

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ ТРЕХСЛОЙНОГО ОСНОВАНИЯ В РАСЧЕТАХ ШАРНИРНО-СОЕДИНЕННЫХ ДОРОЖНЫХ ПЛИТ

О. В. Козунова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> К. т. н., доцент, начальник проектно-конструкторского отдела, доцент кафедры «Архитектура и строительство» УО БелГУТ, Гомель, Беларусь, [kozunova@gmail.com](mailto:kozunova@gmail.com)

### Реферат

В работе рассматривается задача о расчете шарнирно – соединенных в отдельных точках прямоугольных дорожных плит на трехслойном упругом основании на произвольную внешнюю нагрузку. Расчет выполняется смешанным методом строительной механики с использованием способа Б. Н. Жемочкина. Смежные плиты соединяются цилиндрическими шарнирами в двух точках.

Реализация предлагаемого подхода выполнена для семи шарнирно – соединенных прямоугольных дорожных плит под действием системы сосредоточенных сил, каждая из которых приложена в середине плиты. В численных результатах приводятся линейные перемещения плит, реактивные давления на контакте плит с упругим основанием, поперечные силы в соединительных шарнирах.

Предлагаемый в работе новый универсальный подход для статического расчета шарнирно-соединенных плит на упругом основании легко обобщается на плиты конечной жесткости и иные модели упругого основания.

**Ключевые слова:** метод Б. Н. Жемочкина, основание Когана, основание Винклера, дорожная плита, трехслойное упругое основание, шарнирно-соединенные плиты.

## THE USE OF MODELS OF A THREE-LAYER BASE IN THE CALCULATION OF ARTICULATED ROAD SLABS

O. V. Kozunova

### Abstract

The paper considers the problem of calculating articulated – connected at separate points of rectangular road slabs on a three-layer elastic base for an arbitrary external load. The calculation is performed by the mixed method of structural mechanics using the method of B. N. Zhemochkin. Adjacent plates are connected by cylindrical joints at two points.

Implementation of the proposed approach is carried out for seven articulated - connected rectangular road slabs under the action of a system of concentrated forces, each of which is applied in the middle of the slab. The numerical results give linear displacements of the plates, reactive pressures at the contact of the plates with the elastic base, transverse forces in the connecting joints.

The proposed new universal approach for the static calculation of articulated plates on an elastic base is easily generalized to plates of finite stiffness and other models of an elastic base.

**Keywords:** method by B. N. Zhemochkin, Kogan base, Winkler base, road slab, three-layer elastic base, articulated slabs.

### Введение. Обзор литературы

Вопрос расчета шарнирно-соединенных дорожных плит на упругом основании до настоящего времени не исследован в полной мере. Автору известны работы Б. Г. Коренева [1], Р. В. Серебряного [2], Г. Я. Полова [3], в которых различными подходами проведены исследования по расчету шарнирно-соединенных плит на упругом основании.

Ниже предлагается общий подход для расчета шарнирно-соединенных прямоугольных плит на упругом основании, основанный на смешанном методе строительной механики [4] и способе Б. Н. Жемочкина [5], позволяющий с единых позиций рассчитывать шарнирно – соединенные плиты или балки любой формы и жесткости на различных моделях упругого основания на произвольную вертикальную нагрузку. Численная реализация предлагаемого подхода выполнена на семи шарнирно-соединенных прямоугольных жестких плитах на упругом основании Винклера [6]. Отметим, что ранее в работе [1] обсуждался вопрос о возможности использования способа Б. Н. Жемочкина при решении подобных задач.

Модель упругого основания в виде модели трехслойного основания была предложена в работе [7] для расчета изолированной дорожной плиты автомобильных дорог и аэродромов на неоднородном (слоистом) основании. Модель такого основания представима в виде основания Винклера (слой щебня), расположенного на двухслойном основании Когана (песок + естественный грунт).

Используя результаты работы Б. И. Когана [8] и С. В. Босакова [9] об определении перемещений двухслойного основания, а также подход Б. Н. Жемочкина [5] о расчете жесткой плиты на двухслойном основании, в работе [7] было получено выражение для определения перемещений точки поверхности трехслойного основания от дей-

ствия нагрузки, равномерно распределенной по прямоугольному участку поверхности трехслойного основания.

Модель трехслойного основания приближена к реальным инженерно-геологическим условиям строительной площадки и может быть использована для расчета шарнирно-соединенных прямоугольных плит на неоднородных (слоистых) основаниях.

### Постановка задачи

Рассмотрим систему из  $N_p$  шарнирно-соединенных в двух точках гибких дорожных плит прямоугольного очертания на трехслойном основании (рис. 1) под действием внешней нагрузки. Крайние плиты будем считать шарнирно-опертыми с одной стороны на неподвижное основание.

Вводим следующие условия контактного взаимодействия:

- плиты работают совместно с упругим основанием, без отрыва и горизонтального смещения;
- силами трения в контактной зоне плиты с упругим основанием пренебрегаем (отсутствуют касательные напряжения);
- для плиты справедливы гипотезы технической теории изгиба [4].

Каждую плиту разобьем на одинаковые прямоугольные участки размерами  $\Delta x \times \Delta y$  и в центре каждого участка поставим вертикальную связь, через которую осуществляется контакт плиты с упругим основанием. Будем считать, что усилие в связи вызывает равномерную эпюру давлений в пределах участка. Полученную статически неопределимую систему решаем смешанным методом строительной механики [4], приняв за неизвестные усилия во введенных связях, линейные и угловые перемещения защемлений нормали в центре каждой плиты и поперечные силы в соединительных шарнирах.

На рис. 2 приводится фрагмент основной системы смешанного метода для трех слева крайних плит.

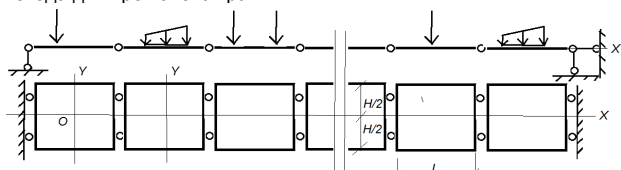


Рисунок 1 – Заданная система шарнирно-соединенных прямоугольных плит

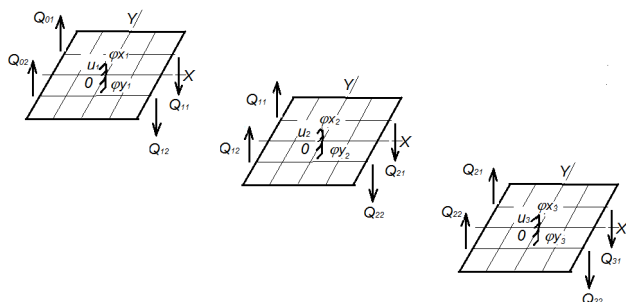


Рисунок 2 – Левый фрагмент основной системы

Канонические уравнения смешанного метода при решении поставленной задачи для средней плиты с номером  $i$  запишем в виде формулы (1).

В работе [7] рассмотрена конструкция грунтового основания в виде поверхностного слоя щебня, расположенного на слое песка, который, в свою очередь, находится на естественном грунтовом полупространстве. Модель такого основания представима в виде основания Винклера (слой щебня), расположенного на двухслойном основании Когана (песок + естественный грунт) [8] (рис. 3).

В работе [7] приведено выражение для определения перемещений точки  $M(x_i, y_i)$  поверхности трехслойного основания от действия единичной нагрузки, равномерно распределенной по прямоугольному участку размером  $(x_k \pm \Delta x/2) \times (y_k \pm \Delta y/2)$  в виде

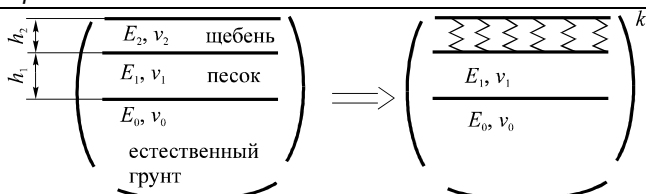


Рисунок 3 – Модель трехслойного основания

$$W(x_i, y_i) = \frac{P(1-v_1^2)}{\pi E_1 h_1} F_{i,k}, \quad (2)$$

где  $F_{i,k}$  – безразмерная функция (функция влияния по Жемочкину), которая определяется по формулам [7] с учетом соотношений [4, 8, 9], а именно

$$F_{i,i} = \frac{1}{k\Delta x\Delta y} + 2\frac{\Delta x}{\Delta y} \left[ \ln \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \ln \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} + \sqrt{\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} + 1} \right) + \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} + 1} \right) \right] +$$

$$+ \sum_{n=0}^3 a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\left(4 + \frac{R^2}{h_1^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} P_n(z) \left( \frac{2h_1}{\sqrt{R^2 + 4h_1^2}} \right);$$

$$F_{i,k} = \frac{h_1}{R} + \sum_{n=0}^3 a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\left(4 + \frac{R^2}{h_1^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} P_n(z) \left( \frac{2h_1}{\sqrt{R^2 + 4h_1^2}} \right), \quad (4)$$

$$R = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}.$$

В приведенных выше формулах:  $\Gamma(n+1)$  – Гамма-функция;

$P_n(z)$  – полином Лежандра [5];  $k$  – коэффициент постели верх-

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \delta_{Q,i-1} Q_{i-1}^k + \delta_{1,1} X_1 + \dots + \delta_{1,m} X_m + u_i + \varphi x_i y_1 + \varphi y_i x_1 + \sum_{k=1}^2 \delta_{Q,i} Q_i^k + \Delta_{1,p} = 0 \\ & \dots \\ & \sum_{k=1}^2 \delta_{Q,i-1} Q_{i-1}^k + \delta_{m,1} X_1 + \dots + \delta_{m,m} X_m + u_i + \varphi x_i y_m + \varphi y_i x_m + \sum_{k=1}^2 \delta_{Q,i} Q_i^k + \Delta_{m,p} = 0 \\ & \sum_{k=1}^m X_k y_k - \frac{H}{2} Q_{i,1} + \frac{H}{2} Q_{i,2} + \frac{H}{2} Q_{i-1,1} - \frac{H}{2} Q_{i-1,2} - M_x = 0 \\ & \sum_{k=1}^m X_k x_k - \frac{L}{2} Q_{i,1} - \frac{L}{2} Q_{i,2} - \frac{L}{2} Q_{i-1,1} - \frac{L}{2} Q_{i-1,2} - M_y = 0 \\ & \sum_{k=1}^m X_k - Q_{i,1} - Q_{i,2} + Q_{i-1,1} + Q_{i-1,2} - R = 0 \\ & \sum_{k=1}^2 \delta_{Q,i-1} Q_{i-1}^k + u_{i-1} - \frac{h}{2} \varphi x_{i-1} - \frac{L}{2} \varphi y_{i-1} + u_i - \frac{h}{2} \varphi x_i + \frac{L}{2} \varphi y_i = 0 \\ & \sum_{k=1}^2 \delta_{Q,i-1} Q_{i-1}^k + u_{i-1} + \frac{h}{2} \varphi x_{i-1} + \frac{L}{2} \varphi y_{i-1} + u_i + \frac{h}{2} \varphi x_i - \frac{L}{2} \varphi y_i + \sum_{k=1}^2 \delta_{Q,i} Q_i^k = 0, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

где  $m$  – число участков Б. Н. Жемочкина на плите;

$u_i, \varphi x_i, \varphi y_i$  – неизвестные линейное и угловые перемещения введенного защемления на плите;

$R, M_x, M_y$  – равнодействующая внешних сил и моменты равнодействующей относительно координатных осей на плите;

$Q_{i,1}, Q_{i,2}$  – поперечные силы в разрезанных шарнирах по одну сторону плиты;

$X_k$  – усилие в связи Б. Н. Жемочкина с номером  $k$ ;

$k$  – коэффициент постели упругого основания (для слоистого основания – верхнего слоя).

него слоя трехслойного основания, который определяется [10] по следующей формуле

$$k = \frac{E_2(1-\nu_2)}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)h_2}, \quad (5)$$

где  $E_2, \nu_2$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона верхнего слоя трехслойного основания (щебня, см. рис. 3); при рекомендуемой исследованиями [9] толщине упругого слоя (см. выше).

Коэффициенты  $a_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) в формулах (3), (4) определяются из соотношений, которые получены в монографии [9] для двухслойных оснований, а именно:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{M+L}{M-L-S} - 1; \\ a_1 &= 2a_0 + \frac{2L(S-2N) - 2M(S-2N) - 4(2LM+NS)}{(L-M+S)^2}; \\ a_2 &= 2a_1 - 2a_0 - 2 \frac{(S-2N)(M^2-L^2) + (8LM+2NS+S^2)(L+M)}{(L-M+S)^3}; \\ a_3 &= e^2 \frac{\frac{L}{e^4} + M + \frac{4N}{e^2}}{M - \frac{L}{e^4} - \frac{4N+S}{e^2}} - e^2 - a_0 - a_1 - a_2. \end{aligned} \quad (6)$$

В формулах (6) используются новые параметры, выраженные соотношениями [8] через упругие характеристики (модуль упругости и коэффициент Пуассона) для каждого упругого слоя рассматриваемого двухслойного основания, а именно:

$$\begin{aligned} M &= (3+m-4\nu_1)(4m\nu_0-1-3m); \\ L &= (1-m)(3-3m-4\nu_1+4m\nu_0); \\ N &= (1-m)(1+3m-4m\nu_0); \quad m = \frac{E_1(1+\nu_0)}{E_0(1+\nu_1)}; \\ S &= 2[(1-m)(5+3m)+4\nu_1(m-3+2\nu_1)+4m\nu_0(1+m-2\nu_1)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Прогибы плиты с защемленной нормалью (рис. 4) в основной системе смешанного метода в полярных координатах определяются [9] по формуле

$$\begin{aligned} w(r, \theta) &= \frac{Pb^2}{16\pi D} \left( \frac{d^2 - 2dr \cos \theta + r^2}{b^2} \ln \frac{d^2 - 2dr \cos \theta + r^2}{b^2} + \right. \\ &\left. + \frac{2dr \cos \theta}{b^2} \left( \ln \frac{d^2 r^2}{b^4} - 1 \right) - \frac{d^2}{b^2} \ln \frac{d^2}{b^2} - \frac{r^2}{b^2} \ln \frac{r^2}{b^2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

где  $d$  – радиальная координата точки приложения сосредоточенной на плите;  $D$  – цилиндрическая жесткость плиты.



Рисунок 4 – Плита с защемленной нормалью в полярных координатах

Первые  $(m+3)$  уравнений системы (1) подобны стандартным уравнениям способа Б. Н. Жемочкина [5], где дополнительно входят 4 поперечные силы в разрезанных шарнирах. Последние два уравнения выражают условия отсутствия вертикальных взаимных перемещений в местах расположения промежуточных шарниров на границе двух соседних плит. Для первой слева крайней плиты к системе (1) добавляются еще два уравнения, выражающие условия отсутствия вертикального перемещения в левых опорных шарнирах.

Если обозначить число плит через  $N_p$ , то общее число неизвестных усилий в связях Б. Н. Жемочкина, линейных и угловых перемещений введенных защемлений на плитах и поперечных сил в шарнирах для расчета этой системы плит выразится формулой

$$N_p(m+3) + 2N_p + 2. \quad (9)$$

Структура системы разрешающих уравнений для совокупности шарнирно-соединенных прямоугольных плит, связанных конструктивно в единую систему, представлена на рис. 5. Блоки по главной диагонали образованы по математическим правилам системы линейных алгебраических уравнений (1), побочные блоки являются ненулевыми для трехслойного упругого основания и характеризуют взаимное влияние дорожных плит, см. формулы (5), (7), (8).

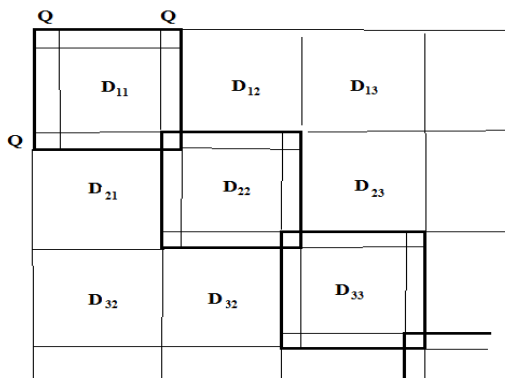


Рисунок 5 – Структура системы разрешающих уравнений

### Численная апробация

Предлагаемый подход решения задачи статического расчета шарнирно-соединенных дорожных плит на упругом основании на вертикальную нагрузку численно реализуется для гибких железобетонных плит на трехслойном основании.

Расчеты выполнялись для системы из 7 шарнирно-соединенных **дорожных железобетонных плит** размером 4м x 3м x 0,18м из тяжелого бетона C20/25 на трехслойном упругом основании со следующими характеристиками упругих слоев слоистого основания (см. рис. 3):

$$E_2 = 25 \text{ МПа}; \nu_2 = 0.2; h_2 = 0.25 \text{ м};$$

$$E_1 = 15 \text{ МПа}; \nu_1 = 0.25; h_1 = 0.5 \text{ м};$$

$$E_0 = 12 \text{ МПа}; \nu_0 = 0.35.$$

Внешняя нагрузка  $R = 67,5$  кН распределена по площади 0,4 м x 0,4 м и приложена в центре плиты. Собственный вес плиты – 54 кН. Принята разбивка каждой плиты на 6x5 равных прямоугольных участков. Общее число неизвестных – 247.

Показатель гибкости прямоугольной плиты  $\beta$  определяется по формуле [10] и, с учетом ее опирания через винклеровский слой трехслойного основания (щебень, с упругими параметрами  $E_2, \nu_2$ ) на верхний слой двухслойного основания (песок, с упругими параметрами  $E_1, \nu_1$ ), равен

$$\beta = \frac{\pi E_1 a^3}{(1-\nu_1^2)D} = 218.745, \quad (10)$$

где  $a$  – ширина прямоугольной плиты в плоскости изгиба,  $a = 4$  м;  $D$  – цилиндрическая жесткость железобетонной плиты из тяжелого бетона класса C25/30 ( $E_b = 2,905 \cdot 10^{10}$  Па),  $D = 1470,66$  кН·м.

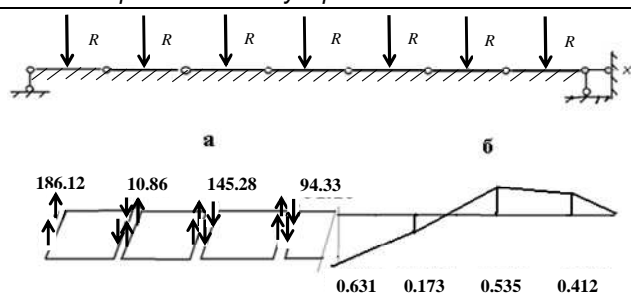
По формуле (5) определяется коэффициент постели, который после подстановки исходных упругих параметров

$$k = 111,11 \frac{\text{МПа}}{\text{м}}.$$

На рис. 6, 7 приведены результаты расчета системы из 7 шарнирно-соединенных дорожных железобетонных плит: распределение поперечных сил в соединительных шарнирах, осадки центров плиты, эпюры распределения реактивных давлений.

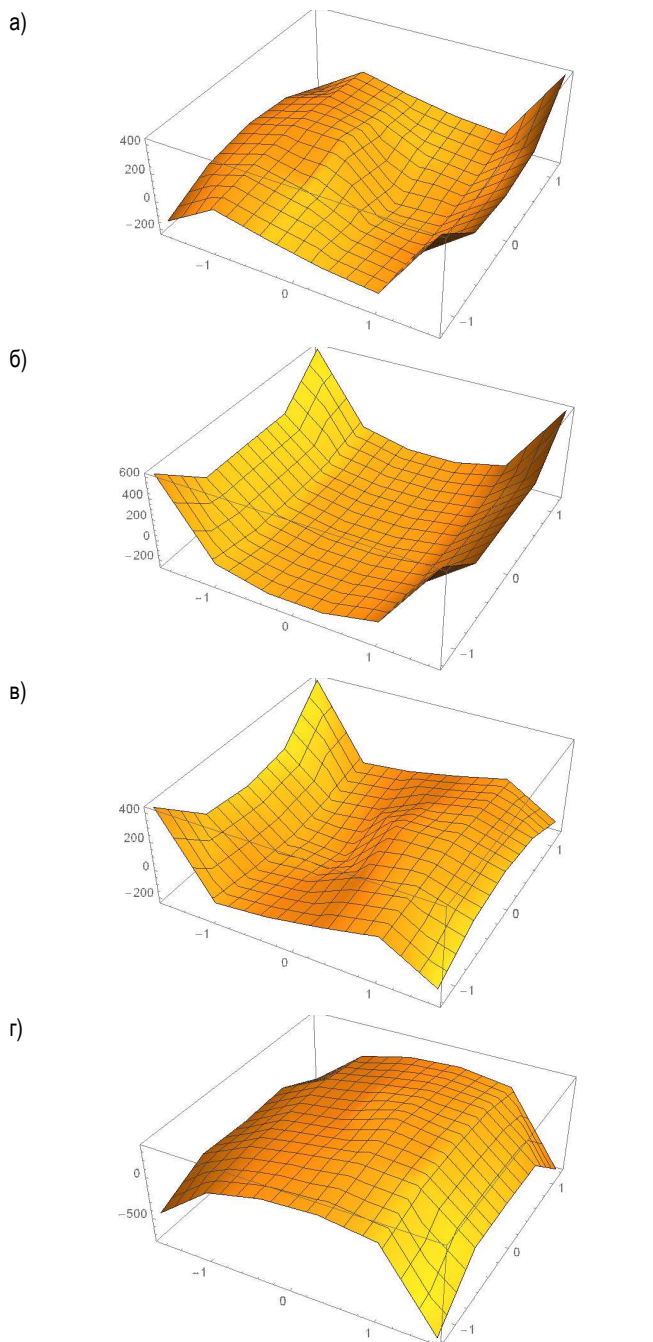
### Заключение

В работе получила развитие универсальная методика решения контактных задач статического расчета системы шарнирно-соединенных дорожных плит на неоднородном упругом основании в виде трехслойного основания на вертикальную нагрузку из системы сосредоточенных сил, действие которых приближено к действию равномерно распределенной нагрузки. Методика основана на смешанном методе строительной механики и способе Б. Н. Жемочкина и может быть обобщена на любое число плит конечной жесткости и различные модели упругого основания.



а – распределение поперечных сил в шарнирах (кН); б – осадки центров плиты (мм)

Рисунок 6 – Результаты расчета системы из 7 шарнирно-соединенных дорожных плит



а) в первой плите слева; б) во второй плите слева; в) в третьей плите слева; г) в центральной плите

Рисунок 7 – Эпюры распределения реактивных давлений через усилия в связях Жемочкина (кПа)

Поэтому мы вправе утверждать, что в данной работе предложен общий подход для расчета шарнирно-соединенных дорожных плит на неоднородном (слоистом) упругом основании. Отличие от стандартного способа Жемочкина расчета заключается во введении дополнительных неизвестных поперечных сил в соединительных шарнирах и составлении условий равенства вертикальных перемещений в общих шарнирах смежных прямоугольных плит, а также в использовании функций влияния по Жемочкину для трехслойного упругого основания в новом представлении.

**Список цитированных источников**

1. Корнев, Б. Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании / Б. Г. Корнев. – М. : Госстройиздат, 1954. – 231 с.
2. Серебряный, Р. В. Расчет тонких шарнирно-соединенных плит на упругом основании / Р. В. Серебряный. – М. : Госстройиздат, 1962. – 80 с.
3. Попов, Г. Я. О расчете неограниченной шарнирно-разрезной балочной плиты, лежащей на упругом полупространстве / Г. Я. Попов // Изв. вузов : Строительство и архитектура. – № 3. – 1959. – С. 25–33.
4. Ржаницын, А. Р. Строительная механика / А. Р. Ржаницын. – М. : Высшая школа, 1991. – 439 с.
5. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын. – М. : Стройиздат, 1962. – 239 с.
6. Босаков, С. В. Расчет шарнирно-соединенных прямоугольных жестких плит на основании Винклера / С. В. Босаков, С. И. Зиневич, О. В. Козунова // НТЖ : Строительная механика и расчет сооружений. – № 3(278). – М., 2018. – С. 8–10.
7. Босаков, С. В. Об одной модели упругого основания и ее использовании для расчета прямоугольной плиты на упругом основании / С. В. Босаков, С. И. Зиневич, О. В. Козунова // НТЖ : Строительная механика и расчет сооружений. – № 4(279) – М., 2018. – С. 2–5.
8. Коган, Б. И. Напряжения и деформации многослойных покрытий / Б.И. Коган // Тр. ХАДИ. – 1953. – Вып. 14. – С. 33–46.
9. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Минск : БНТУ, 2002. – 128 с.
10. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Стройиздат, 1984. – 680 с.

**References**

1. Korenev, B. G. Voprosy rascheta balok i plit na uprugom osnovanii / B. G. Korenev. – M. : Gosstrojizdat, 1954. – 231 s.
2. Serebryanyj, R. V. Raschet tonkih sharnirno-soedinennyh plit na uprugom osnovanii / R. V. Serebryanyj. – M. : Gosstrojizdat, 1962. – 80 s.
3. Popov, G. Ya. O raschete neogranichennoj sharnirno-razreznoj balochnoj plity, lezhashchej na uprugom poluprostanstve / G. Ya. Popov // Izv. vuzov : Stroitel'stvo i arhitektura. – № 3. – 1959. – S. 25–33.
4. Rzhanicyn, A. R. Stroitel'naya mekhanika / A. R. Rzhanicyn. – M. : Vysshaya shkola, 1991. – 439 s.
5. Zhemochkin, B. N. Prakticheskie metody rascheta fundamentnyh balok i plit na uprugom osnovanii / B.N. Zhemochkin, A. P. Sinicyn. – M. : Strojizdat, 1962. – 239 s.
6. Bosakov, S. V. Raschet sharnirno-soedinennyh pryamougol'nyh zhestkih plit na osnovanii Vinklera // S. V. Bosakov, S. I. Zinevich, O. V. Kozunova / NTZH: Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. – № 3(278) – M., 2018. – S. 8–10.
7. Bosakov, S. V. Ob odnoj modeli uprugogo osnovaniya i ee ispol'zovanii dlya rascheta pryamougol'noj plity na uprugom osnovanii // S. V. Bosakov, S. I. Zinevich, O. V. Kozunova // NTZH : Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. – № 4(279) – M., 2018. – S. 2–5.
8. Kogan, B. I. Napryazheniya i deformacii mnogoslajnyh pokrytij / B. I. Kogan // Tr. HADI. – 1953. – Vyp.14. – S. 33–46.
9. Bosakov, S. V. Sticheskie raschety plit na uprugom osnovanii / S. V. Bosakov. – Minsk : BNTU, 2002. – 128 s.
10. Gorbunov-Posadov, M. I. Raschet konstrukcij na uprugom osnovanii / M. I. Gorbunov-Posadov, T. A. Malikova, V. I. Solomin. – 3-e izd., pererab. i dop. – M. : Strojizdat, 1984. – 680 s.

Материал поступил в редакцию 30.12.2019