_1 \alpha_{1,1} \sqrt{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_n F_{2m}(\lambda_n) \alpha_{k+1,m+1} \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Заметим, что по физическому смыслу выражения (3.17) соответствуют производной от потенциальной энергии деформаций упругого основания по A_i . С учетом (3.17) матрица коэффициентов при неизвестных (3.1) становится

$$[\delta] \vec{A} = \vec{S}, \quad (3.18)$$

$$\delta = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}\sqrt{2} & \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1,k+1} F_{2k}(\lambda_2) & \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1,k+1} F_{2k}(\lambda_3) & & \\ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1+k,1} F_{2k}(\lambda_2) & \lambda_2^4 \Phi_2(\lambda_2) + \beta \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1+k,1+m} F_{2k}(\lambda_2) F_{2m}(\lambda_2) & \beta \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1+k,1+m} F_{2k}(\lambda_2) F_{2m}(\lambda_3) & \dots & \\ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1+k,1} F_{2k}(\lambda_3) & \beta \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1+k,1+m} F_{2k}(\lambda_3) F_{2m}(\lambda_2) & \lambda_3^4 \Phi_3(\lambda_3) + \beta \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1+k,1+m} F_{2k}(\lambda_3) F_{2m}(\lambda_3) & \dots & \\ \dots & & & & \end{bmatrix};$$

$$\vec{A} = [A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \dots],$$

$$\text{где } \beta = \frac{\pi E_0 a^3}{(1 - \nu_0^2) D}$$

В выражении (3.18) множитель при двойных рядах пропорционален показателю гибкости по М.И.Горбунову-Посадову [15].

Для вектора \vec{S} свободных членов системы (3.18), соответствующих производных по A_i от работы внешней нагрузки на прогибах круглой пластинки (3.1) имеем:

а) действие сосредоточенной силы R в центре пластинки:

$$(q, w_i) = \frac{(1 - \nu_0^2) D}{\pi E_0 a} 2\sqrt{2} \pi \frac{Ra^2}{2\pi D}, \quad i = 1;$$

$$= \frac{(1 - \nu_0^2) D}{\pi E_0 a} 2\sqrt{2} \pi 2\pi \frac{Ra^2}{2\pi D} \left[1 - \frac{J_1(\lambda_i)}{I_1(\lambda_i)} \right], \quad i > 1. \quad (3.19)$$

б) действие равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q :

$$(q, w_i) = 0, \quad i > 1;$$

$$= \frac{(1 - \nu_0^2) D}{\pi E_0 a} 2\sqrt{2} \pi 2\pi \frac{qa^2}{2D}, \quad i = 1. \quad (3.20)$$

Для абсолютно жесткой круглой пластинки на упругом однородном изотропном полупространстве, загруженной равномерно распределенной нагрузкой q , в выражении (3.1) необходимо учесть один корень

$\lambda_1 = 0$. Так как в (3.6) $h = \infty$, то из (3.13) следует $\alpha_{1,1} = \frac{1}{\pi}$ и на основании (3.20) и (3.18) при $\beta = 0$

$$A_1 = \frac{1 - \nu_0^2}{\alpha_{1,1}} \frac{qa}{E_0} \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{(1 - \nu_0^2) \pi a^2 q \sqrt{2}}{E_0 a \cdot 4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{R(1 - \nu_0^2)}{E_0 a}$$

и осадка круглого штампа $w_1 = \sqrt{2} A_1$, что соответствует точному решению [15].

Рассмотрим пример для осесимметрично нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q круглой пластинки, лежащей на упругом слое конечной толщины h , шарнирно соединенным с недеформируемым основанием. Согласно [14]

$$L(u) = \frac{ch2u - 1}{sh2u + 2u}. \quad (3.21)$$

Воспользовавшись методом специальной аппроксимации [13], представим

$$L(u) - 1 = e^{-2u} \sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k \quad (3.22)$$

Коэффициенты b_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) в (3.22) получены приравнением коэффициентов при одинаковых степенях u в степенных рядах для обеих частей и равны $b_0 = -1$; $b_1 = -1.5$; $b_2 = -1$; $b_3 = -\frac{1}{3}$; $b_4 = 0$; $b_5 = \frac{1}{18}$; ...

В дальнейших расчетах для $\frac{a}{h} = 1$; $a = 1$; $\frac{\pi E a^3}{(1 - \nu^2) D} = 1000$; $\nu_p = \frac{1}{6}$

получено с учетом 5 членов разложений (3.1) и (3.11)

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0.625775 & 0.116328 & 0.013133 & \dots \\ 0.116328 & 6.40443 & -0.04294 & \dots \\ 0.013133 & -0.04294 & 20.2862 & \dots \\ \dots & & & \dots \end{bmatrix};$$

$$\vec{S} = \frac{qa(1 - \nu_0^2)}{2\sqrt{2} \pi E_0} \begin{bmatrix} \pi\sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix};$$

$$\delta = \begin{bmatrix} 0.88498 & -0.127418 & 0.06279 & \dots \\ -127.418 & 286.833 & -72.9191 & \dots \\ 62.790 & -72.919 & 285.322 & \dots \\ \dots & & & \dots \end{bmatrix};$$

$$\lambda_1 = 0;$$

$$A_1 = 5.39115;$$

$$H_0 = 0.5;$$

$$\lambda_2 = 2.961727;$$

$$A_2 = 2.2013;$$

$$H_2 = 0.441814;$$

$$\lambda_3 = 6.182688;$$

$$A_3 = -0.58541;$$

$$H_4 = -0.04559;$$

$$\lambda_4 = 9.356218;$$

$$A_4 = 0.199657;$$

$$H_6 = -0.02727;$$

$$\lambda_5 = 12.514387;$$

$$A_5 = -0.08187;$$

$$H_8 = 0.01995;$$

...

Отметим, что коэффициенты при A_i получаются в долях от $\frac{q a (1-\nu_0^2)}{2\pi E_0 \sqrt{2}}$,

а при H_{2k} - в долях от q .

Из уравнений равновесия круглой пластинки также следует, что

$$H_0 = \frac{q}{2}$$

На рисунке 3.1 приведен график распределения реактивных давлений под подошвой круглой плиты на упругом слое. Там же для сравнения приводится график распределения реактивных давлений под круглым штампом, лежащим на упругом полупространстве [15].

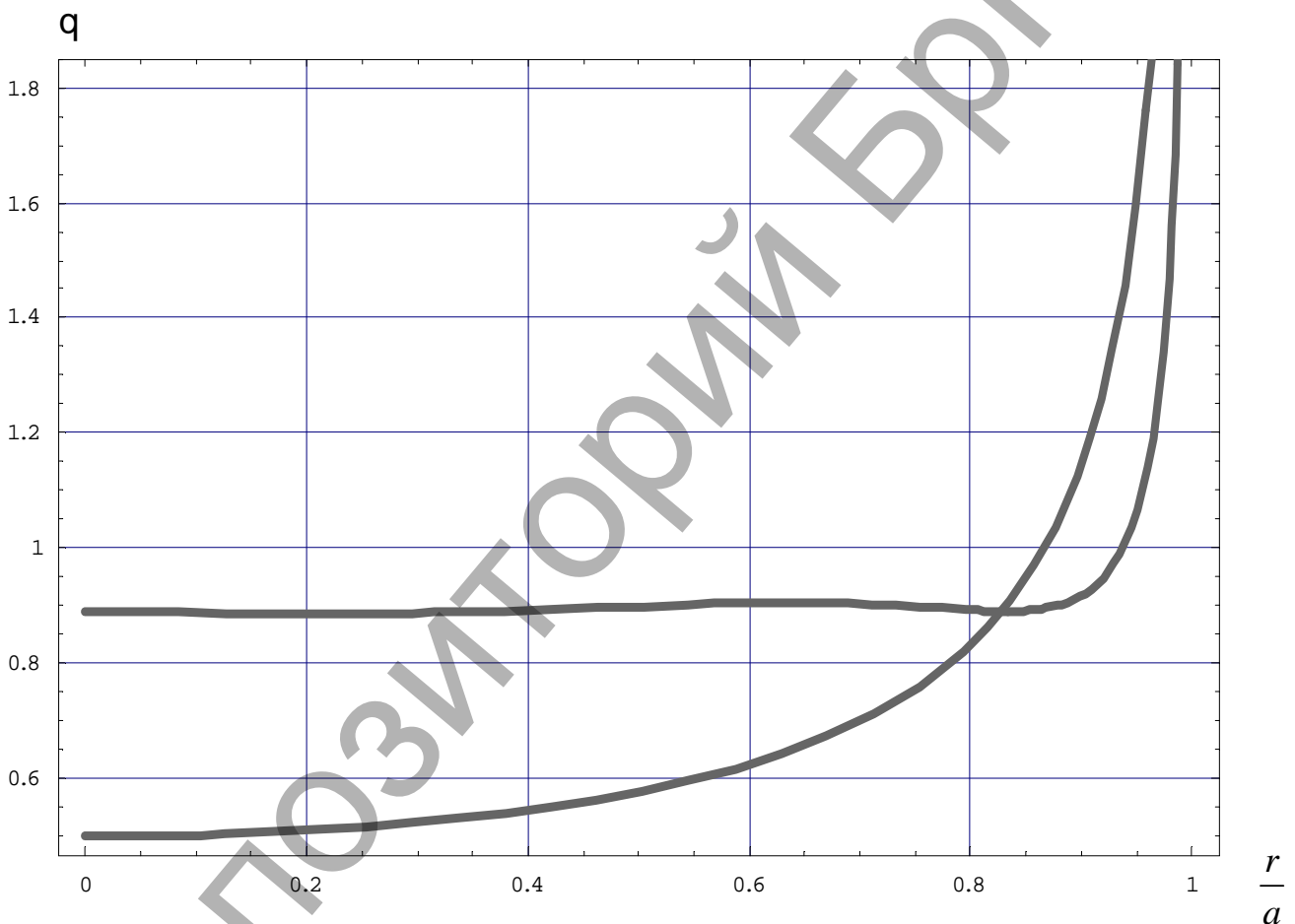


Рис.3.1 Распределение реактивных давлений под круглой плитой на упругом слое и круглым штампом на упругом полупространстве

§3.2. Осесимметричная контактная задача для кольцевой пластинки

Рассмотрим осесимметрично нагруженную кольцевую пластинку ($a \leq r \leq b$). Решение уравнения осесимметричных колебаний такой кольцевой пластинки имеет вид (1.45)

$$w(r) = C_1 J_0\left(\lambda \frac{r}{b}\right) + C_2 Y_0\left(\lambda \frac{r}{b}\right) + C_3 I_0\left(\lambda \frac{r}{b}\right) + C_4 K_0\left(\lambda \frac{r}{b}\right), \quad (3.23)$$

где (3.23) содержит сумму функций Бесселя [16];

$C_i (i=1,2,3,4)$ – постоянные коэффициенты, определяемые из граничных условий.

Радиальные поперечная сила и изгибающий момент в кольцевой пластинке постоянной цилиндрической жесткости D при условии (3.23) равны

$$\begin{aligned} Q_r(r) &= -D \frac{\lambda^3}{b^3} \left[C_1 J_1\left(\lambda \frac{r}{b}\right) + C_2 Y_1\left(\lambda \frac{r}{b}\right) + C_3 I_1\left(\lambda \frac{r}{b}\right) + C_4 K_1\left(\lambda \frac{r}{b}\right) \right]; \\ M_r(r) &= DC_1 \frac{\lambda^2}{b^2} \left[J_0\left(\lambda \frac{r}{b}\right) - (1-\nu_p) \frac{b}{\lambda r} J_1\left(\lambda \frac{r}{b}\right) \right] + \\ &DC_2 \frac{\lambda^2}{b^2} \left[Y_0\left(\lambda \frac{r}{b}\right) - (1-\nu_p) \frac{b}{\lambda r} Y_1\left(\lambda \frac{r}{b}\right) \right] \\ &DC_3 \frac{\lambda^2}{b^2} \left[I_0\left(\lambda \frac{r}{b}\right) - (1-\nu_p) \frac{b}{\lambda r} I_1\left(\lambda \frac{r}{b}\right) \right] \\ &DC_4 \frac{\lambda^2}{b^2} \left[K_0\left(\lambda \frac{r}{b}\right) - (1-\nu_p) \frac{b}{\lambda r} K_1\left(\lambda \frac{r}{b}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

Выполнение статических граничных условий на свободных краях кольцевой пластинки для M_r и Q_r при $r=a, b$ позволяет найти совокупность собственных чисел λ_i из равного нулю следующего определителя

$$\begin{vmatrix} J_1(\lambda) & Y_1(\lambda) & I_1(\lambda) & -K_1(\lambda) \\ J_1\left(\lambda \frac{a}{b}\right) & Y_1\left(\lambda \frac{a}{b}\right) & I_1\left(\lambda \frac{a}{b}\right) & -K_1\left(\lambda \frac{a}{b}\right) \\ J_0(\lambda) - \psi J_1(\lambda) & Y_0(\lambda) - \psi Y_1(\lambda) & I_0(\lambda) - \psi I_1(\lambda) & -K_0(\lambda) - \psi K_1(\lambda) \\ J_0\left(\lambda \frac{a}{b}\right) - \frac{\psi b}{a} J_1\left(\lambda \frac{a}{b}\right) & Y_0\left(\lambda \frac{a}{b}\right) - \frac{\psi b}{a} Y_1\left(\lambda \frac{a}{b}\right) & I_0\left(\lambda \frac{a}{b}\right) - \frac{\psi b}{a} I_1\left(\lambda \frac{a}{b}\right) & -K_0\left(\lambda \frac{a}{b}\right) - \frac{\psi b}{a} K_1\left(\lambda \frac{a}{b}\right) \end{vmatrix} \quad \psi = (1-\nu_p)\lambda,$$

и затем собственные функции (3.23).

Таким образом, прогибы кольцевой пластинки представляем в виде ряда

$$w(r) = w_1 + \sum_{i=2}^{\infty} C_{1i} \left[J_0\left(\lambda_i \frac{r}{b}\right) + \frac{C_{2i}}{C_{1i}} Y_0\left(\lambda_i \frac{r}{b}\right) + \frac{C_{3i}}{C_{1i}} I_0\left(\lambda_i \frac{r}{b}\right) + \frac{C_{4i}}{C_{1i}} K_0\left(\lambda_i \frac{r}{b}\right) \right], \quad (3.25)$$

где w_1 является постоянной, соответствует случаю абсолютно жесткого кольцевого штампа и собственному значению $\lambda_1 = 0$;

$\frac{C_{ni}}{C_{1i}}$ ($n=2,3,4$) – определяются из граничных условий для каждого λ_i .

Пусть функция Грина упругого линейно деформируемого основания может быть представлена в виде [14]

$$K(r, \rho) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} \left\{ \frac{1}{R} + \frac{1}{h} \int_0^\infty [L(u) - 1] J_0\left(\frac{u}{h} R\right) du \right\}, \quad R = \sqrt{r^2 - 2r\rho \cos \theta + \rho^2}, \quad (3.26)$$

где h – некоторый линейный размер;

E_0, ν_0 – упругие постоянные основания.

$L(u)$ – трансцендентная функция, зависящая от вида упругого основания.

Рассмотрим интегральное уравнение для кольцевой осесимметрично нагруженной пластинки [14], прогибы которой описываются одной из собственных функций (3.23)

$$w_i(r) = \int_0^{2\pi} \int_a^b \rho p(\rho) K(r, \rho) d\rho d\theta \quad (3.27)$$

После интегрирования (3.27) по θ с учетом соотношения [16]

$$J_0(mR) = J_0(mr)J_0(m\rho) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(mr)J_k(m\rho) \cos m\theta$$

получаем

$$w_i(r) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} \int_a^b \rho p(\rho) \left\{ 4 \frac{K\left(\frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho + r}\right)}{\rho + r} + \frac{2\pi}{h} \int_0^\infty [L(u) - 1] J_0\left(u \frac{\rho}{h}\right) J_0\left(u \frac{r}{h}\right) du \right\} d\rho, \quad (3.28)$$

где $K(z)$ – полный эллиптический интеграл [16].

В (3.28) выполним подстановку [2]

$$r = a e^{\frac{1+x}{\omega}}; \quad \rho = a e^{\frac{1+t}{\omega}}; \quad \omega = \frac{2}{\ln(b/a)} \quad (3.29)$$

и представим распределение реактивных напряжений в виде

$$\psi(x) = \frac{\rho^{3/2}}{a^{3/2}} p(\rho) \quad (3.30)$$

В результате получаем исходное уравнение для решения

$$\sqrt{\frac{r}{a}} w_i(r) = \frac{2(1 - \nu_0^2)}{\pi E_0} a \int_{-1}^1 \left\{ 4 \frac{K\left(\frac{1}{chz}\right)}{chz} + \frac{\pi a}{h} e^{\frac{2+t+x}{2\omega}} \int_0^\infty [L(u) - 1] J_0\left(u \frac{\rho}{h}\right) J_0\left(u \frac{r}{h}\right) du \right\} \psi(x) \frac{dx}{\omega}$$

$$z = \frac{t - x}{2\omega} \quad (3.31)$$

Согласно [2] принимаем

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n T_n(x); \quad (3.32)$$

$$4 \frac{K\left(\frac{1}{chz}\right)}{chz} + \frac{\pi a}{h} e^{\frac{2+t+x}{2\omega}} \quad (3.33)$$

$$\int_0^{\infty} [L(u) - 1] J_0\left(u \frac{\rho}{h}\right) J_0\left(u \frac{r}{h}\right) du = -\ln\left(\frac{t-x}{\omega}\right) \left(+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn}\left(\frac{b}{h}, \omega\right) T_m(x) T_n(t) \right),$$

где $T_m(x)$ – полином Чебышева первого рода [16].

После интегрирования по переменной x с учетом спектрального соотношения (В.3) получаем уравнение относительно переменной t . Умножаем все члены этого уравнения на $\frac{T_n(t) dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $n=0,1,2,\dots$ и интегрируем в пределах $(-1,1)$. Получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов B_n представления (3.32). Ее можно записать в матричной форме

$$[C] [B] = \frac{E_0}{2\pi(1-\nu_0^2)a} [A];$$

или

$$\begin{bmatrix} C_{00} + \ln 2\omega & \frac{1}{2} C_{10} & \frac{1}{2} C_{20} & \frac{1}{2} C_{30} & \dots \\ \frac{1}{2} C_{01} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} C_{11} & \frac{1}{4} C_{21} & \frac{1}{4} C_{31} & \dots \\ \frac{1}{2} C_{02} & \frac{1}{4} C_{12} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4} C_{22} & \frac{1}{4} C_{32} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \dots \end{bmatrix} = \frac{E_0}{2\pi(1-\nu_0^2)a} \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ A_{3i} \\ \dots \end{bmatrix};$$

$$A_{k0} = \pi \omega e^{\frac{1}{2\omega}} I_k\left(\frac{1}{2\omega}\right); \quad (3.34)$$

$$A_{ik} = \omega e^{\frac{1}{2\omega}} \int_{-1}^1 \left[\begin{array}{l} J_0\left(\lambda_k \frac{a}{b} e^{\frac{1+t}{2\omega}}\right) + \gamma_{1k} Y_0\left(\lambda_k \frac{a}{b} e^{\frac{1+t}{2\omega}}\right) + \gamma_{2k} I_0\left(\lambda_k \frac{a}{b} e^{\frac{1+t}{2\omega}}\right) + \\ \gamma_{3k} K_0\left(\lambda_k \frac{a}{b} e^{\frac{1+t}{2\omega}}\right) \end{array} \right] e^{\frac{t}{2\omega}} \frac{T_i(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$\gamma_{1k} = \frac{C_{2k}}{C_{1k}}; \gamma_{2k} = \frac{C_{3k}}{C_{1k}}; \gamma_{3k} = \frac{C_{4k}}{C_{1k}};$$

Интеграл в (3.34) брался численно по квадратурной формуле, используя нули полиномов Чебышева первого рода [3]. Решение системы (3.34) для всех собственных функций дает возможность получить связь между коэффициентами разложений (3.32) и (3.23) в следующем виде

$$B_k = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{ik} A_i, \quad (3.35)$$

где коэффициенты α_{ik} являются элементами матрицы

$$[\alpha] = [C]^{-1} \quad (3.36)$$

Таким образом, распределение контактных напряжений (3.32) дается формулой

$$q(r) = \frac{E_0}{2\pi(1-\nu_0^2)a} \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{i+1,n+1} A_i \frac{T_n(\omega \ln \frac{r}{a} - 1)}{\sqrt{1 - (\omega \ln \frac{r}{a} - 1)^2}} \quad (3.37)$$

Для системы уравнений К. Ректориса (3.16) скалярные произведения в этом случае получаются

$$(w_1, p) = \frac{E_0 a}{2(1-\nu_0^2)\omega} A_1 e^{2\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1,1} I_n\left(\frac{1}{2\omega}\right);$$

$$(w_j, p) = \frac{E_0 a}{2\pi(1-\nu_0^2)\omega} e^{\frac{1}{2}\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{n+1,i} A_i \int_{-1}^1 \frac{e^{\frac{t}{2}\omega} T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} [J_0(\lambda_j \frac{a}{b} e^{\frac{1+t}{2}\omega}) + \gamma_{1j} Y_0(\lambda_j \frac{a}{b} e^{\frac{1+t}{2}\omega}) + \gamma_{2j} I_0(\lambda_j \frac{a}{b} e^{\frac{1+t}{2}\omega}) + \gamma_{3j} K_0(\lambda_j \frac{a}{b} e^{\frac{1+t}{2}\omega})] dt, \quad (3.38)$$

причем последний интеграл в (3.38) берется численно подобно (3.34).

Свободные члены системы уравнений К. Ректориса (3.16) определяются в зависимости от вида внешней нагрузки на пластинку. При действии на кольцевую пластинку равномерно распределенной нагрузки q , например, они равны

$$(w_1, p) = \frac{1}{D} \int_0^{2\pi} \int_a^b q(r) w_1 r dr d\theta = \frac{\pi q}{D} (b^2 - a^2);$$

$$(w_i, p) = \frac{2\pi q}{D} \left\{ \frac{b^2}{\lambda_i} [J(\lambda_{i1}) + \gamma_{1i} Y_1(\lambda_i) + \gamma_{2i} Y_1(\lambda_i) + \gamma_{3i} Y_1(\lambda_i)] - \frac{ab}{\lambda_i} [J(\lambda_{i1} \frac{a}{b}) + \gamma_{1i} Y_1(\lambda_i \frac{a}{b}) + \gamma_{2i} Y_1(\lambda_i \frac{a}{b}) + \gamma_{3i} Y_1(\lambda_i \frac{a}{b})] \right\} \quad (3.39)$$

На этом этапе расчета возможно получить решение для кольцевого штампа. При этом необходимо учесть только одно собственное число $\lambda_1 = 0$, и поэтому на основании (3.38) и (3.39) осадка кольцевого штампа, загруженного равномерно распределенной нагрузкой q , получается в таком виде

$$w_1 = A_1 = \frac{qa(1-\nu_0^2)}{E_0} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) \frac{\omega e^{-\frac{1}{2\omega}}}{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1,1} I_n\left(\frac{1}{2\omega}\right)} \quad (3.40)$$

Численные результаты приведем для кольцевой пластинки с данными

$$a = 0.5; b = 1; \nu_p = 1/6; \frac{E_0 b^3}{2\pi(1-\nu_0^2)D} = 5,$$

лежащей на упругом слое конечной толщины $h = b$, шарнирно сцепленным с жестким основанием. В этом случае [13] для ядра упругого основания на основании асимптотических свойств представим

$$L(u) - 1 = e^{-2u} \sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k, \quad (3.41)$$

$$b_0 = -1; b_1 = -1.5; b_2 = -1; b_3 = -1/3; b_4 = 0; b_5 = 1/18; b_6 = 1/45; \dots$$

что позволяет на основании выражения (3.41) после взятия интегралов [16] представить

$$J_0\left(\frac{u}{h} \sqrt{r^2 - 2r\rho \cos \theta + \rho^2}\right) = J_0\left(u \frac{r}{h}\right) J_0\left(u \frac{\rho}{h}\right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k\left(u \frac{r}{h}\right) J_k\left(u \frac{\rho}{h}\right) \cos k\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} [L(u) - 1] J_0\left(\frac{u}{h} \sqrt{r^2 - 2r\rho \cos \theta + \rho^2}\right) d\theta du =$$

$$2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_k \frac{(k+2m)!}{2^{k+1}(m!)^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right)^m P_m\left(\frac{\rho^2 + r^2}{\rho^2 - r^2}\right) \left(-\frac{r^2}{16h^2}\right)^m, \quad (3.42)$$

где $P_m(z)$ – полином Лежандра [16].

В процессе вычислений на ПЭВМ получено для 5 членов разложения (3.23) и 10 членов разложения (3.32) (см. Табл.1.2)

i	λ_i	γ_{1i}	γ_{2i}	γ_{3i}
2	3.087622938	0.31181586	-0.08516220	1.368944030
3	9.626189261	0.27064160	-0.00010407	-49.433663
4	15.80578056	0.14282070	-0.000000204	1124.023747
5	22.06005009	0.10122185	0.0	-26180.648

$$[C] = \begin{bmatrix} 1.53789 & 0.06073 & 0.03001 & 0.00693... \\ 0.06073 & 0.09241 & 0.01058 & 0.00235... \\ 0.03001 & 0.01058 & 0.04208 & 0.00195... \\ 0.00693 & 0.00235 & 0.00195 & 0.03710... \end{bmatrix};$$

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 1.2860 & 0.3213 & -0.3891 & -0.7959 & ... \\ 1.6018 & -6.6999 & 0.8634 & -6.8484 & ... \\ -0.0497 & 2.2692 & -7.0637 & -6.5366 & ... \\ -0.0632 & -0.2732 & -2.7815 & -13.6653 & ... \end{bmatrix}$$

$$\frac{D}{qb^4} [A]^T = (0.03335 \quad -0.00603 \quad 0.00101 \quad 0.00038 \quad 0.00002);$$

$$\frac{1}{q} [B]^T = (0.10695 \quad 0.09211 \quad 0.00242 \quad -0.00837 \quad -0.00314 \quad -0.00007 \quad 0.00010...).$$

Контролем правильности полученных результатов будет проверка уравнения равновесия, которая в нашем случае дает

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b p(r) r dr = 2\pi a^2 \frac{e^{2\omega}}{\omega} \sum_{m=0}^9 B_m I_m\left(\frac{1}{2\omega}\right) = 0.75 qb^2$$

§ 3.3. Неосесимметричная контактная задача для круглого штампа

Рассмотрим интегральное уравнение контактной задачи для круглого штампа на упругом основании [14]

$$A_0 + A_1 \frac{r}{a} \cos\theta = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 h} \int_0^{2\pi} \int_0^b \int_0^{\infty} K(u) p(\rho, \varphi) J_0\left(\frac{u}{h} \sqrt{r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi) + \rho^2}\right) du \rho d\rho d\varphi \quad (3.44)$$

где $p(\rho, \varphi)$ - неизвестный закон распределения реактивных давлений под подошвой штампа;

$K(u)$ - ядро интегрального уравнения, зависящее от вида упругого основания.

Представим [16]

$$J_0\left(\frac{u}{h} \sqrt{r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi) + \rho^2}\right) = J_0\left(\frac{u r}{h}\right) J_0\left(\frac{u \rho}{h}\right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k\left(\frac{u r}{h}\right) J_r\left(\frac{u \rho}{h}\right) \cos k(\theta - \varphi) \quad (3.45)$$

Не снижая общности рассуждений, принимаем закон распределения реактивных давлений симметричным по угловой координате

$$p(\rho, \varphi) = p_0(\rho) + p_1(\rho) \cos \varphi + p_2(\rho) \cos 2\varphi + \dots = p_0(\rho) + \sum_{K=1}^{\infty} p_K(\rho) \cos k\varphi \quad (3.46)$$

Подставим (3.46) в (3.44) и выполним интегрирование по φ с учетом (3.45). Так как ряд Фурье равен 0, когда каждый член ряда равен нулю [35], в итоге приходим к двум отдельным интегральным уравнениям

$$A_0 = \frac{2(1-\nu_0^2)}{E_0 h} \int_0^a \int_0^{\infty} p_0(\rho) K(u) J_0\left(u \frac{r}{h}\right) J_0\left(u \frac{\rho}{h}\right) du \rho d\rho \quad (3.47)$$

$$A_1 \frac{r}{a} = \frac{2(1-\nu_0^2)}{E_0 h} \int_0^a \int_0^{\infty} p_1(\rho) K(u) J_1\left(u \frac{r}{h}\right) J_1\left(u \frac{\rho}{h}\right) du \rho d\rho \quad (3.48)$$

Законы распределения контактных напряжений под штампом $p(\rho)$ и $p_1(\rho)$ примем в следующем виде

$$p_0(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{a^2}}} \sum_{k=0}^{\infty} H_{2k}^0 P_{2k} \left(\sqrt{1-\frac{\rho^2}{a^2}} \right); \quad (3.49)$$

$$p_1(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{a^2}}} \sum_{k=0}^{\infty} H_{2k+1}^1 P_{2k+1}^1 \left(\sqrt{1-\frac{\rho^2}{a^2}} \right), \quad (3.50)$$

где H_{2k}^0 , H_{2k+1}^1 - неизвестные коэффициенты;

$P_{\nu 1}^m(x)$ - полиномы Лежандра ($m=0$) и сферические функции ($m=1$) [16].

Рассмотрим соотношение [37]

$$J_{2k+1}(z \sin \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin^{2k+1} \theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2k+2n+3}{2} \right) \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2k+n+2)} \Gamma\left(2k+\frac{3}{2}\right) C_{2n}^{\frac{2k+3}{2}}(\cos \theta) J_{2k+2n+\frac{3}{2}}(z), \quad (3.51)$$

где $C_{2n}^{\frac{2k+3}{2}}(\cos \theta)$ - многочлены Гегенбауэра [16].

Выразим многочлены Гегенбауэра через сферические функции на основании следующих представлений и операций [4], [16],[24]

$$C_{2n}^{2k+\frac{3}{2}}(\cos\theta) = \frac{(-1)^n}{\left(2k+n+\frac{3}{2}\right)B\left(2k+\frac{3}{2}, n+1\right)} {}_2F_1\left(-n, 2k+n+\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \cos^2\theta\right);$$

$${}_2F_1\left(a, b; \frac{1}{2}; x\right) = \frac{2^{\frac{a+b-3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right) (1-x)^{\frac{1-2a-2b}{4}}$$

$$\cdot \left[P_{a-b-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-a-b}(\sqrt{x}) + P_{a-b-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-a-b}(-\sqrt{x}) \right]; \quad (3.52)$$

$$P_{-\nu-1}^{\mu}(x) = P_{\nu}^{\mu}(x); P_{\nu}^{-m}(x) = (-1)^m \frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)} P_{\nu}^m(x)$$

В результате получаем (3.51)

$$J_{2k+1}(\rho z) = -\frac{2^{-2k-\frac{3}{2}}}{\sqrt{z}} \sum_{n=0}^{\infty} (4k+4n+3) \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2k+n+2)} J_{2k+2n+\frac{3}{2}}(z) P_{2k+2n+1}^{2k+1}(\sqrt{1-\rho^2}) \quad (3.53)$$

На основании свойства ортогональности сферических функций [16]

$$\int_0^1 P_{2n+1}^{2k+1}(\sqrt{1-\rho^2}) P_{2m+1}^{2k+1}(\sqrt{1-\rho^2}) \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = 0, \quad m \neq n;$$

$$= \frac{(2n+2k+2)!}{(4n+3)(2n-2k)!}, \quad m = n, \quad (3.54)$$

можно из (3.53) получить необходимое в дальнейшем соотношение

$$\int_0^1 J_1(\rho z) P_{2n+1}^1(\sqrt{1-\rho^2}) \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2z}} J_{2n+\frac{3}{2}}(z) \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \Gamma(2n+3)}{\Gamma(n+2) \Gamma(2n+1)} \quad (3.55)$$

Предварительно принимаем разложения

$$\int_0^{\infty} [K(u)-1] J_0\left(u\frac{r}{h}\right) J_0\left(u\frac{\rho}{h}\right) du = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2m,2n}^0 P_{2m}\left(\sqrt{1-\frac{\rho^2}{a^2}}\right) P_{2n}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right); \quad (3.56)$$

$$\int_0^{\infty} [K(u)-1] J_1\left(u\frac{r}{h}\right) J_1\left(u\frac{\rho}{h}\right) du = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2m+1,2n+1}^1 P_{2m+1}^1\left(\sqrt{1-\frac{\rho^2}{a^2}}\right) P_{2n+1}^1\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right) \quad (3.57)$$

Рассмотрим уравнение (3.47). Подставим в него (3.49) и выполним интегрирование по u в первом слагаемом. Далее проинтегрируем по ρ с учетом (3.54) и соотношения [14]

$$\int_0^a K\left(\frac{2\sqrt{pr}}{p+r}\right) P_{2m}\left(\sqrt{1-\frac{\rho^2}{a^2}}\right) \frac{\rho d\rho}{(\rho+r)\sqrt{1-\frac{\rho^2}{a^2}}} = \frac{\pi^2 a^2}{4} \left[\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\right]^2 P_{2m}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right)$$

В результате получаем уравнение

$$A_0 = \frac{(1-\nu_0^2)}{E_0} a \left[\pi \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(2k-1)!!}{2k!!}\right]^2 H_{2k} P_{2k}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right) + \frac{2a}{h} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2m,2k}^0}{4k+1} H_{2k} P_{2m}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right) \right] \quad (3.58)$$

Далее используем стандартную процедуру способа ортогональных многочленов [26]. Умножаем обе части (3.58) на $P_{2n}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right) \frac{r dr}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}}$

($n=0,1,2,\dots$) и проинтегрируем по r в пределах $(0,a)$. Получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений следующего вида

$$[C] \vec{H} = \vec{A}_0, \quad (3.59)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \pi + \frac{2a}{h} C_{0,0}^0 & \frac{2a}{5h} C_{0,2}^0 & \frac{2a}{9h} C_{0,4}^0 & \dots \\ \frac{2a}{5h} C_{2,0}^0 & \frac{\pi}{20} + \frac{2a}{25h} C_{2,2}^0 & \frac{2a}{45h} C_{2,4}^0 & \\ \frac{2a}{9h} C_{4,0}^0 & \frac{2a}{45h} C_{4,2}^0 & \frac{\pi}{64} + \frac{2a}{81h} C_{4,4}^0 & \\ \dots & & & \end{bmatrix};$$

$$\vec{H}^T = [H_0 \ H_2 \ H_4 \ \dots];$$

$$\vec{A}_0^T = \frac{E_0}{(1-\nu_0^2) a} [A_0 \ 0 \ 0 \ \dots]$$

Обозначим

$$[\alpha^0] = [C]^{-1} - \text{обратная матрица}$$

Тогда можно записать

$$H_{2m}^0 = \frac{E_0}{(1-\nu_0^2)a} \alpha_{m+1,1}^0 A_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.60)$$

Выполняя аналогичную процедуру с уравнением (3.48), можно с использованием (3.50) и (3.55) последовательно получить

$$A_1 \frac{r}{a} = \frac{2(1-\nu_0^2)}{E_0} a \left[\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} H_{2k+1}^1 \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(k+2) \Gamma(k+1)} P_{2k+1}^1 \left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right) + \right. \\ \left. \frac{a}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} H_{2k+1}^1 C_{2k+1,2n+1}^1 P_{2n+1}^1 \left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right) \frac{\Gamma(2k+3)}{(4k+3) \Gamma(2k+1)} \right] \quad (3.61)$$

После умножения обеих частей (21) на

$$P_{2n+1}^1 \left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right) \frac{r dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

и интегрирования по r в пределах $(0, a)$ получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$[C_1] \vec{H}_1 = \vec{A}_1, \\ [C_1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma(3) + & \frac{a}{21h} C_{3,1}^1 \Gamma(5) & \frac{a}{33h} C_{5,1}^1 \frac{\Gamma(3) \Gamma(7)}{\Gamma(5)} & \dots \\ + \frac{a}{9h} C_{1,1}^1 \Gamma^2(3) & & & \\ \frac{a}{21h} C_{1,3}^1 \Gamma(5) & \frac{1}{14} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma(5)}{\Gamma^2(3)} & \frac{a}{77h} C_{5,3}^1 \frac{\Gamma(7)}{\Gamma(3)} & \dots \\ + \frac{1}{49} \frac{a}{h} C_{3,3}^1 \frac{\Gamma^2(5)}{\Gamma^2(3)} & & & \\ \frac{a}{33h} C_{1,5}^1 \frac{\Gamma(3) \Gamma(7)}{\Gamma(5)} & \frac{a}{77h} C_{3,5}^1 \frac{\Gamma(7)}{\Gamma(3)} & \frac{1}{22} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \Gamma(7)}{\Gamma(3) \Gamma(4) \Gamma(5)} & \dots \\ & & + \frac{1}{121} \frac{a}{h} C_{5,5}^1 \frac{\Gamma^2(7)}{\Gamma^2(5)} & \dots \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} [\alpha^1] &= [C_1]^{-1}; \\ \vec{H} &= [H_1^1 \ H_3^1 \ H_5^1 \dots]; \\ \vec{A}_1 &= \frac{E_0}{2(1-\nu_0^2)a} \frac{\Gamma(3)}{3} [A_1 \ 0 \ 0 \dots]. \end{aligned}$$

и

$$H_{2m+1}^1 = \frac{E_0}{3(1-\nu_0^2)a} \alpha_{m+1,1}^1 A_1 \quad (3.63)$$

Соотношения (3.60) и (3.63) позволяют составить систему уравнений К.Ректориса (1.81). Так как для рассматриваемого случая на основании (1.81) $\varphi_1 = 1$; $\varphi_2 = \frac{r}{a} \cos \theta$ и дифференциальное уравнение изгиба имеет вид

$$Lw(r, \theta) = \frac{q(r, \theta) - p(r, \theta)}{D}; \quad L = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2,$$

то

$$(L\varphi_1, \varphi_1) = (L\varphi_2, \varphi_1) = (L\varphi_2, \varphi_2) = 0;$$

$$(f, \varphi_1) = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{q(r, \theta) - p(r, \theta)}{D} d\theta r dr = \frac{1}{D} \int_0^{2\pi} \int_0^a q(r, \theta) r dr d\theta - \frac{2\pi E_0 a}{(1-\nu_0^2)D} \alpha_{1,1}^0 A_0; \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} (f, \varphi_2) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{q(r, \theta) - p(r, \theta)}{D} \frac{r}{a} \cos \theta r dr d\theta = \frac{1}{D} \int_0^{2\pi} \int_0^a q(r, \theta) \frac{r}{a} \cos \theta r dr d\theta \\ &\quad - \frac{\pi E_0 a}{(1-\nu_0^2)D} \alpha_{11}^1 \frac{2}{9} A_1, \end{aligned} \quad (3.65)$$

где D - цилиндрическая жесткость пластинки.

В выражениях (3.64) и (3.65) первые слагаемые в правой части по физическому смыслу дают равнодействующую внешней нагрузки R и ее момент M относительно оси, проходящей через центр пластинки перпендикулярно прямой, соединяющей точку приложения равнодействующей с центром. Поэтому система уравнений К.Ректориса принимает вид

$$\begin{bmatrix} 2\alpha_{11}^0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9}\alpha_{11}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 a} \begin{bmatrix} R \\ M/a \end{bmatrix}$$

Откуда следует

$$A_0 = \frac{(1-\nu_0^2)R}{\pi E_0 a} \frac{1}{2\alpha_{11}^0}; \quad A_1 = \frac{9(1-\nu_0^2)M}{2a^2 E_0 \alpha_{11}^1}$$

В случае упругого однородного изотропного полупространства в (3.59) и (3.62) имеем

$$C_{ik}^0 = 0; \quad C_{ik}^1 = 0; \quad h = \infty; \quad \alpha_{11}^0 = \frac{1}{\pi}; \quad \alpha_{11}^1 = \frac{6}{\pi}$$

и

$$A_0 = \frac{(1-\nu_0^2)R}{2E_0 a}; \quad A_1 = \frac{3M(1-\nu_0^2)}{4\pi a^2 E_0},$$

что совпадает с точным решением [15].

Таким образом, для расчета круглого штампа на упругом основании под действием произвольной внешней нагрузки необходимо знать коэффициенты разложения $K(u)-1$ в ряды по сферическим функциям (3.56),(3.57).

Для упругого слоя, шарнирно соединенного с недеформируемым основанием на основании [13]

$$K(u)-1 = e^{-2u} \sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k; \quad b_0 = -1; \quad b_1 = -\frac{3}{2}; \quad b_2 = -1; \quad b_3 = -\frac{1}{3};$$

$$b_4 = 0; \quad b_5 = \frac{1}{18}; \quad \dots$$

Для $\frac{a}{h} = \frac{2}{3}$ получено

$$[C] = \begin{bmatrix} 1.60346 & -0.02913 & -0.00110 & \dots \\ -0.02913 & 0.15667 & 0.00035 & \dots \\ -0.00110 & 0.00035 & 0.04930 & \dots \\ \dots & & & \dots \end{bmatrix};$$

$$[\alpha^0] = \begin{bmatrix} 0.62578 & 0.11633 & 0.01313 & \dots \\ 0.11633 & 6.40443 & -0.04294 & \dots \\ 0.01313 & -0.04294 & 20.2852 & \dots \\ \dots & & & \dots \end{bmatrix};$$

$$[C_1] = \begin{bmatrix} 0.50899 & -0.00196 & 0.000002 & \dots \\ -0.00196 & 1.01065 & 0.00055 & \dots \\ 0.000002 & 0.00055 & 0.50233 & \dots \\ \dots & & & \dots \end{bmatrix};$$

$$[\alpha^1] = \begin{bmatrix} 1.96465 & 0.00382 & 0.00001 & \dots \\ 0.00382 & 0.98947 & 0.00108 & \dots \\ 0.00001 & 0.00108 & 1.99071 & \dots \\ \dots & & & \dots \end{bmatrix};$$

$$A_0 = \frac{1}{2\alpha_{11}^0} \frac{R(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 a};$$

$$A_1 = \frac{9}{2\alpha_{11}^1} \frac{M(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 a^2};$$

$$H_0^0 = \frac{R}{2\pi a^2};$$

$$H_1^1 = \frac{3M}{2\pi a^3};$$

$$H_2^0 = -0.011817 \frac{R}{2\pi a^2};$$

$$H_3^1 = 0.00194 \frac{3M}{2\pi a^3};$$

$$H_4^0 = -0.00069 \frac{R}{2\pi a^2};$$

$$H_5^1 = 0.00001 \frac{3M}{2\pi a^3};$$

...

Отметим, что из уравнений равновесия также следует

$$H_0^0 = \frac{R}{2\pi a^2}; \quad H_1^1 = \frac{3M}{2\pi a^3}.$$

§ 3.4. Контактная задача для круглой пластинки на упругом полупространстве при действии крестообразной нагрузки

Рассмотрим гибкую пластинку на упругом основании под действием симметричной внешней нагрузки (рис. 3.2). Интегральное уравнение для определения реактивных нормальных давлений в контактной зоне плиты в традиционной постановке [14], [26] можно записать в следующем виде

$$W(r, \varphi) = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a p(\rho, \theta) K(r, \rho, \varphi, \theta) \rho d\rho d\theta, \quad (3.66)$$

$p(\rho, \theta)$ - неизвестный закон распределения реактивных давлений;

$K(r, \rho, \varphi, \theta)$ - ядро упругого основания [26];

$W(r, \varphi)$ - осадки упругого основания, равные прогибам плиты.

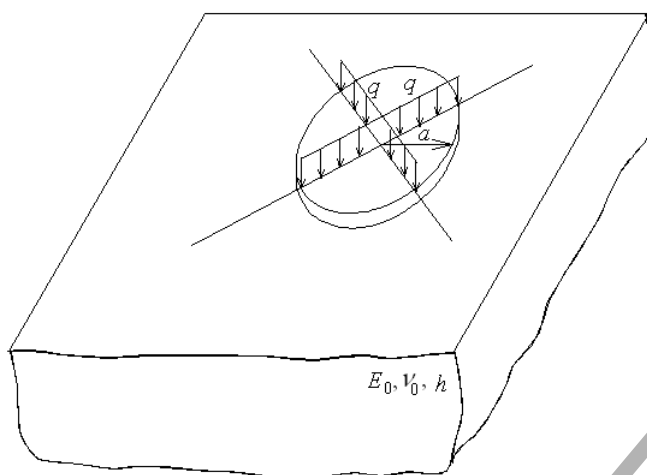


Рис.3.2. Круглая пластинка на упругом основании

Для упругого однородного изотропного полупространства [16]

$$\begin{aligned}
 K(r, \rho, \varphi, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta) + \rho^2}} = \\
 &= \int_0^\infty J_0\left(u\sqrt{r^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta) + \rho^2}\right) du = \\
 &= \int_0^\infty \left[J_0(ur)J_0(u\rho) + 2\sum_{k=1}^\infty J_k(ur)J_k(u\rho)\cos k(\varphi - \theta) \right] du
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Для крестообразной нагрузки (рис.3.2) распределение реактивных давлений в контактной зоне плиты примем

$$p(\rho, \theta) = p_0(\rho) + p_4(\rho) \cos 4\theta + p_8(\rho) \cos 8\theta + \dots, \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
 p_0(\rho) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}}} \sum_{m=0}^\infty H_{2m}^0 P_{2m}^0 \left(\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}} \right); \\
 p_4(\rho) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}}} \sum_{m=2}^\infty H_{2m}^4 P_{2m}^4 \left(\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}} \right);
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

$$p_8(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}}} \sum_{m=4}^\infty H_{2m}^8 P_{2m}^8 \left(\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}} \right);$$

...

где $P_k^\ell(z)$ - шаровая (сферическая) функция [16].

Подставим (3.67) и (3.69) в (3.66) и выполним интегрирование по θ и ρ . При этом необходимо использовать значения интегралов [16], [24]

$$\int_0^{2\pi} \cos k(\varphi - \theta) \cos 4m\theta d\theta = 0, \quad k \neq 4m; \quad (3.70)$$

$$= \pi \cos 4m\varphi, \quad k = 4m$$

$$\int_0^a J_{2m}(ur) \frac{P_{2\ell}^{2m} \left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right)}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} r dr = \frac{a^2}{2^{2m+\frac{1}{2}} \sqrt{ua}} \frac{\Gamma\left(\ell - m + \frac{1}{2}\right) \Gamma(2\ell + 2m + 1)}{\Gamma(\ell + m + 1) \Gamma(2\ell - 2m + 1)} J_{2\ell + \frac{1}{2}}(ua); \quad (3.71)$$

$$\int_0^\infty J_{2k+1}(ua) J_{4m}(ur) \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{r^{4m}}{\sqrt{2a}} \frac{\Gamma\left(2m + k + \frac{1}{2}\right)}{4m + \frac{1}{2} \Gamma(k - 2m) \Gamma(4m + 1)} {}_2F_1\left(2m + k + \frac{1}{2}, 2m - k; 4m + 1; \frac{r^2}{a^2}\right);$$

$${}_2F_1\left(2m + k + \frac{1}{2}, 2m - k; 4m + 1; \frac{r^2}{a^2}\right) = 2^{4m} \Gamma(4m + 1) \frac{a^{4m}}{r^{4m}} P_{2k}^{-4m} \left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right);$$

$$P_{2k}^{-4m} \left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right) = \frac{\Gamma(2k - 4m + 1)}{\Gamma(2k + 4m + 1)} P_{2k}^{4m} \left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right)$$

Получаем окончательно

$$W(r, \varphi) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} a \left[\sum_{k=0}^{\infty} H_{2k}^0 \frac{\Gamma^2\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(k + 1)} P_{2k}^0 \left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right) + \right.$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} H_{2k}^4 \frac{\Gamma\left(k - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{5}{2}\right)}{\Gamma(k + 3) \Gamma(k - 1)} P_{2k}^4 \left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right) \cos 4\varphi +$$

$$\left. \sum_{k=4}^{\infty} H_{2k}^8 \frac{\Gamma\left(k - \frac{7}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{9}{2}\right)}{\Gamma(k + 5) \Gamma(k - 3)} P_{2k}^8 \left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right) \cos 8\varphi + \dots \right] \quad (3.72)$$

Аналогично А.И. Цейтлину [36], представим осадки круглой плиты в виде ряда по собственным функциям дифференциального оператора изгибных колебаний круглой пластинки со свободными краями, т.е.

$$W(r, \varphi) = W_0(r) + W_4(r) \cos 4\varphi + W_8(r) \cos 8\varphi + \dots, \quad (3.73)$$

$$W_{2m}(r) = \sum_{i=1}^{\infty} W_{2m,i};$$

$$W_{2m,i} = A_{2m,i} \left[J_{2m} \left(\lambda_{2m,i} \frac{r}{a} \right) + C_{2m,i} I_{2m} \left(\lambda_{2m,i} \frac{r}{a} \right) \right] \quad (3.74)$$

$$W_{01} = \sqrt{2} A_{01}.$$

Здесь $C_{2m,i}$ зависит от $\lambda_{2m,i}$ и коэффициента Пуассона плиты. В табл.1.1 приведены $\lambda_{0,i}$. Остальные $\lambda_{2m,i}$ определялись численно из условия выполнения статических граничных условий. Подставим (3.74) в (3.72) и используем свойства рядов Фурье. Получаем отдельные интегральные уравнения, причем первое из них соответствует осесимметричной контактной задаче для круглой пластинки

$$\sqrt{2} A_{01} + \sum_{i=2}^{\infty} A_{0,i} \left[J_0 \left(\lambda_{0,i} \frac{r}{a} \right) + C_{0,i} I_0 \left(\lambda_{0,i} \frac{r}{a} \right) \right] = \frac{1-\nu_0^2}{E_0} a \sum_{k=0}^{\infty} H_{2k}^0 \frac{\Gamma^2 \left(k + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma^2(k+1)} P_{2k}^0 \left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right); \quad (3.75)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_{4i} \left[J_4 \left(\lambda_{4i} \frac{r}{a} \right) + C_{4i} I_4 \left(\lambda_{4i} \frac{r}{a} \right) \right] = \frac{1-\nu_0^2}{E_0} a \sum_{k=2}^{\infty} H_{2k}^4 \frac{\Gamma \left(k - \frac{3}{2} \right) \Gamma \left(k + \frac{5}{2} \right)}{\Gamma(k+3) \Gamma(k-1)} P_{2k}^4 \left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right); \quad (3.76)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_{8i} \left[J_8 \left(\lambda_{8i} \frac{r}{a} \right) + C_{8i} I_8 \left(\lambda_{8i} \frac{r}{a} \right) \right] = \frac{1-\nu_0^2}{E_0} a \sum_{k=4}^{\infty} H_{2k}^8 \frac{\Gamma \left(k - \frac{7}{2} \right) \Gamma \left(k + \frac{9}{2} \right)}{\Gamma(k+5) \Gamma(k-3)} P_{2k}^8 \left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right); \quad (3.77)$$

...

Отметим, что коэффициент в (3.75) A_{01} соответствует поступательному перемещению круглого штампа. Уравнения (3.75-3.77) решаются по стандартной процедуре способа ортогональных многочленов [26].

Обе части уравнений умножаются на $\frac{P_{2m}^{2n} \left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right) r dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}}$ и интегрируются в

пределах $(0, a)$ ($n=0, 2, 4$), ($m=n, n+1, n+2, \dots$). При этом используются свойства ортогональности сферических функций [16] и соотношения (3.71). В результате получаем уравнения связи между A_{mi} и H_{2k}^{2m} в таком виде

$$H_0^0 = \frac{E_0}{(1-\nu_0^2) a} \left[\frac{\sqrt{2}}{\pi} A_{01} + \frac{1}{\pi} \sum_{i=2}^{\infty} A_{0i} F_0(\lambda_{0i}) \right];$$

$$H_{2m}^0 = \frac{E_0}{(1-\nu_0^2)a} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(4m+1)\Gamma^2(m+1)}{\Gamma^2\left(m+\frac{1}{2}\right)} A_{0i} F_{2m}(\lambda_{0i}); \quad (m=1,2,\dots)$$

$$H_{4+2m}^4 = \frac{E_0}{(1-\nu_0^2)a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(4m+9)\Gamma(m+5)\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{9}{2}\right)} A_{4i} F_{4+2m}^4(\lambda_{4i}); \quad (3.78)$$

$$H_{8+2m}^8 = \frac{E_0}{(1-\nu_0^2)a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(4m+17)\Gamma(m+9)\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{17}{2}\right)} A_{8i} F_{8+2m}^8(\lambda_{8i}), \quad (m=0,1,2,\dots),$$

$$F_{4m+2k}^{4m}(\lambda_{4m,i}) = \frac{1}{a^2} \int_0^a \left[J_{4m}\left(\lambda_{4m,i} \frac{r}{a}\right) + C_{4m,i} I_{4m}\left(\lambda_{4m,i} \frac{r}{a}\right) \right] \frac{P_{4m+2k}^{4m}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}} r dr$$

Теперь используем подход К. Ректориса [25]. Применительно к поставленной задаче система уравнений К. Ректориса будет иметь вид, идентичный для каждого n (ввиду однотипности уравнений (3.75-3.77) и собственных функций. Ниже подробно рассмотрен только случай $n = 4$, поэтому для $n = 4$ система разрешающих уравнений имеет вид

$$\begin{bmatrix} (LW_{41}, W_{41}) & (LW_{41}, W_{42}) & (LW_{41}, W_{43}) & \dots \\ (LW_{42}, W_{41}) & (LW_{42}, W_{42}) & (LW_{42}, W_{43}) & \dots \\ (LW_{43}, W_{41}) & (LW_{43}, W_{42}) & (LW_{43}, W_{43}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{41} \\ A_{42} \\ A_{43} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(W_{41}, \frac{q(r, \theta) - \rho_4(r, \theta)}{D} \right) \\ \left(W_{42}, \frac{q(r, \theta) - \rho_4(r, \theta)}{D} \right) \\ \left(W_{43}, \frac{q(r, \theta) - \rho_4(r, \theta)}{D} \right) \\ \dots \end{bmatrix}, \quad (3.79)$$

где $LW_i = \Delta^2 W_i$, D – цилиндрическая жесткость плиты.

В силу ортогональности принятых функций для прогибов плиты (3.74)

$$\begin{aligned} (LW_{4i}, W_{4j}) &= \frac{\lambda_{4i}^4}{a^4} W_{4i}, & i = j; \\ &= 0, & i \neq j; \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\left(W_{4i}, \frac{P_4(r, \varphi)}{D} \right) = \int_0^{2\pi} \cos^2 4\varphi \int_0^a \left[J_4 \left(\lambda_{4i} \frac{r}{a} \right) + C_{4i} I_4 \left(\lambda_{4i} \frac{r}{a} \right) \right] r dr d\varphi = \pi a^2 \sum_{m=0}^{\infty} H_{4+2m}^4 \frac{P_{4+2m}^4 \left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right)}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} = \sum_{m=0}^{\infty} H_{4+2m}^4 F_{4+2m}^4(\lambda_{4i}) \quad (3.81)$$

Подставив в (3.81) выражение для H_{4+2m}^4 из (3.78), получим

$$\left(W_{4i}, \frac{P_4(r, \varphi)}{D} \right) = \frac{\pi E_0 a}{D(1-\nu_0^2)} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{4j} \frac{(9+4m)\Gamma(m+5)\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{9}{2}\right)} \cdot F_{4+2m,j}^4(\lambda_{4j}) F_{4+2m,i}^4(\lambda_{4i}) \quad (3.82)$$

Теперь рассмотрим вычисление $\left(W_{4i}, \frac{q(r, \varphi)}{D} \right)$. Для этого представим крестообразную нагрузку q в виде (рис. 3.3) равномерно распределенной по четырем секторам с углом 2α и интенсивностью $\frac{q}{\alpha a}$.

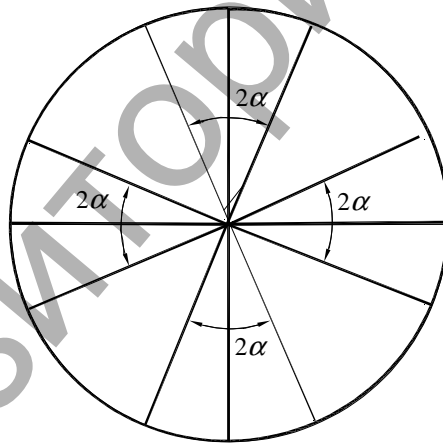


Рис.3.3. Преобразование нагрузки

Поэтому

$$\left(W_{4i}, \frac{P_4(r, \varphi)}{D} \right) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 4 \int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi \cos 4\varphi \int_0^a \frac{q}{\alpha a} \left[J_4 \left(\lambda_{4i} \frac{r}{a} \right) + C_{4i} I_4 \left(\lambda_{4i} \frac{r}{a} \right) \right] r dr = \quad (3.83)$$

$$8qa \frac{\lambda_{4i}^4}{6 \cdot 2^4 \Gamma(5)} \left[{}_1F_2 \left(3; 4, 5; -\frac{\lambda_{4i}^2}{4} \right) + C_{4i} {}_1F_2 \left(3; 4, 5; \frac{\lambda_{4i}^2}{4} \right) \right]$$

Система разрешающих уравнений для определения A_{4i} в матричной форме получается в таком виде

$$\begin{bmatrix} 0,035581\pi + \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(9+4n)\Gamma(n+1)\Gamma(n+5)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{9}{2}\right)} F_{4+2n,1}^2(\lambda_{41}) & \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(9+4n)\Gamma(n+1)\Gamma(n+5)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{9}{2}\right)} F_{4+2n,2}^2(\lambda_{42}) F_{4+2n}^2(\lambda_{41}) \dots \\ \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(9+4n)\Gamma(n+1)\Gamma(n+5)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{9}{2}\right)} F_{4+2n,2}^2(\lambda_{42}) F_{4+2n}^2(\lambda_{41}) & 0,033804\pi + \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(9+4n)\Gamma(n+1)\Gamma(n+5)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{9}{2}\right)} F_{4+2n}^2(\lambda_{42}) \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{41} \\ A_{42} \\ \dots \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{8q(1-\nu_0^2)}{6\pi E_0 2^4 \Gamma(5)} \beta \begin{bmatrix} \lambda_{41}^4 \left[{}_1F_2\left(3; 4; 5; -\frac{\lambda_{41}^2}{4}\right) + C_{4i} {}_1F_2\left(3; 4; 5; \frac{\lambda_{41}^2}{4}\right) \right] \\ \lambda_{42}^4 \left[{}_1F_2\left(3; 4; 5; -\frac{\lambda_{42}^2}{4}\right) + C_{4i} {}_1F_2\left(3; 4; 5; \frac{\lambda_{42}^2}{4}\right) \right] \\ \dots \end{bmatrix}; \quad (3.84)$$

В качестве примера рассмотрим круглую пластинку на упругом полу-пространстве с характеристикой $\beta = 1000$. При $\nu_p = 0.3$ имеем

$$\begin{array}{lll} \lambda_{01} = 0 & \lambda_{41} = 4.6728110 & \lambda_{81} = 9.0390454 \\ \lambda_{02} = 3.0005285 & \lambda_{42} = 8.5756990 & \lambda_{82} = 13.4828015 \\ \lambda_{03} = 6.2002579 & \lambda_{43} = 11.9344435 & \lambda_{83} = 17.0859176 \\ \lambda_{04} = 9.3675093 & \lambda_{44} = 15.1996864 & \lambda_{84} = 20.5103651 \\ \lambda_{05} = 12.522712 & & \end{array}$$

Система разрешающих уравнений для определения A_{0i} :

$$\begin{bmatrix} 0.450158 & 0.013638 & -0.004265 & \dots \\ 27.2757 & 137.655 & -16.8116 & \dots \\ -8.53172 & -16.8116 & 476.152 & \dots \\ \dots & & & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{01} \\ A_{02} \\ A_{03} \\ \dots \end{bmatrix} = \frac{q(1-\nu_0^2)}{E_0} \begin{bmatrix} 0.63662 \\ 4.94753 \cdot 10^{-13} \\ -5.83102 \cdot 10^{13} \\ \dots \end{bmatrix};$$

Система разрешающих уравнений для определения A_{4i} :

$$\begin{bmatrix} 54.5953 & -0.26062 & 0.109862 & \dots \\ -0.26062 & 574.382 & -0.126308 & \dots \\ 0.109862 & -0.126308 & 1619.40 & \dots \\ \dots & & & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{41} \\ A_{42} \\ A_{43} \\ \dots \end{bmatrix} = \frac{q(1-\nu_0^2)}{E_0} \begin{bmatrix} 272.404 \\ 153.267 \\ 67.4653 \\ \dots \end{bmatrix};$$

Система разрешающих уравнений для определения A_{8i} :

$$\begin{bmatrix} 332.218 & -0.001779 & 0.000932 & \dots \\ -0.001779 & 2042.60 & -0.000786 & \dots \\ 0.000932 & -0.000786 & 4491.99 & \dots \\ \dots & & & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{81} \\ A_{82} \\ A_{83} \\ \dots \end{bmatrix} = \frac{q(1-\nu_0^2)}{E_0} \begin{bmatrix} 160.466 \\ 122.964 \\ 65.6983 \\ 50.4324 \\ \dots \end{bmatrix}.$$

Получено:

$$A_{01} = 1.42285 \frac{q(1-\nu_0^2)}{E_0}$$

$$A_{41} = 4.990726 \frac{q(1-\nu_0^2)}{E_0}$$

$$A_{02} = -0.27989 \frac{q(1-\nu_0^2)}{E_0}$$

$$A_{42} = 0.269001 \frac{q(1-\nu_0^2)}{E_0}$$

$$A_{03} = 0.015601 \frac{q(1-\nu_0^2)}{E_0}$$

$$A_{43} = 0.041343 \frac{q(1-\nu_0^2)}{E_0}$$

$$A_{04} = -0.002120 \frac{q(1-\nu_0^2)}{E_0}$$

$$A_{44} = 0.013496 \frac{q(1-\nu_0^2)}{E_0}$$

$$A_{05} = 0.000513 \frac{q(1-\nu_0^2)}{E_0}$$

$$A_{81} = 0.483009 \frac{q(1-\nu_0^2)}{E_0}$$

$$A_{83} = 0.0146256 \frac{q(1-\nu_0^2)}{E_0}$$

$$A_{82} = 0.060200 \frac{q(1-\nu_0^2)}{E_0}$$

$$A_{84} = 0.0062773 \frac{q(1-\nu_0^2)}{E_0}$$

На рис.3.4 приведены линии равных осадков для рассчитываемой плиты от крестообразной нагрузки.

В настоящей главе автор не рассматривал вопросы существования и сходимости решений усеченных систем, так как в [26] доказано, что механизм реализации способа ортогональных многочленов приводит к регулярным бесконечным системам, которые можно решать способом усечения. При иной модели упругого основания следует представить [14]

$$K(r, \rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta) + \rho^2}} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{ml}^{jl} P_m^j \left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right) P_n^l \left(\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}} \right),$$

что несколько изменит вид уравнений для определения коэффициентов H_m^k и A_n^j , однако последовательность решения останется прежней.

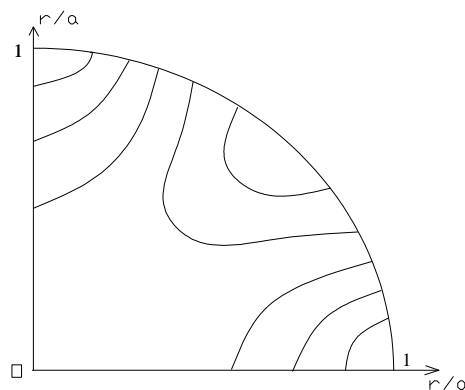


Рис.3.4 Линии равных осадков в плите от крестообразной нагрузки (для одной четверти плиты)

ГЛАВА 4. МЕТОД РИТЦА В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ

Одним из наиболее распространенных типов плитных фундаментов являются прямоугольные плиты. Однако до сих пор отсутствует точное решение для прямоугольной жесткой плиты на упругом однородном изотропном полупространстве [26]. Даже для гибкой прямоугольной плиты на основании Винклера тоже не существует точного решения [22]. Основную трудность в решении этой задачи вносит невозможность точно выполнить статические граничные условия на свободных краях плиты. Ниже будет показано, как использование метода Ритца позволяет обойти эту проблему.

§4.1. Метод Ритца в контактной задаче для прямоугольной плиты конечной жесткости

Рассмотрим прямоугольную плиту размерами $2a \times 2b$ на упругом основании с распределительными свойствами под действием внешней, нормальной к срединной плоскости плиты нагрузки. Ставится задача определения реактивных нормальных давлений в контактной зоне плиты, ее прогибов и усилий в ней. Задача решается в традиционной линейной постановке [15] при неучете касательных реактивных напряжений в контактной зоне плиты.

Зададимся функцией прогибов прямоугольной плиты в виде двойного ряда по полиномам Чебышева первого рода

$$W(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} T_r\left(\frac{x}{a}\right) T_s\left(\frac{y}{b}\right), \quad (4.1)$$

где A_{rs} – неизвестные коэффициенты, зависящие от жесткости и размеров плиты, внешней нагрузки, свойств упругого основания.

Как известно [23], система полиномов Чебышева (4.1) полна и удовлетворяет характеру прогибов плиты в рассматриваемой задаче.

Энергия изгиба плиты U определится по формуле

$$U = \frac{D}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu_p) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy, \quad (4.2)$$

где D, ν_p – цилиндрическая жесткость плиты и коэффициент Пуассона материала плиты.

Энергия деформаций упругого основания A численно равна работе реактивных нормальных давлений в контактной зоне плиты [39]. Поэтому

$$A = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b p(x, y) w(x, y) dx dy, \quad (4.3)$$

где $p(x, y)$ – неизвестный закон распределения реактивных давлений в контактной зоне плиты.

В дальнейшем нам необходимо работу реактивных давлений A выразить через квадратичную функцию от коэффициентов A_{rs} разложения (4.1). Для этого решим вспомогательное интегральное уравнение контактной задачи теории упругости для прямоугольной плиты

$$A_{rs} T_r \left(\frac{x}{a} \right) T_s \left(\frac{y}{b} \right) = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \int_{-a}^a \int_{-b}^b p(\xi, \eta) K(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta, \quad (4.4)$$

где $\frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} K(x-\xi, y-\eta)$ – ядро упругого основания (функция Грина).

Будем считать упругое основание линейно деформируемым, для которого справедливо представление

$$K(x-\xi, y-\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} C_{mp}^{nq}(\alpha) T_m \left(\frac{x}{a} \right) T_n \left(\frac{y}{b} \right) T_p \left(\frac{\xi}{a} \right) T_q \left(\frac{\eta}{b} \right); \quad \alpha = \frac{a}{b}. \quad (4.5)$$

Отметим, что для большинства моделей линейно деформируемого основания ядро (4.5) является функцией расстояния между точкой приложения единичной силы на поверхности основания и точкой поверхности, где определяется перемещение. То есть,

$$K(x-\xi, y-\eta) = f \left(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right) \quad (4.6)$$

Для таких моделей в разложении (4.5) останутся полиномы, номера индексов которых удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} m + p &= \text{четному числу;} \\ n + q &= \text{четному числу.} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Иначе говоря, m и p , n и q должны быть одновременно четными либо нечетными числами. Тогда разложение (4.5) разбивается на четыре отдельных ряда, каждый из которых удовлетворяет условиям симметрии или антисимметрии относительно одной или двух осей симметрии прямоугольной плиты.

По-видимому, впервые для упругого основания в виде изотропного однородного полупространства представление (4.5) получил В.М. Сеймов [28]. Запишем интегральное представление В.М. Сеймова для симметричной части ядра (4.5)

$$C_{2m,2q}^{2n,2q}(\alpha) = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} J_{2m}(\alpha\xi \cos \varphi) J_{2n}(\xi \sin \varphi) J_{2p}(\alpha\xi \cos \varphi) J_{2q}(\xi \sin \varphi) d\varphi d\xi \quad (4.8)$$

Перепишем парное произведение функций Бесселя (4.8) в таком виде

$$J_{2m}(\alpha\xi \cos \varphi) J_{2n}(\xi \sin \varphi) = J_{2m}\left(\xi\sqrt{1+\alpha^2} \cos \varphi \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right) J_{2n}\left(\xi\sqrt{1+\alpha^2} \sin \varphi \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right) \quad (4.9)$$

и используем представление W.N. Baily [4] для произведения двух функций Бесселя

$$\begin{aligned} \frac{z}{2} J_{\mu}(z \cos \varphi \cos \phi) J_{\nu}(z \sin \varphi \sin \phi) &= (\cos \varphi \cos \phi)^{\mu} (\sin \varphi \sin \phi)^{\nu} \times \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\mu + \nu + 2n + 1) J_{\mu+\nu+2n+1}(z) &\frac{\Gamma(\mu + \nu + n + 1) \Gamma(\nu + n + 1)}{n! \Gamma(\mu + n + 1) [\Gamma(\nu + 1)]^2} \times \\ {}_2F_1(-n, \mu + \nu + n + 1; \nu + 1; \sin^2 \varphi) &{}_2F_1(-n, \mu + \nu + n + 1; \nu + 1; \sin^2 \phi) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Если в (4.9) принять $z = \xi\sqrt{1+\alpha^2}$; $\cos \phi = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$; $\sin \phi = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ и ис-

пользовать выражение (4.10), то, после аналогичной операции с другим произведением функций Бесселя в выражении (4.8), можно выполнить интегрирование по ξ и после упрощений получить более простую формулу для коэффициентов разложения (4.5). Автором настоящей статьи найдено, что представление (4.8) В.М. Сеймова справедливо также для антисимметричной части ядра (4.5). Поэтому запишем окончательную

формулу для коэффициентов разложения (4.5) в таком виде

$$C_{m,p}^{n,q}(\alpha) = -\beta_{mp}^{nq} \frac{128}{\pi^2 \sqrt{1+\alpha^2}} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \right)^{m+p} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \right)^{n+q} \times$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i!k!(m+n+2i+1)(m+n+i)!(q+p+2k+1)(q+p+k)!}{(m+i)!(n+i)!(q+k)!(p+k)!} \times \quad (4.11)$$

$$\frac{P_k^{(q,p)} \left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1} \right) P_i^{(n,m)} \left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1} \right) \int_0^{\pi} \cos^{m+n} \varphi \sin^{n+q} \varphi P_k^{(q,p)}(\cos 2\varphi) P_i^{(n,m)}(\cos 2\varphi) d\varphi}{(2i-1-2k+m+n-p-q)(1+2i-2k+m+n-p-q)(1+2i+2k+m+n+p+q)(3+2i+2k+m+n+p+q)};$$

$$\beta_{00}^{00} = 1; \quad \beta_{i0}^{00} = \beta_{00}^{i0} = \beta_{0i}^{00} = \beta_{00}^{0i} = 2; \quad \beta_{ik}^{00} = \beta_{i0}^{k0} = \beta_{00}^{ik} = \beta_{0i}^{k0} = \beta_{0i}^{0k} = \beta_{i0}^{0k} = 4;$$

$$\beta_{mn}^{i0} = \beta_{0i}^{mn} = \beta_{i0}^{mn} = \beta_{mn}^{0i} = 8; \quad \beta_{mn}^{ik} = 16,$$

где $P_k^{(q,p)}(\cos 2\varphi)$ – полиномы Якоби [16].

Особое значение имеют формулы для коэффициентов $C_{00}^{00}(\alpha)$ и $C_{11}^{00}(\alpha)$, которые в основном определяют перемещения прямоугольного штампа на упругом полупространстве под действием центрально приложенной силы и момента. Для них из (4.11) получено после упрощений

$$C_{00}^{00}(\alpha) = \frac{32}{\pi^2 (1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (1+2i)(1+2k) \frac{P_i \left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1} \right) P_k \left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1} \right)}{(1+2k-2i)(1+2i-2k)(1+2i+2k)(3+2i+2k)} \times$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_i(\cos 2\varphi) P_k(\cos 2\varphi) d\varphi; \quad (4.12)$$

$$C_{11}^{00}(\alpha) = \frac{512\alpha^2}{\pi^2 (1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+i)(1+k) P_i^{(0,1)} \left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1} \right) P_k^{(0,1)} \left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1} \right)}{(2k-2i+1)(2i-2k+1)(3+2i+2k)(5+2i+2k)} \times$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi P_i^{(0,1)}(\cos 2\varphi) P_k^{(0,1)}(\cos 2\varphi) d\varphi,$$

Здесь (4.12) $P_i(z)$ – полиномы Лежандра [16].

Для линейного u_0 и углового φ_{0y} перемещений прямоугольного штампа на упругом полупространстве можно на этом этапе получить приближенные формулы (смысл R, M_y будет раскрыт ниже)

$$u_0 = \frac{R(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 a} C_{00}^{00}(\alpha); \quad \varphi_{0y} = \frac{M_y(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 a^3} C_{11}^{00}(\alpha) \quad (4.13)$$

Будем искать распределение реактивных давлений в контактной зоне плиты в виде двойного ряда по полиномам Чебышева 1 рода с весом с неизвестными коэффициентами

$$p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} B_{ik} T_i\left(\frac{x}{a}\right) T_k\left(\frac{y}{b}\right) \quad (4.14)$$

Тогда, вследствие ортогональности принятых полиномов Чебышева, из уравнений равновесия прямоугольного штампа в целом можно сразу найти

$$B_{00} = \frac{R}{\pi^2 ab}; \quad B_{01} = \frac{2M_y}{\pi^2 a^2 b}; \quad B_{10} = \frac{2M_x}{\pi^2 ab^2} \quad (4.15)$$

где R, M_y, M_x – равнодействующая внешних сил, приложенных к плите, и моменты этой равнодействующей относительно осей Ox и Oy .

Работа реактивных давлений (4.3) при представлении (4.1) и (4.14) после интегрирования по x и y выразится формулой

$$A = \frac{ab}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{ik}^{00} B_{ik} A_{ik} \quad (4.16)$$

Далее необходимо выразить B_{ik} через A_{ik} . Для этого решим интегральное уравнение

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} T_r\left(\frac{x}{a}\right) T_s\left(\frac{y}{b}\right) = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \int_{-a}^a \int_{-b}^b K(x-\xi, y-\eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.17)$$

Подставляя в (4.17) представления (4.5) и (4.14), выполним интегрирование по ξ и η с учетом ортогональности полиномов Чебышева первого рода. В полученном выражении приравняем коэффициенты при полиномах Чебышева одинакового порядка [26]. В итоге получаем беско-

нечную систему линейных алгебраических уравнений такого вида

$$\begin{cases} A_{00} = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} b \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{ik}^{00} B_{ik} C_{0i}^{0k}(\alpha) \\ A_{rs} = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} b \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{ik}^{00} B_{ik} C_{ri}^{sk}(\alpha) \end{cases} \quad (4.18)$$

Решение усеченной системы (4.18) позволяет выразить коэффициенты разложения (4.14)

$$B_{ik} = \frac{\pi E_0}{(1 - \nu_0^2)} b \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} \alpha_{tu} A_{t-1, u-1}, \quad [\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \dots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \dots \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \dots \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \dots \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

где α_{tu} являются элементами обратной матрицы

$$[\alpha] = \frac{1}{\pi^2} \begin{bmatrix} C_{00}^{00} & \frac{1}{2} C_{01}^{00} & \frac{1}{2} C_{02}^{00} & \dots & \frac{1}{2} C_{00}^{01} & \frac{1}{4} C_{01}^{01} & \frac{1}{4} C_{02}^{10} & \dots \\ C_{10}^{00} & \frac{1}{2} C_{11}^{00} & \frac{1}{2} C_{12}^{00} & \dots & \frac{1}{2} C_{10}^{01} & \frac{1}{4} C_{11}^{01} & \frac{1}{4} C_{12}^{01} & \dots \\ C_{20}^{00} & \frac{1}{2} C_{21}^{00} & \frac{1}{2} C_{22}^{00} & \dots & \frac{1}{2} C_{20}^{01} & \frac{1}{4} C_{21}^{01} & \frac{1}{4} C_{22}^{01} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{00}^{10} & \frac{1}{2} C_{01}^{10} & \frac{1}{2} C_{02}^{10} & \dots & \frac{1}{2} C_{00}^{11} & \frac{1}{4} C_{01}^{11} & \frac{1}{4} C_{02}^{11} & \dots \\ C_{10}^{10} & \frac{1}{2} C_{11}^{10} & \frac{1}{2} C_{12}^{10} & \dots & \frac{1}{2} C_{10}^{11} & \frac{1}{4} C_{11}^{11} & \frac{1}{4} C_{12}^{11} & \dots \\ C_{20}^{10} & \frac{1}{2} C_{21}^{10} & \frac{1}{2} C_{22}^{10} & \dots & \frac{1}{2} C_{02}^{11} & \frac{1}{4} C_{12}^{11} & \frac{1}{4} C_{22}^{11} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{10}^{20} & \frac{1}{2} C_{11}^{20} & \frac{1}{2} C_{12}^{20} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}^{-1}$$

Подставим (4.19) в (4.16). Получим для работы A квадратичную функцию от A_{rs} . Функционал полной энергии плиты, основания и дейст-

вующей на них нагрузки определится по формуле

$$\mathcal{E} = U + A + \Pi, \quad (4.20)$$

где $\Pi = - \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b q(x, y) w(x, y) dx dy$ и $q(x, y)$ – действующая на плиту внешняя нагрузка.

Дифференцируем \mathcal{E} по каждому из коэффициентов A_{rs} . Получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\vec{A}[\delta] = \vec{P} \quad (4.21)$$

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \dots \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} \dots \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} \dots \\ \dots & & & \end{bmatrix};$$

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & \dots & A_{10} & A_{11} & A_{12} & \dots & A_{20} & A_{21} & A_{22} & \dots \end{bmatrix}$$

Вектор свободных членов \vec{P} в (4.21) определяется видом внешней нагрузки.

§4.2. Пример 4.1. Расчет прямоугольной плиты на упругом полупространстве

Реализацию предлагаемого подхода проведем для квадратной плиты ($b=a$), загруженной равномерно распределенной нагрузкой. Итак, принимаем

$$\vec{A}^T = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{20} & A_{02} & A_{22} & A_{40} & A_{42} & A_{44} & A_{04} & A_{24} \end{bmatrix}; \quad (4.22)$$

$$\vec{B}^T = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{20} & B_{02} & B_{22} & B_{40} & B_{42} & B_{44} & B_{04} & B_{24} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Далее получено:

$$\delta_{11} = \beta \alpha_{11}; \quad \delta_{12} = \beta \frac{2\alpha_{12} + \alpha_{21}}{2}; \quad \delta_{13} = \beta \frac{2\alpha_{13} + \alpha_{31}}{2}; \quad \delta_{14} = \beta \frac{2\alpha_{14} + \alpha_{41}}{2}; \quad \dots$$

$$\delta_{21} = \delta_{21}; \quad \delta_{22} = \frac{1}{2} \beta \alpha_{22} + \frac{64}{\pi^2}; \quad \delta_{23} = \frac{1}{4} \beta (\alpha_{23} + \alpha_{32}) + \frac{32}{\pi^2} (2 - \gamma);$$

$$\delta_{24} = \frac{1}{8} \beta (2\alpha_{24} + \alpha_{42}) - \frac{32}{3\pi^2} (4 - \gamma); \quad \dots$$

$$\delta_{31} = \delta_{13}; \quad \delta_{32} = \delta_{23}; \quad \delta_{33} = \frac{1}{2} \beta \alpha_{33} + \frac{64}{\pi^2}; \quad \delta_{34} = \frac{1}{8} \beta (2\alpha_{33} + \alpha_{43}) - \frac{32}{3\pi^2} (4 - \gamma); \quad \dots \quad (4.24)$$

$$\delta_{41} = \delta_{14}; \quad \delta_{42} = \delta_{24}; \quad \delta_{43} = \delta_{34}; \quad \delta_{44} = \frac{1}{4} \beta \alpha_{44} + \frac{64}{45\pi^2} [42 + 5(2 + 15\gamma)]; \quad \dots$$

...

$\beta = \frac{\pi E_0 a^3}{(1-\nu_0^2)D}$ показатель гибкости по М.И. Горбунову-Посадову [15];

$$\gamma = 2 - \nu_p;$$

При принятых значениях исходных данных получено

$$[\delta] = \begin{bmatrix} 1.35751 & 0.01575 & 0.01575 & 0.00481 & -0.00245 & 0.00071 & 0.00045 & -0.00245 & 0.00071 \\ 0.03150 & 0.10795 & 0.00968 & 0.00784 & -0.00066 & 0.00136 & 0.00058 & 0.00157 & 0.00029 \\ 0.03150 & 0.00968 & 0.10795 & 0.00784 & 0.00157 & 0.00029 & 0.00058 & -0.00066 & 0.00136 \\ 0.01926 & 0.01568 & 0.01568 & 0.02122 & 0.00318 & 0.00146 & 0.00092 & 0.00318 & 0.00146 \\ -0.00490 & -0.00066 & 0.00157 & 0.00159 & 0.05881 & 0.00629 & 0.00085 & 0.00147 & 0.00084 \\ 0.00283 & 0.00271 & 0.00058 & 0.00146 & 0.01259 & 0.01349 & 0.00165 & 0.00167 & 0.00104 \\ 0.00178 & 0.00115 & 0.00115 & 0.00092 & 0.00171 & 0.00165 & 0.00959 & 0.00171 & 0.00165 \\ -0.00490 & 0.00157 & -0.00066 & 0.00159 & 0.00147 & 0.00084 & 0.00085 & 0.05881 & 0.00629 \\ 0.00283 & 0.00058 & 0.00271 & 0.00146 & 0.00167 & 0.00104 & 0.00165 & 0.01259 & 0.01349 \end{bmatrix}$$

И обратная ей матрица

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 0.07524 & -0.00854 & -0.00854 & -0.01089 & 0.00468 & -0.00379 & -0.00096 & 0.00468 & -0.00379 \\ -0.01709 & 0.99778 & -0.03725 & -0.34934 & 0.04801 & -0.08269 & -0.01798 & -0.01447 & 0.03344 \\ -0.01709 & -0.03725 & 0.99778 & -0.34934 & -0.01447 & 0.03342 & -0.01798 & 0.04801 & -0.08269 \\ -0.04357 & -0.69868 & -0.69868 & 5.38668 & -0.18757 & -0.33556 & -0.28156 & -0.18757 & -0.33556 \\ 0.00936 & 0.04801 & -0.01447 & -0.09378 & 1.92046 & -0.88660 & -0.00557 & -0.01105 & -0.03484 \\ -0.021515 & -0.16537 & 0.06685 & 0.33556 & -1.77319 & 8.56540 & -1.20886 & -0.06968 & -0.33547 \\ -0.00385 & -0.03597 & -0.03597 & -0.28156 & -0.01115 & -1.20886 & 11.0113 & -0.01115 & -1.20886 \\ 0.00936 & -0.01447 & 0.04801 & -0.09378 & -0.01105 & -0.03484 & -0.00558 & 1.922046 & -0.88660 \\ -0.01515 & 0.06685 & 0.16537 & 0.33556 & -0.06968 & -0.033547 & -1.20886 & -1.77319 & 8.56640 \end{bmatrix}$$

Вектор свободных членов:

$$\vec{P}^T = \frac{4qa^4}{\pi^2 D} \left[1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{45} + \frac{1}{225} - \frac{1}{15} + \frac{1}{45} \right] \quad (4.25)$$

После решения имеем при $\beta = 10$ для коэффициентов рядов (4.1) и (4.14)

$$\vec{A}^T = \frac{qa^4}{D} [5.54787 \quad -0.023808 \quad -0.023808 \quad 0.045441 \quad -0.036083 \quad 0.0054167 \quad -0.0042283 \quad -0.036083 \quad 0.0054168]$$

$$\vec{B}^T = q [0.405285 \quad -0.13509 \quad -0.13509 \quad 0.04503 \quad -0.02702 \quad 0.009006 \quad 0.001801 \quad -0.02702 \quad 0.009006]$$

На рисунке 4.1 приведена поверхность прогибов квадратной плиты при действии равномерно распределенной нагрузки.

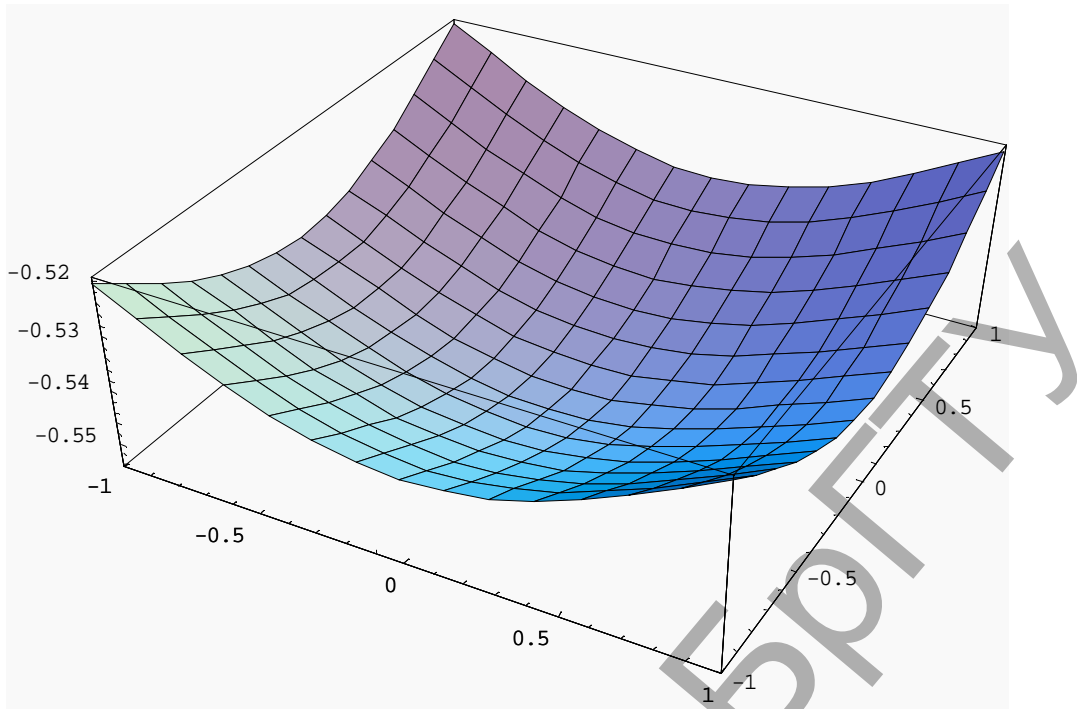


Рис. 4.1. Поверхность осадок квадратной плиты от действия равномерно распределенной нагрузки в долях от $\frac{qa^4}{D}$

Рассмотрим подробнее случай симметрично нагруженного равномерно распределенной нагрузкой q прямоугольного штампа ($D = \infty, \beta = 0$). Из (4.21) при $\beta = 0$ сразу получаем при $R = 4qab$

$$\frac{\pi E_0 a^3}{(1-\nu_0^2) D \alpha_{11}} A_{00} = \frac{Ra^2}{\pi^2 D} \quad (4.26)$$

и

$$A_{00} = \frac{R(1-\nu_0^2)}{\pi^3 E_0 a} \frac{1}{\alpha_{11}}, \quad (4.27)$$

где α_{11} есть первый член обратной матрицы (4.19). Остальные A_{ik} равны нулю.

Тогда из (4.18) имеем систему для определения коэффициентов разложения (4.14)

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{00} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} a \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2i,2k}^{00} B_{2i,2k} C_{0,2i}^{0,2k}(\alpha) \\ 0 = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} a \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2i,2k}^{00} B_{2i,2k} C_{2r,2i}^{2s,2k}(\alpha) \end{array} \right. \quad r=1,2,3,\dots; \quad s=1,2,3,\dots; \quad (4.28)$$

Из решения этой системы следует, что распределение реактивных давлений под подошвой прямоугольного штампа определяется рядом (4.14) при $\beta = 0$. Однако, если следовать результатам В.М. Файнбурда [33], то

$$B_{00} = \frac{R}{\pi^2 ab}, \quad \text{остальные } B_{2i,2k} = 0 \quad (4.29)$$

Из (4.28) результат В.М. Файнбурда не следует. Поэтому результаты В.М. Файнбурда, видимо, следует считать приближенными, так как они основываются на решении усеченной системы наименьшего порядка.

§4.3. Перемещения прямоугольного штампа на произвольном упругом основании

Существующие нормативные документы ограничивают величину кренов и перемещений зданий и сооружений вследствие осадок основания [29]. Ниже дается теоретическое решение для угла поворота и перемещения прямоугольного штампа, справедливое для любых моделей упругого основания.

Рассмотрим прямоугольный штамп на произвольном упругом основании. Обозначим R, M_y - равнодействующая внешней нагрузки и ее момент относительно оси ОУ. Будем искать перемещения штампа при неучете касательных напряжений в контактной зоне штампа.

Принимаем закон распределения контактных напряжений под штампом в виде двойного ряда по полиномам Чебышева 1 рода с весом (4.14)

$$p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} B_{ik} T_i\left(\frac{x}{a}\right) T_k\left(\frac{y}{b}\right)$$

Тогда из уравнений равновесия вследствие ортогональности принятых полиномов сразу следует

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b p(x, y) dx dy = R, \quad B_{00} = \frac{R}{\pi^2 ab}; \quad (4.30)$$

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b x p(x, y) dx dy = M_y, \quad B_{10} = \frac{2M_y}{\pi^2 a^2 b} \quad (4.31)$$

Очевидно, перемещения прямоугольного штампа описываются уравнением

$$W(x, y) = A_{00} + A_{10} \frac{x}{a} \quad (4.32)$$

Согласно подходу К. Ректориса на основании (1.81) следует принять

$$\varphi_1 = 1; \quad \varphi_2 = \frac{x}{a} \quad (4.33)$$

Система уравнений для определения A_{00}, A_{10} принимает вид

$$\begin{bmatrix} (L\varphi_1, \varphi_1) & (L\varphi_1, \varphi_2) \\ (L\varphi_2, \varphi_1) & (L\varphi_2, \varphi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{00} \\ A_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_1, f) \\ (\varphi_2, f) \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

$$\text{где } L = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}; \quad f = \frac{q(x, y) - p(x, y)}{D}$$

Последовательно находим

$$(L\varphi_1, \varphi_1) = (L\varphi_1, \varphi_2) = (L\varphi_2, \varphi_1) = (L\varphi_2, \varphi_2) = 0;$$

$$\begin{aligned} (\varphi_1, f) &= \left(\varphi_1, \frac{q(x, y) - p(x, y)}{D} \right) = \frac{1}{D} \int_{-a}^a \int_{-b}^b q(x, y) dx dy - \frac{1}{D} \int_{-a}^a \int_{-b}^b p(x, y) dx dy = \\ &= \frac{1}{D} (R - \pi^2 ab B_{00}); \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$(\varphi_2, f) = \left(\frac{x}{a}, \frac{q(x, y) - p(x, y)}{D} \right) = \frac{1}{D} \left(M_y - \frac{\pi^2}{2} a^2 b B_{10} \right)$$

Теперь необходимо выразить B_{ik} через A_{mn} . Для этого решим интегральное уравнение контактной задачи для прямоугольного штампа

$$A_{00} + A_{10} \frac{x}{a} = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0 a} \int_{-a}^a \int_{-b}^b p(\xi, \eta) K(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (4.36)$$

Как и ранее (4.5), принимаем

$$K(x - \xi, y - \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} C_{mp}^{nq}(\alpha) T_m \left(\frac{x}{a} \right) T_n \left(\frac{y}{b} \right) T_p \left(\frac{\xi}{a} \right) T_q \left(\frac{\eta}{b} \right) \quad (4.37)$$

Подставим (4.14) и (4.37) в (4.36) и выполним интегрирование по ξ и η .

После интегрирования получаем

$$A_{00} + A_{10} \frac{x}{a} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} b \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{mi}^{nk}(\alpha) \beta_{ik} B_{ik} T_m\left(\frac{x}{a}\right) T_n\left(\frac{y}{b}\right),$$

$$\beta_{00} = \pi^2; \quad \beta_{0k} = \beta_{i0} = \frac{\pi^2}{2}; \quad \beta_{ik} = \frac{\pi^2}{4} \quad (4.38)$$

Умножим обе части (4.38) на $\frac{T_r\left(\frac{x}{a}\right) T_s\left(\frac{y}{b}\right)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} dx dy$ и проинтегрируем по

x и y по площади прямоугольной плиты. Получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений следующего вида

$$[C] \vec{B} = \vec{A} \quad (4.39)$$

$$[C] = \pi^2 \begin{bmatrix} C_{00}^{00} & \frac{1}{2} C_{01}^{00} & \frac{1}{2} C_{02}^{00} \dots & \frac{1}{4} C_{01}^{01} \dots \\ C_{10}^{00} & \frac{1}{2} C_{11}^{00} & \frac{1}{2} C_{12}^{00} \dots & \frac{1}{4} C_{11}^{01} \dots \\ C_{20}^{00} & \frac{1}{2} C_{21}^{00} & \dots & \\ \dots & & & \end{bmatrix};$$

$$\vec{B} = \frac{(1-\nu_0^2) b}{\pi E_0} [B_{00} \quad B_{10} \quad B_{20} \dots B_{01} \quad B_{11} \quad B_{12} \dots]; \quad \vec{A} = [A_{00} \quad A_{10} \dots];$$

Решение (4.39) можно записать в такой форме

$$B_{00} = \frac{E_0}{\pi(1-\nu_0^2) b} (\alpha_{11} A_{00} + \alpha_{12} A_{10}); \quad B_{10} = \frac{E_0}{\pi(1-\nu_0^2) b} (\alpha_{21} A_{00} + \alpha_{22} A_{10}), \quad (4.40)$$

где $[\alpha] = [C]^{-1}$ - обратная матрица.

Подставим (4.40) в (4.34) и после упрощений получаем систему уравнений для определения A_{00} и A_{10}

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{00} \\ A_{10} \end{bmatrix} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 a} \begin{bmatrix} R \\ \frac{2M_y}{a} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

В случае упругого однородного изотропного полупространства $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$ и

$$A_{00} = \frac{R(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 a} \frac{1}{\alpha_{11}}; \quad A_{10} = \frac{2M_y(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 a^2} \frac{1}{\alpha_{22}};$$

$$B_{00} = \alpha_{11} \frac{E_0 A_{00}}{\pi(1-\nu_0^2) b} = \frac{R}{\pi^2 ab}; \quad B_{10} = \alpha_{22} \frac{E_0 A_{10}}{\pi(1-\nu_0^2) b} = \frac{2M_y}{\pi^2 a^2 b},$$

что полностью совпадает с (4.30) и (4.31). В Таблице 4.1 даны величины перемещений $u_0 \frac{E_0 a}{R(1-\nu_0^2)}$ квадратного в плане штампа размерами $2a*2a$, расположенного на упругом полупространстве, и на который действует сила R , по данным других авторов и по формуле (4.32).

Таблица 4.1

По формуле автора (4.32)	По данным Бородачева Н.М. [5]	По данным М.И. Горбунова-Посадова [15]
0.4363	0.4265	0.46

§4.4. Пример 4.2. Перемещения прямоугольного штампа на упругом четвертьпространстве

Рассмотрим прямоугольный штамп на упругом четвертьпространстве (рис.4.2) под действием силы R и момента M_y . Вертикальные перемещения точки $M(x, y)$ от действия сосредоточенной вертикальной силы P , приложенной в точке с координатами ξ, η с достаточной инженерной точностью можно описать выражением [9]

$$W(x, y) = \frac{P(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(\bar{x}-\bar{\xi})^2 + (\bar{y}-\bar{\eta})^2}} + \frac{a_0}{\sqrt{(\bar{x}+\bar{\xi})^2 + \sqrt{(\bar{y}-\bar{\eta})^2}}} \right]; \quad (4.42)$$

где для четвертьпространства

$$a_0 = \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4}$$

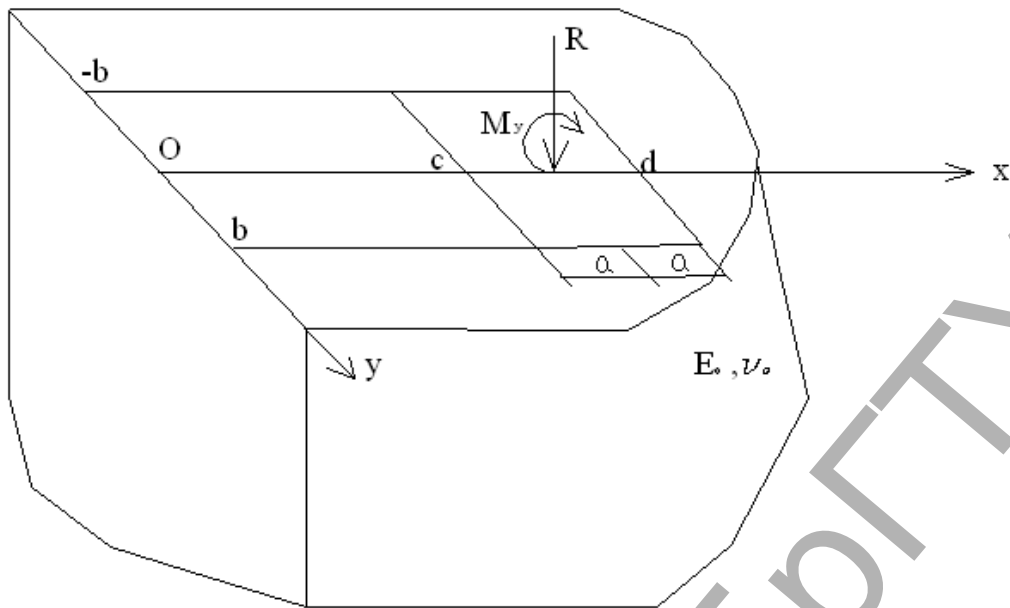


Рис. 4.2. Штамп на упругом четвертьпространстве

Зададимся законом распределения реактивных давлений в контактной зоне штампа в виде двойного ряда

$$p(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\bar{\xi}^2}{a^2}} \sqrt{1 - \frac{\bar{\eta}^2}{b^2}}} \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 B_{pq} T_p \left(\frac{\bar{\xi}}{a} \right) T_q \left(\frac{\bar{\eta}}{b} \right), \quad \xi = \bar{\xi} - \frac{c+d}{2} \quad (4.43)$$

В (4.42) заменим $\xi = \bar{\xi} - \frac{c+d}{2}$, $x = \bar{x} - \frac{c+d}{2}$, $y = \frac{\bar{y}}{b}$, $\eta = \frac{\bar{\eta}}{b}$, $\alpha = \frac{b}{a}$. Получим

$$W(x, y) = \frac{P(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 a} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \alpha^2 (y-\eta)^2}} + \frac{a_0}{\sqrt{(2\frac{d}{a} - 2)^2 + (y-\eta)^2}} \right] \quad (4.44)$$

По квадратурной формуле [3] найдем коэффициенты разложения (4.44) в ряд по полиномам Чебышева (4.37), после этого сформируем систему линейных алгебраических уравнений (4.39)

$$[C] = \pi^2 \begin{bmatrix} C_{00}^{00} & \frac{1}{2}C_{01}^{00} & \frac{1}{2}C_{00}^{01} & \frac{1}{4}C_{01}^{01} \\ C_{10}^{00} & \frac{1}{2}C_{11}^{00} & \frac{1}{2}C_{10}^{01} & \frac{1}{4}C_{11}^{01} \\ C_{00}^{10} & \frac{1}{2}C_{01}^{10} & \frac{1}{2}C_{00}^{11} & \frac{1}{4}C_{01}^{11} \\ C_{10}^{10} & \frac{1}{2}C_{11}^{10} & \frac{1}{2}C_{10}^{11} & \frac{1}{2}C_{11}^{11} \end{bmatrix}; \quad (4.45)$$

и находим обратную матрицу

$$[\alpha] = [C]^{-1} \quad (4.46)$$

Это позволяет определить перемещения прямоугольного штампа на упругом четвертьпространстве. Линейное

$$A_{00} = \frac{2M_y \alpha_{12} - aR\alpha_{22} \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 a^2}}{\alpha_{21}\alpha_{12} - \alpha_{11}\alpha_{22}}; \quad (4.47)$$

и угловое

$$\frac{A_{10}}{a} = \frac{-2M_y \alpha_{11} - aR\alpha_{21} \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 a^3}}{\alpha_{21}\alpha_{12} - \alpha_{11}\alpha_{22}} \quad (4.48)$$

Численную реализацию проведем для квадратного штампа $\alpha=1$ и $c=a$, $d=3a$. С помощью пакета компьютерной математики [17] получено для 21*20 узлов квадратурной формулы по прямоугольной области штампа

$$[C] = \begin{bmatrix} 1.84619 & -0.05497 & 0 & 0 \\ -0.109946 & 0.916409 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.074444 & -0.006012 \\ 0 & 0 & -0.012032 & 1.017101 \end{bmatrix}; \quad (4.49)$$

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 0.543598 & 0.032661 & 0 & 0 \\ 0.065218 & 1.095130 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13.44571 & 0.079529 \\ 0 & 0 & 0.159058 & 0.984124 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned}
A_{00} &= 0.567661 \frac{R(1-\nu_0^2)}{E_0 a} - 0.034997 \frac{M_y(1-\nu_0^2)}{E_0 a^2}; \\
A_{10} &= -0.034997 \frac{R(1-\nu_0^2)}{E_0 a} + 0.583403 \frac{M_y(1-\nu_0^2)}{E_0 a^2}
\end{aligned}
\tag{4.51}$$

В (4.49) некоторые $C_{mp}^{nq}(\alpha)$ равны нулю в силу симметричности контактных напряжений относительно оси ОХ.

Проведем сопоставление полученных результатов с перемещениями квадратного штампа на упругом полупространстве [15]. Для квадратного штампа на упругом полупространстве при действии силы R

$$u_0 = 0.46 \frac{R(1-\nu_0^2)}{E_0 a}; \quad \varphi_0 = 0$$

На упругом четвертьпространстве при действии силы R получено

$$A_{00} = 0.567661 \frac{R(1-\nu_0^2)}{E_0 a}; \quad \varphi_0 = \frac{A_{10}}{a} = -0.034997 \frac{R(1-\nu_0^2)}{E_0 a^2}$$

На упругом полупространстве при действии момента M_y

$$u_0 = 0; \quad \varphi_0 = 0.57 \frac{M_y(1-\nu_0^2)}{E_0 a^3}$$

На упругом четвертьпространстве при действии момента M_y получено

$$A_{00} = -0.034997 \frac{M_y(1-\nu_0^2)}{E_0 a^2}; \quad \frac{A_{10}}{a} = 0.583403 \frac{M_y(1-\nu_0^2)}{E_0 a^3}$$

Как и следовало ожидать, сопоставление показало увеличение линейных и угловых перемещениями штампа на упругом четвертьпространстве по сравнению с перемещением аналогичного штампа на упругом полупространстве при одинаковой внешней нагрузке.

Также проверим в общем виде выполнение теоремы о взаимности перемещений [27]. Угол поворота штампа от действия единичной силы должен быть равен линейному перемещению штампа от действия единичного момента. То есть (4.47), (4.48)

$$\frac{2(M_y = 1) \alpha_{12}}{\alpha_{21} \alpha_{12} - \alpha_{11} \alpha_{22}} = \frac{(R = 1) \alpha_{21}}{\alpha_{21} \alpha_{12} - \alpha_{11} \alpha_{22}}$$

Или, после сокращения,

$$2\alpha_{12} = \alpha_{21},$$

что очевидно из (4.50).

Также ниже проведено сопоставление перемещений для прямоугольного штампа с $\frac{b}{a} = 2$ без промежуточных вычислений.

На упругом полупространстве при действии силы R

$$u_0 = \frac{0.90}{2\sqrt{2}} \frac{R(1-\nu_0^2)}{E_0 a}; \quad \varphi_0 = 0$$

На упругом четвертьпространстве при действии силы R

$$A_{00} = 0.437601 \frac{R(1-\nu_0^2)}{E_0 a}; \quad \varphi_0 = \frac{A_{10}}{a} = -0.028562 \frac{R(1-\nu_0^2)}{E_0 a^2}$$

На упругом полупространстве при действии момента M_y

$$u_0 = 0; \quad \varphi_0 = 0.322 \frac{M_y(1-\nu_0^2)}{E_0 a^3}$$

На упругом четвертьпространстве при действии момента M_y

$$A_{00} = -0.028562 \frac{M_y(1-\nu_0^2)}{E_0 a^2}; \quad \frac{A_{10}}{a} = 0.34689 \frac{M_y(1-\nu_0^2)}{E_0 a^3},$$

что подтверждает правильность вычислений.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. - М.: Высшая школа, 1990. 400с.
2. Александров В.М. Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство. МТТ, 1967, 4. С.108-116.
3. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. - М.: Наука, 1979. –830с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, параболического цилиндра, ортогональные многочлены. - М.: Наука, 1974. 296с.
5. Бородачев Н.М. О вдавлении штампа с плоским квадратным основанием в упругое полупространство. ПМ, т.35, №10, 1999. с.21-26.
6. Босаков С.В. Вариационный подход к решению контактной задачи для упругой полуплоскости. ПМ, т.30, №7, 1994. С.70-73.
7. Босаков С.В. Контактная задача для упругой полуполосы. Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук, 4, 1997. С.119-121.
8. Босаков С.В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости. Плоская задача. Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук, 3, 1999. С.96-103.
9. Босаков С.В., Семенюк С.Д. Расчет системы перекрестных балок на упругом клиновидном основании. МТИ, т.5(2000), №4. с.17-20.
10. Босаков С.В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости. Вестник БГТУ, 1, 2001. С.109-112.
11. Босаков С.В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости. Осесимметричная задача для круглой пластинки. Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук, 2, 2002. С.95-99.
12. Босаков С.В. Метод Ритца в примерах и задачах по строительной механике и теории упругости. - Мн.: БГПА, 2000. 143с.
13. Босаков С.В. Статические расчеты плит на упругом основании. - Мн.: БНТУ, 2002. 128с.
14. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. - М.: Наука, 1974. 455с.
15. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. - М.: Стройиздат, 1984. 679с.
16. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: ФМ, 1963. 1097с.
17. Дьяконов В.П. Системы символьной математики. - М.: СК Пресс, 1998. 328с.
18. Клубин П. И. Расчет балочных и круглых плит на упругом основании. Инж. сб., 12, 1952. С.95-135.
19. Крушевский А.Е. Вариационные методы в механике деформируемого тела. Конспект лекций. - Мн.: БГПА, 2000. 55с.

20. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. - М.: Наука, 1968. 503с.
21. Михлин С.Г. Прямые методы в математической физике. - М.-Л.: Гостехтеориздат, 1950. 428с.
22. Палатников Е.А. Прямоугольная плита на упругом основании. - М.: Стройиздат, 1964. 236с.
23. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. - М.: ФМ, Наука, 1983. 384с.
24. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. - М.: Наука, 1986. 799 с.
25. Ректорис К. Вариационные принципы в математической физике и технике. - М.: Мир, 1985. 589с.
26. Развитие теории контактных задач в СССР. / Под. ред. Л. А. Галина. - М.: Наука, 1976. 493с.
27. Ржаницын А. Р. Строительная механика. - М.: Высшая школа, 1991. 439с.
28. Сеймов В.М. Динамические контактные задачи. - К.: Наукова Думка, 1976. 283с.
29. СНиП 2.02.01-83. Основания зданий и сооружений. - М.: Госстройиздат, 1985. 41с.
30. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. - М.: Наука, 1971. 807с.
31. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. - М.: Изд-во Наука, 1975. 575с.
32. Фаддеева В.Н. О фундаментальных функциях оператора X^{IV} . Труды математического института АН СССР. Т.28, 1949. С.157-159.
33. Файнбурд В.М. Контактные задачи теории упругости. - М.: Наука, 1975. 58с.
34. Феодосьев В.И. Соппротивление материалов. - М.: Наука, 1974. 559с.
35. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. - М.: Наука. Т.1-607с., 1969. Т. 2-800с., 1969. Т.3-656с., 1970.
36. Цейтлин А.И. Прикладные методы решения краевых задач строительной механики. - М.: Стройиздат, 1984. 334с.
37. Bouwraamp C.J. On integrals occurring theory of diffraction of electromagnetic waves by a circular disc. Proc. Kon. Ned. Anad. V. Wet., 1950, Vol 53, No 5. pp. 654 – 661.
38. Gaudon F.A., Shepherd W.M. Generalised plane stress in a semi-infinite strip under arbitrary end-load. Proc. Roy. Soc. A, No1385, v.281, 1964. pp.184-206.
39. Selvadurai A.P.S. The interaction between a uniformly loaded circular plate and an isotropic elastic halfspace: a variational approach. J. Struct. Mech. 1979. V.7(3). p.231-246.
40. Zekai Celep. Rectangular plates resting on tensionless elastic foundation. J. Eng. Mech., v.114, No2, 1988. pp.2083-2092.

Научное издание

Босаков Сергей Викторович

Метод Ритца в контактных задачах теории упругости

Ответственный за выпуск: ***Тарасевич А.Н.***

Редактор: ***Строкач Т.В.***

Компьютерная вёрстка: ***Боровикова Е.А.***

Корректор: ***Никитчик Е.В.***

Лицензия №02330/0148711 от 30.04.2004 г.

Подписано к печати 2.10.2006 г. Бумага «Снегурочка». Усл. п.л. 6,3.

Уч.-изд.л. 6,75. Формат 60x84 ¹/₁₆. Гарнитура Arial.

Тираж 300 экз. Заказ № 920.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».

224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Лицензия №02330/0133017 от 30.04.2004 г.