УДК 517.8

Л.П. МАХНИСТ, Т.И. КАРИМОВА, В.С. РУБАНОВ,
И.И. ГЛАДКИЙ
Брест, БрГТУ

О МЕТОДАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ МОМЕНТОВ НЕКОТОРЫХ ДИСКРЕТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Описание случайной величины полным указанием закона распределения, как правило, слишком громоздко. На практике достаточно указать только отдельные числовые характеристики закона распределения случайной величины. Для оценки того или иного свойства закона распределения случайной величины в теории вероятностей используют числовые характеристики, называемые моментами. Моменты случайных величин используются для описания свойств функции распределения вероятностей.

Рассмотрим общий подход к вычислению моментов распределений дискретных случайных величин и их связь с некоторыми известными последовательностями. В частности, в работе представлены геометрическое, биномиальное распределения и распределение Пуассона (например, в [1]).

Моментом n *-ого порядка* ($n = 0,1,2,\dots$) случайной величины X относительно числа a называется математическое ожидание $M\,((X - a)^n)$. *Начальным моментом* n *-ого порядка* ($n = 0,1,2,\dots$) случайной величины X относительно числа a называется $\alpha_n = M\,(X^n)$. *Центральным моментом* n *-ого порядка* ($n = 0,1,2,\dots$) случайной величины X (относительно центра распределения, т. е. числа $a = M\,(X)$) называется $\mu_n = M\,((X - M\,(X))^n)$. *Факториальным моментом* n *-ого порядка* ($n = 0,1,2,\dots$) случайной величины X относительно числа a называется математическое ожидание $M\left(\left(X - a\right)\left(X - a - 1\right)\dots\left(X - a - n + 1\right)\right)$. *Начальным факториальным моментом* n *-ого порядка* ($n = 0,1,2,\dots$) случайной величины X относительно числа a называется $\alpha_{[n]} = M\,(X^{[n]}) = M\left(X\left(X - 1\right)\dots\left(X - n + 1\right)\right)$. *Центральным факториальным моментом* n *-ого порядка* ($n = 0,1,2,\dots$) случайной величины X (относительно центра распределения, т. е. числа $a = M\left(X\right)$) называется $\mu_{[n]} = M((X - M(X))^{[n]}) = M\left(\left(X - M\left(X\right)\right)\left(X - M\left(X\right) - 1\right)\dots\left(X - M\left(X\right) - n + 1\right)\right)$.

Начальные факториальные моменты n-ого порядка $\alpha_{[n]}$ (например, в [2]) могут быть найдены по формулам: $\alpha_{[n]} = n!q^n p^{-n}$ для геометрического распределения [2], $\alpha_{[n]} = \lambda^n$ для распределения Пуассона [3], $\alpha_{[m]} = n^{[m]} p^m$ для биномиального распределения [4].

Учитывая, что начальные моменты n-ого порядка α_n случайной величины связаны с ее начальными факториальными моментами соотношением $\alpha_n = \sum_{m=1}^{n} S_m^{(n)} \alpha_{[m]}$ (например, в [5]), где коэффициенты $S_m^{(n)}$ – числа Стирлинга второго рода, получим для геометрического распределения $\alpha_n = \sum_{m=1}^{n} \alpha_m^{(n)} \frac{q^m}{p^m}$. Здесь коэффициенты $\alpha_m^{(n)} = S_m^{(n)} m!$ (последовательность A019538 в OEIS (англ. On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Энциклопедия целочисленных последовательностей)) могут быть получены с помощью рекуррентной формулы $\alpha_m^{(n)} = m\left(\alpha_{m-1}^{(n-1)} + \alpha_m^{(n-1)}\right)$, полагая $\alpha_m^{(n)} = 0$, если $m < 1$ или $m > n$. Заметим также, что для начальных моментов n-ого порядка геометрического распределения выполняется $\alpha_n = \frac{1}{p^n} \sum_{m=0}^{n-1} E(n,m) q^{m+1}$, где коэффициенты $E(n,m)$ – числа Эйлера первого рода (последовательность A008292 в OEIS), которые могут быть получены с помощью рекуррентной формулы

$$E(n,m) = (n-m)E(n-1,m-1) + (m+1)E(n-1,m),$$

полагая $E(n,m) = 0$, если $m < 0$ или $m > n-1$. Для распределения Пуассона получим $\alpha_n = \sum_{m=1}^{n} S_m^{(n)} \lambda^m$. Используя формулу $\alpha_n = \sum_{m=1}^{n} S_m^{(n)} \alpha_{[m]}$, начальные моменты n-ого порядка биномиального распределения могут быть вычислены так: $\alpha_1 = \alpha_{[1]} = np$ – математическое ожидание, $\alpha_2 = \alpha_{[2]} + \alpha_{[1]} = n(n-1)p^2 + np$,

$\alpha_3 = \alpha_{[3]} + 3\alpha_{[2]} + \alpha_{[1]} = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np$, и т.д.

Для центральных моментов n-ого порядка μ_n геометрического распределения выполняется $\mu_n = \frac{1}{p^n}\sum_{m=1}^{n-1}\mu_m^{(n)}q^m$, где коэффициенты $\mu_m^{(n)}$ (последовательность A046739 в OEIS) могут быть получены с помощью рекуррентной формулы $\mu_m^{(n)} = (n-1)\mu_{m-1}^{(n-2)} + (n-m)\mu_{m-1}^{(n-1)} + m\mu_m^{(n-1)}$, полагая $\mu_m^{(n)} = 0$, если $m < 1$ или $m > n-1$. Так как центральные моменты n-ого порядка случайной величины связаны с ее начальными моментами соотношением $\mu_n = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m \alpha_{n-m}\alpha_1^m$ (например, в [1]), получим $\mu_n = \sum_{m=1}^{n}\mu_m^{(n)}q^m p^{-m}$, где коэффициенты $\mu_m^{(n)}$ определяются соотношением $\mu_m^{(n)} = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j C_n^j S_{m-j}^{(n-j)}(m-j)!$. Некоторые значения $\mu_m^{(n)}$, найденные по представленной формуле внесем в таблицу:

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	2			
4	1	10	18	9		
5	1	25	90	110	44	
6	1	56	375	850	795	265

Следовательно, $\mu_2 = \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$, $\mu_3 = 2\frac{q^3}{p^3} + 3\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$,

$\mu_4 = 9\frac{q^4}{p^4} + 18\frac{q^3}{p^3} + 10\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$, $\mu_5 = 44\frac{q^5}{p^5} + 110\frac{q^4}{p^4} + 90\frac{q^3}{p^3} + 25\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$,

$$\mu_6 = 265\frac{q^6}{p^6} + 795\frac{q^5}{p^5} + 850\frac{q^4}{p^4} + 375\frac{q^3}{p^3} + 56\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}.$$

Заметим, что последняя целочисленная последовательность отсутствует в OEIS, как и последовательность $\mu_m^{(n)}$, определяющая представление центральных моментов геометрического распределения в виде

$$\mu_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{n-m}\,\mu_m^{(n)}}{p^m}.$$

Центральный момент n-ого порядка распределения Пуассона найдем по формуле $\mu_n = \lambda \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-1}^{i}\mu_i$. Используя формулу $\mu_n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m \alpha_{n-m}\alpha_1^m$, для биномиального распределения получим:

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(-p+1);$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 = np\left(2p^2 - 3p + 1\right), \text{ и т.д.}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн – М. : Наука, 1977. – 831 с.

2. Махнист, Л.П. Моменты геометрического распределения и целочисленные после-довательности / Л.П. Махнист [и др.] // Инновационные технологии обуче-ния физико-математическим дисциплинам : материалы V междунар. науч.-практ. интернет-конф., Мозырь, 26–29 марта 2013 г. – Мозырь, 2013. – С.181–183.

3. Антоник, И.А. О моментах распределения Пуассона / И.А. Антоник (науч. рук.: Л.П. Махнист, И.И. Гладкий) // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов : в 2 ч. – Брест : Изд-во БрГТУ, 2013. – Ч. 1. – С. 47–50.

4. Липовцев, А.П. О моментах биномиального распределения / А.П. Липовцев (науч. рук.: Л.П. Махнист, Т.И. Каримова) // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов : в 2 ч. – Брест: Изд-во БрГТУ, 2013. – Ч. 1. – С. 71–74.

5. Зеневич, Е.А. Моменты распределения вероятностей / Е.А. Зеневич, Н.В. Фомина (науч. рук.: Л.П. Махнист, Т.И. Каримова) // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов : в 2 ч. – Брест: Изд-во БрГТУ, 2012. – Ч. 1. – С. 68–72.