

вместо  $\{0, 1\}^{16}$  использовать множество, заданное как прямое произведение  $\{0,1\}^{15} \times \{0\}$ , состоящее из всех двоичных векторов размерности 16, у которых последняя, 16-я, компонента равна 0. Тогда наша функция примет вид:

$$\text{SELECT}(p(c), c, \{0,1\}^{15} \cdot \{0\}).$$

Если, кроме того, учесть еще и 3-е уравнение из #11, откуда следует, что  $c_{15} = 1$ , получим:

$$\text{SELECT}(p(c), c, \{0,1\}^{14} \cdot \{1\} \cdot \{0\}).$$

Здесь в качестве множества для отбора используется множество двоичных векторов, у которых 15-я и 16-я компоненты равны 1 и 0 соответственно.

Ниже приводится таблица, показывающая сравнительный анализ скорости вычислений, зависящий от множества, из которого ведется отбор нужных значений:

Таблица – Сравнительного анализа

Вид функции	Компьютер 1, с.	Компьютер 2, с.
$\text{SELECT}(p(c), c, \{0, 1\}^{16})$	163	225,9
$\text{SELECT}(p(c), c, \{0,1\}^{15} \cdot \{0\})$	95,5	146
$\text{SELECT}(p(c), c, \{0,1\}^{14} \cdot \{1\} \cdot \{0\})$	34,1	60,5

Как видим, с помощью описанного приема время вычислений может быть уменьшено в несколько раз. Вычислительные эксперименты, проведенные на компьютерах разной конфигурации, показывают схожие результаты.

УДК 51:004.02

**А.В. ЧИЧУРИН<sup>1</sup>, Е.Н. ШВЫЧКИНА<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

<sup>2</sup>Брест, БрГТУ

## **КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ БАКТЕРИАЛЬНЫХ ПЛАЗМИД**

В работах [1–3] рассмотрено математическое моделирование динамики развития двух видов микроорганизмов, которые потребляют один субстрат. Такая математическую модель называется *хемотатом*. Для описания лимитированного роста популяции в хемотате применяют следующую систему уравнений Михаэлиса-Ментен [1, 2]

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = (s_0 - s(t))D - x_1(t)\mu_1(s(t)) - x_2(t)\mu_2(s(t)), \\ \dot{x}_1(t) = (\mu_1(s(t)) - D)x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = (\mu_2(s(t)) - D)x_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

где параметр  $D$  называется потоком, и он численно равен скорости подачи питательного субстрата в ферментер;  $s(t)$  обозначает плотность питательного субстрата;  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  – плотности микроорганизмов в момент времени  $t$ ;  $\mu_i(s(t))$  ( $i=1,2$ ) – удельная скорость потребления  $i$ -тым микроорганизмом субстрата  $s(t)$ ;  $s_0$  – концентрация субстрата в питательном растворе на входе.

Одной из актуальных модификаций хеостат-модели (1) является моделирование конкуренции плазмидосодержащих и бесплазмидных клеток микроорганизма. Известно [4], что микроорганизмы претерпевают изменения посредством действия *плазмид* – молекул ДНК. В репродуктивном процессе клеток организмов плазмиды могут быть потеряны, что приводит к возникновению в организме плазмидосодержащих и бесплазмидных клеток. В зависимости от способа культивирования можно предопределить свойство полученного микроорганизма. Такая модель, которая используется для описания динамики нестабильных штаммов микроорганизмов, разработана и проанализирована Ф. Стюартом и Б. Левиным и имеет вид

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = (s_0 - s(t))D - x_1(t)\mu_1(s(t)) - x_2(t)\mu_2(s(t)), \\ \dot{x}_1(t) = ((1 - q)\mu_1(s(t)) - D)x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = (\mu_2(s(t)) - D)x_2(t) + q\mu_1(s(t))x_1(t), \end{cases} \quad (2)$$

где  $x_1(t)$  – плотность плазмидосодержащего и  $x_2(t)$  – плотность бесплазмидного микроорганизма в момент времени  $t$ ;  $\mu_i(s(t))$  ( $i=1,2$ ) – удельные скорости роста;  $q$  – вероятность образования бесплазмидных клеток при делении плазмидосодержащих клеток. В работе [3] приведено исследование системы (2) для случая, когда удельная скорость потребления субстрата  $i$ -тым микроорганизмом задается при помощи функции Моно:

$$\mu_i(s(t)) = \frac{m_i s(t)}{a_i + s(t)} \quad (i=1,2), \quad (3)$$

где параметры  $a_i$  ( $i=1,2$ ) – постоянные равные концентрации субстрата, при котором удельная скорость роста микроорганизма равна половине максимальной (константы Михаэлиса-Метен);  $m_i$  ( $i=1,2$ ) – максимальная скорость роста  $i$ -го микроорганизма. В данной работе для случая равенства констант полунасыщения приведена редукция дифференциальной си-

стемы (2), описывающей рассматриваемую модель, к нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка.

$$\frac{x_1'(t)}{x_1(t)} = \frac{m_2(1-q)(1-\rho)(c_1 e^{-Dt} + s_0 - \rho\psi_2 x_1(t) - c_2 e^{-D\psi_1 t} x_1^{\psi_1+1}(t))}{c_1 e^{-Dt} + a_2 + s_0 - x_1(t) + q(1-\rho)\psi_2 x_1(t) - c_2 e^{-D\psi_1 t} x_1^{\psi_1+1}(t)} - D, \quad (4)$$

где  $\psi_1 = \frac{1}{(1-q)(1-\rho)} - 1$ ,  $\psi_2 = \frac{1}{q + \rho - q\rho}$ ,  $s(t) = s_0 + e^{-tD} c_1 - x_1(t) - x_2(t)$ ,

$$x_2(t) = c_2 e^{(1/(1-q)(1-\rho)-1)tD} x_1^{1/(1-q)(1-\rho)}(t) - \frac{q(1-\rho)x_1(t)}{q + \rho - q\rho}.$$

А также построены программные модули для уравнения (3), которые позволяют моделировать свойства решений системы (2), удовлетворяющих начальным условиям

$$s(0) = s_0 \geq 0, \quad x_1(0) = x_{10} \geq 0, \quad x_2(0) = x_{20} \geq 0 \quad (5)$$

на конечных промежутках времени.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чичурин, А. В. О построении решений с заданными предельными свойствами у систем, описывающих модели хемостата / А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина // Вест. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2014. – №1. – С. 69–76.
2. Smith, H. L. The theory of chemostat: dynamics of microbial competition / H. L. Smith, P. Waltman. Cambridge University Press, 1995. – 313 p.
3. Чичурин, А. В. Моделирование хемостата популяционной динамики бактериальных плазмид / А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина // Вест. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2015. – № 3. – С. 59–65.
4. Levin, B. R. The Population Biology of Bacterial Plasmids: a priori Conditions for the Existence of Mobilizable Nonconjugative Factors / B. R. Levin, F. M. Stewart // Genetics. – 1980. – Vol. 94, № 2. – P. 425–443.

УДК 519.2

**В.В. ШВАЙКО, И.Н. МЕЛЬНИКОВА**

Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

## ПРИЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТОДОВ К НЕКОТОРЫМ ФИЗИЧЕСКИМ ПРОЦЕССАМ

В статье делается попытка развития одной математической модели, которая обязана своим происхождением хорошо известному физическому процессу броуновского движения, совершаемого взвешенной в жидкости