УДК 517.9

**А.И. ЖУК**
Брест, БрГТУ

## СИСТЕМЫ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T=[0;a]\subset R$:

$$\dot{x}^i(t)=\sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t,x(t))\dot{L}^j(t), \quad (1)$$

$$x(0)=x_0 \quad (2)$$

где $f^{ij}$ $i=\overline{1,p},$, $j=\overline{1,q},$ – липшицевы функции, $x(t)=[x^1(t),...,x^p(t)]$, $x_0\in R^p$, а $L^j(t)$ $j=\overline{1,q},$ – функции ограниченной вариации на отрезке $T$. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t)$ $j=\overline{1,q},$ непрерывны справа, $L^j(0)=L^j(0-)=0$ и $L^j(a-)=L^j(a)$, $j=\overline{1,q}$.

При решении нелинейных задач возникают принципиально неразрешимые трудности, связанные с невозможностью корректного определения произведения обобщенных функций. Существующие подходы к трактовке подобного рода систем уравнений можно классифицировать следующим образом: переход к интегральному уравнению, где интеграл понимается в определенном смысле, аппроксимации исходного уравнения дифференциальными уравнениями с гладкими коэффициентами, формализация данной задачи в рамках теории обобщенных функций.

В работе [1] показано, что все указанные выше подходы можно охватить одним, связанным с вложением данной задачи в алгебру новых обобщенных функций и дальнейшим исследованием решений на ассоциированном уровне в этой алгебре.

Напомним определение алгебры мнемофункций [1]. Пусть $R$ – вещественная прямая. На множестве всех последовательностей из элементов $R$ введем отношение эквивалентности следующим образом: $(x_n)\sim(y_n)$, если $\exists n_0\in N$, $\forall n\geq n_0$, $x_n=y_n$, тогда обобщенным числом назовем класс эквивалентности $\widetilde{x}=[(x_n)]$. Множество обобщенных чисел обозначим $\widetilde{R}$. Аналогично можно построить расширение $\widetilde{T}$ отрезка $T=[0;a]$. Выделим в $\tilde{R}$ следующие подмножества:

$$H=\{\widetilde{h}\in\widetilde{R}:\widetilde{h}=[(h_n)],h_n>0,\forall n\in N,\lim_{n\to\infty}h_n=0\},$$

$$I=\{\widetilde{h}\in H:1/n=o(h_n),h_n\to 0,\forall(h_n)\in\widetilde{h}\}.$$

На множество всех последовательностей $\{f_n\}$ таких, что $f_n \in C^{\infty}(R)$, введем отношение эквивалентности: $(f_n) \sim (g_n)$, если $\exists n_1 \in N$, $\forall n \geq n_1$, $\forall x \in R$, $f_n(x) = g_n(x)$. Класс эквивалентности $[(f_n)]$ будем называть мнемофункцией [1] и обобзначать $\widetilde{f}$. Обозначим через $G(R)$ множество всех мнемофункций, которое является алгеброй с покоординатными операциями умножения и сложения. Алгебру мнемофункций вида $\widetilde{f}(\widetilde{x}) = [(f_n(x_n))]$, где $\widetilde{x} = [(x_n)] \in \widetilde{R}$, а $[f_n(x)] \in G(R)$, $\forall x \in R$, обозначим как $G(\widetilde{R})$. Определим на $G(\widetilde{R})$ обобщенный дифференциал

$$d_{\widetilde{h}}\widetilde{f}(\widetilde{x}) = [(f_n(x+h_n) - f_n(x))],\ \widetilde{x} = [(x)] \in \widetilde{T},\ \widetilde{h} \in H.$$

Обобщенный дифференциал $d_{\widetilde{h}}$ назовем $I-$обобщенным дифференциалом и будем обозначать $d^{I}_{\widetilde{h}}$, если $\widetilde{h} \in I$.

Будем говорить, что мнемофункция $\widetilde{f} = [(f_n)]$ ассоциирует элемент $f$ из топологического пространства $\Omega$, если последовательность $\{f_n\}$ при $n \to \infty$ сходится к $f$ в топологии $\Omega$.

Заменяя обычные функции, присутствующие в (1), на соответствующие им новые обобщенные функции, получим запись уравнения в дифференциалах в алгебре мнемофункций

$$d_{\tilde{h}}\tilde{x}^i(\tilde{t}) = \sum_{j=1}^{q} \tilde{f}^{ij}(\tilde{t}, \tilde{x}(\tilde{t}))d_{\tilde{h}}\tilde{L}^j(\tilde{t}),\ i = \overline{1,p} \tag{3}$$

с начальным условием $\widetilde{x}\big|_{[0,\widetilde{h}]} = \widetilde{x}^0$, где $\widetilde{h} = [\{h_n\}] \in H$, $\widetilde{a} = [\{a\}] \in T$ и $\widetilde{t} = [\{t_n\}] \in \widetilde{T}$, $\widetilde{x} = [\{x_n(t)\}]$, $\widetilde{f} = [\{f_n(x)\}]$, $\widetilde{x}^0 = [\{x_n^0(t)\}]$, $\widetilde{L} = [\{L_n(t)\}]$ и $x_n^0 \to x(0)$.

Наряду с задачей (3) с начальным условием $\widetilde{x}\big|_{[0,\widetilde{h}]} = \widetilde{x}^0$ рассмотрим системы уравнений с $I-$ бобщенными дифференциалами.

$$d^{I}_{\widetilde{h}}\widetilde{x}^i(\widetilde{t}) = \sum_{j=1}^{q} \widetilde{f}^{ij}(\widetilde{t}, \widetilde{x}(\widetilde{t}))d_{\widetilde{h}}\widetilde{L}^j(\widetilde{t}). \tag{4}$$

Будем говорить, что функция $x$ является $I-$ ассоциированным решением уравнения (3), если данная функция является ассоциированным решением задачи (4).

Таким образом, под решением системы дифференциальных уравнений (1) будем понимать ассоциированное решение системы уравнений в дифференциалах (3), существование и единственность решения которой доказано в [2].

Если заменить в (3) каждую новую обобщенную функцию представителем класса ее определяющего, получим запись задачи (3) на уровне представителей

$$x_n^i(t+h_n)-x_n^i(t)=\sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(t,x_n(t))[L_n^j(t+h_n)-L_n^j(t)],\ i=\overline{1,p}, \tag{6}$$

$$x_n(t)\big|_{[0,h_n)}=x_{n0}(t). \tag{7}$$

Здесь $L_n^j(t)=(L^j*\rho_n)(t)=\int_0^{\frac{1}{n}} L^j(t+s)\rho_n(s)ds,\quad j=\overline{1,q}$, где $\rho_n(t)=n\rho(nt)$, $\rho\geq 0,\quad su\rho\rho(\rho)\subseteq[0,1],\quad \int_0^1\rho(s)ds=1$, а $f_n=f*\widetilde{\rho}_n$, где $\widetilde{\rho}_n(x_0,x_1,...,x_p)=$ $=n^p\widetilde{\rho}(nx_0,nx_1,...,nx_p),\ \widetilde{\rho}\in C^\infty(R^{p+1}),\ \widetilde{\rho}\geq 0,\quad \int_{[0,1]^{p+1}}\widetilde{\rho}(x_0,x_1,...,x_p)dx_0dx_1...dx_p=1$, $su\rho\rho(\widetilde{\rho})\subset[0,1]^{p+1}$.

Пусть $t$ – произвольная фиксированная точка из отрезка $T$. Тогда $t$ можно представить в виде $t = \tau_t + m_th_n$, где $\tau_t\in[0,h_n),\quad m_t\in N$. Несложно видеть, что решение системы (4) – (5) можно записать в виде

$$x_n^i(t)=x_{n0}^i(\tau_t)+\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{ij}(\tau_t+kh_n,x_n(\tau_t+kh_n))[L_n^j(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n^j(\tau_t+kh_n)],$$

где $i=\overline{1,p}$. Для описания предельного поведения задачи (5)–(6) рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t)=x_0^i+\sum_{j=1}^{q}\int_0^{t+} f^{ij}(s,x(s-))dL^j(s),\ i=\overline{1,p}. \tag{8}$$

**Теорема 1.** Пусть $f^{ij}\quad i=\overline{1,p},\quad j=\overline{1,q},$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены. $L^j(t)\quad j=\overline{1,q},$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда $I$ – ассоциированное решение задачи Коши (3) является решением системы уравнений (7), если выполняется

$$\int_T \left|x_{n0}(\tau_t)-x_0\right|dt\to 0.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лазакович, Н. В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н. В. Лазакович // Докл. НАН Беларуси. – 1994. – Т. 38, № 5. – С. 23–27.

2. Каримова, Т. И. Об ассоциированных решениях нестационарных систем уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов / Т. И. Каримова, О. Л. Яблонский // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2009. – № 2. – С. 81–86.