Используя методику Д. Бриллинджера [1], в качестве оценки неизвестной взаимной спектральной плотности процесса исследована статистика вида

$$\tilde{f}_{ab}(\lambda) = \frac{2\pi}{T}\sum_{l=1}^{T} W_{ab}\left(\lambda - \frac{2\pi l}{T}\right)\hat{f}_{ab}^{(T)}\left(\frac{2\pi l}{T}\right), \qquad (1)$$

где $W_{ab}(x)$, $x \in R$, $a,b = \overline{1,r}$ – спектральное окно, а оценка $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$ задана выражением

$$\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} I_{ab}(\lambda, s),$$

где $I_{ab}(\lambda, s)$ – модифицированная периодограмма.

В работе вычислена дисперсия оценки взаимной спектральной плотности, заданной соотношением (1), и исследовано ее асимптотическое поведение. Доказано, что оценка (1) является состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой взаимной спектральной плотности процесса.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бриллинджер, Д. Временные ряды. Обработка данных и теория / Д. Бриллинжер. – Минск : Мир, 1980. – 536 с.

2. Welch, P. D. The use of FFT for the estimation of power spectra / P. D. Welch // IEEE Trans. Electroacoust. – 1967. – Vol. 15. – P. 70–73.

УДК 517.958

С.Н. НАУМОВЕЦ
Брест, БрГТУ

О НАХОЖДЕНИИ ОДНОГО КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В замыкании $\overline{Q} = [0,\infty)\times[0,l]$ области $Q = (0,\infty)\times(0,l)$ двух независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1) \in \overline{Q} \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^{\ 2}} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\ 2}} = f(\boldsymbol{x}), \quad (\boldsymbol{x}) \in \overline{Q}, \qquad (1)$$

где a^2, l – положительные действительные числа. К уравнению (1) на границе ∂Q области Q присоединяются условия типа Коши и граничные условия на боковых ее частях

$$u(0,x_1)=\varphi(x_1),\quad \partial_{x_0}u(0,x_1)=\psi(x_1),\quad x_1\in[0,l], \tag{2}$$

$$\begin{gathered} a^{(0)}u(x_0,0)+a^{(1)}\partial_{x_1}u(x_0,0)+a^{(2)}\partial_{x_1}^2(x_0,0)=\mu^{(1)}(x_0),\\ u(x_0,l)=\mu^{(2)}(x_0),\quad x_0\in[0,\infty). \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $f:\bar{Q}\ni \boldsymbol{x}\to f(\boldsymbol{x})$ – заданная функция на $\bar{Q}$, $\varphi:[0,l]\ni x_1\to\varphi(x_1)\in\mathbb{R}$, $\psi:[0,l]\ni x_1\to\psi(x_1)\in\mathbb{R}$ – функции на $[0,l]$, $\mu^{(j)}:[0,\infty)\ni x_0\to\mu^{(j)}(x_0)\in\mathbb{R}$, $j=1,2$, заданные функции на $[0,\infty)$, $a^{(i)}\in\mathbb{R}$, причем числа $a^{(i)}\in\mathbb{R}$, $i=1,2,3$ удовлетворяют условию $\left(a^{(1)}\right)^2-4a^{(0)}a^{(2)}>0$.

Общее решение уравнения (1) представляет сумму общего решения $u^{(0)}$ однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0{}^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}=0 \tag{4}$$

и частного решения v неоднородного уравнения (1).

Подробное описание нахождения функции v можно найти в [1].

Общее решение уравнения (4) представимо в виде

$$u^{(0)}(\boldsymbol{x})=g^{(1)}(x_1-ax_0)+g^{(2)}(x_1+ax_0), \tag{5}$$

где функции $g^{(j)}$, $j=1,2$ из класса $C^2\left(D\left(g^{(j)}\right)\right)$ с соответствующими областями определения $D\left(g^{(1)}\right)=(-\infty,l]$, $D\left(g^{(2)}\right)=[0,\infty)$.

Т.к. имеем частное решение v неоднородного уравнения (1), а общее решение u этого уравнения представимо в виде суммы $u(\boldsymbol{x})=u^{(0)}(\boldsymbol{x})+v(\boldsymbol{x})$, то дальнейшие исследования сводятся к решению однородного уравнения (4) относительно функции $u^{(0)}:\bar{Q}\ni x\to u^{(0)}(x)\in\mathbb{R}$. Решение $u^{(0)}$ должно удовлетворять условиям Коши

$$\begin{gathered} u^{(0)}(0,x_1)=\varphi(x_1),\\ \partial_{x_0}u^{(0)}(0,x_1)=\partial_{x_0}(u-v)=\partial_{x_0}u(0,x_1)-\partial_{x_0}v(0,x_1)=\psi(x_1),\, x_1\in[0,l] \end{gathered} \tag{6}$$

и граничным условиям

$$\sum_{i=0}^{2}a^{(i)}\partial_{x_1}^i u^{(0)}(x_0,0)=\mu^{(1)}(x_0)-\sum_{i=0}^{2}a^{(i)}\partial_{x_1}^i v(x_0,0)=\tilde{\mu}^{(1)}(x_0), \tag{7}$$

$$u^{(0)}(x_0,l)=\mu^{(2)}(x_0)-v(x_0,l)=\tilde{\mu}^{(2)}(x_0). \tag{8}$$

Теорема 1. *Если функции* $\varphi \in C^2([0,l])$, $\psi \in C^1([0,l])$, $\tilde{\mu}^{(1)} \in C^1([0,\infty))$, $\tilde{\mu}^{(2)} \in C^2([0,\infty))$, *то функция вида (5) является единственным классическим решением из класса* $C^2(\overline{Q})$ *задачи* (4), (6)–(8) *тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования*

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{2}\varphi(0), \quad C_1 + C_2 = \frac{1}{2}\varphi'(0) - \frac{1}{2a}\psi(0),$$
$$C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = \frac{1}{2}\varphi''(0) - \frac{1}{2a}\psi'(0); \tag{9}$$

$$\tilde{\mu}^{(2)}(0) - \varphi(l) = 0,\ \tilde{\mu}^{(2)\prime}(0) - \psi(l) = 0,\ \tilde{\mu}^{(2)\prime\prime}(0) - a^2\varphi''(l) = 0 \tag{10}$$

константы $C_i = C_i^k$, $k = 1,2$, $i = 1,2$ *вычисляются по формулам*

$$C_1 = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}\left(\lambda_2\varphi'(0) - \frac{\lambda_2}{a}\psi(0) - \varphi''(0) + \frac{1}{a}\psi'(0)\right), \tag{11}$$

$$C_2 = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}\left(\varphi''(0) - \frac{1}{a}\psi'(0) - \lambda_1\varphi'(0) + \frac{\lambda_1}{a}\psi(0)\right), \tag{12}$$

где $\lambda_1 = \dfrac{-a^{(1)} + \sqrt{\left(a^{(1)}\right)^2 - 4a^{(0)}a^{(2)}}}{2a^{(2)}}$, $\lambda_2 = \dfrac{-a^{(1)} - \sqrt{\left(a^{(1)}\right)^2 - 4a^{(0)}a^{(2)}}}{2a^{(2)}}$.

Перейдем к функциям $\mu^{(2)}$ и *f*.

$$\mu^{(2)}(0) - \varphi(l) = 0,\ \mu^{(2)\prime}(0) - \psi(l) = 0,\ \mu^{(2)\prime\prime}(0) - a^2\varphi''(l) - f(0,l) = 0. \tag{13}$$

Теорема 2. *Если функции* $\varphi \in C^2([0,l])$, $\psi \in C^1([0,l])$, $\mu^{(1)} \in C^1([0,\infty))$, $\mu^{(2)} \in C^2([0,\infty))$, $f \in C^{0,1}(\overline{Q})$, *то существует единственное из класса* $C^2(\overline{Q})$ *классическое решение* $u(\boldsymbol{x}) = u^{(0)}(\boldsymbol{x}) + v(\boldsymbol{x})$ *тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования* (*9*), (*13*), *константы* $C_i = C_i^k$, $k = 1,2$, $i = 1,2$ *вычисляются по формулам* (*11*)–(*12*), *где решение* $u^{(0)}$ *задачи (4), (6)-(8) – формулами*

$$u^{(0)}(\boldsymbol{x}) = g^{(1)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 + ax_0),$$

$$g^{(j)}(z) = g^{(j,0)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) + \frac{(-1)^j}{2a}\int_0^z \psi(\xi)\,d\xi + (-1)^j C,\ z \in [0,l],$$

$$g^{(1,k)}(z)=C_1^k e^{\lambda_1 z}+C_2^k e^{\lambda_2 z}+\frac{e^{\lambda_2 z}}{\lambda_2-\lambda_1}\int\limits_0^z\left(\tilde{\mu}^{(1)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)-\sum_{i=0}^{2}a^{(i)}d^i g^{(2,k-1)}(-\xi)\right)e^{-\lambda_2\xi}d\xi-$$

$$-\frac{e^{\lambda_1 z}}{\lambda_2-\lambda_1}\int\limits_0^z\left(\tilde{\mu}^{(1)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)-\sum_{i=0}^{2}a^{(i)}d^i g^{(2,k-1)}(-\xi)\right)e^{-\lambda_1\xi}d\xi,$$

$$z\in\left[-kl,-(k-1)l\right],\quad k=1,2,...,$$

$$g^{(2,k)}(z)=\tilde{\mu}^{(2)}\left(\frac{l-z}{a}\right)-g^{(1,k-1)}(2l-z),\quad z\in\left[kl,(k+1)l\right],\quad k=1,2,...$$

при условии, что коэффициенты $a^{(i)}, i=0,1,2$ удовлетворяют условию $\left(a^{(1)}\right)^2-4a^{(0)}a^{(2)}>0$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, С. Н. Наумовец // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 1. – С. 7–20.

2. Корзюк, В. И. Классические решения в теории дифференциальных уравнений с частными производными / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, С. Н. Наумовец // Studia i materiały EUIE w Warszawie. – 2015. – № 1 (9). – S. 55–78.

УДК 517.9

Е.В. ПАНТЕЛЕЕВА
Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

УСЛОВИЯ ПРАВОСТОРОННЕЙ ОБРАТИМОСТИ ОПЕРАТОРА С ДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

В данной работе рассмотрены операторы взвешенного сдвига в пространствах вектор-функций $L_2\left(X,C^m,\mu\right)$, действующие по формуле

$$Bu(x)=A(x)u(\alpha(x)),\ x\in X,$$

где приведенный коэффициент A является диагональной матрицей

$$A(x)=diag\{a_1(x),a_2(x),...,a_m(x)\},$$