

Рисунок 5 – Восстановление временной зависимости  $\omega_c$ .

тальными данными и компьютерным моделированием отражения акустического сигнала. Пример восстановления временной зависимости  $\omega_c$  показан на рисунке 5. Экспериментальная зависимость  $u_{\text{эксп.}}(t)$  получена при отражении сигнала, сходного с рисунком 3, от компаунда ЭС в процессе его отвердевания. Теоретическая зависимость  $u_{\text{теор.}}(\omega_c)$  являет-

УДК 539.3

**Босяков С.М.**

## УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА С УЧЕТОМ ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА И ИХ АНАЛИЗ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК

### ВВЕДЕНИЕ

Динамические процессы в изотропной и анизотропной

средах с конечной скоростью распространения тепла достаточно полно изучены с позиций теории плоских волн и ее

*Босяков Сергей Михайлович. Ассистент каф. СМиТМ Брестского государственного технического университета.*

ся результатом моделирования отраженного сигнала с характеристиками и параметрами сред 1 и 2, аналогичными имевшим место в эксперименте.

Исходя из приведенных выше соотношений, затухание и вязкость могут быть восстановлены, если известна временная зависимость скорости звука в компаунде ЭС. Отметим однако, что по полученным экспериментальным результатам, описанным в [3, 5], для рассматриваемых реальных структур изменения  $\omega_c$ , а следовательно,  $a$  и  $b$  на порядок выше, чем изменения  $S_l$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В различных технологических процессах приготовления веществ и продуктов имеет место изменение агрегатного состояния исходных материалов, в частности отверждение последних. При этом степень отверждения вещества однозначно говорит о качестве его приготовления. Примерами соответствующих реальных процессов могут быть сцепление асфальтового покрытия с дорожным грунтом, бетона с железной арматурой, брожение пищевых продуктов, определение влажности почв, грунтовых и сыпучих материалов, степени загрязнения сточных вод и т.д.

В электронной промышленности в широком круге технологических процессов, включая молекулярную и лазерную эпитаксию, электро- и фотолитографию, электрохимию, плазменное и вакуумное напыление, пайку припоем, также участвуют среды, подобные СДС.

Следует сделать вывод, что предложенный высокочувствительный метод ультразвуковой диагностики, основанный на акустике СДС, представляет значительный интерес для исследования в реальном масштабе времени указанных процессов, а также определения физико-химических параметров различных сред.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн./ М.: Наука. 1990. 432 с.
2. Дьелесан Э., Руайе Э. Упругие волны в твердых телах / М.: Наука. 1982. 424 с.
3. Костюк Д. А., Кузавко Ю. А. Особенности отражения акустических продольных волн от границы с диссипативной средой // «Вестник Брестского университета», №4, 2000. с. 56-69.
4. Костюк Д. А., Кузавко Ю. А. Особенности граничного отражения поперечных волн от диссипативной среды. // «Вестник БГТУ. –Машиностроение, автоматизация, ЭВМ», №4, 2000. с. 48-51.
5. Костюк Д.А., Кузавко Ю.А. Аномалии граничного отражения ультразвука от диссипативной среды. // «Письма в ЖТФ», 2001, том 27, вып. 3. с. 31-40

модификаций [1-3]. Поэтому все более актуальным становится применение других методов к исследованию закономерностей распространения термоупругих волн в сплошных средах, что частично нашло свое отражение в работах [4-5]. В данной работе выводятся уравнения термоупругости кубически анизотропного тела в напряжениях с учетом конечной скорости релаксации теплового потока, и рассматривается реализация метода характеристик применительно к исследованию нестационарных процессов в такой среде.

**ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ**

Закон Дюамеля – Неймана для кубически анизотропного термоупругого тела имеет следующий вид [3]:

$$\sigma_{ii} = (A_1 - A_2)e_{ii} + A_2 \sum_{k=1}^3 e_{kk} - \beta T, \quad \sigma_{ij} = 2A_4 e_{ij}, \quad (1)$$

$$i \neq j = \overline{1,3},$$

где  $e_{kl} = \frac{1}{2}(\partial_l u_k + \partial_k u_l)$  - тензор деформаций,

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  - вектор перемещений,  $A_1, A_2, A_4$  - упругие постоянные,  $\beta$  - термоупругая постоянная,  $\beta = \alpha(A_1 + 2A_2)$ ,  $\alpha$  - коэффициент линейного теплового расширения,  $T$  - абсолютная температура,

$$\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k, l = \overline{1,3}.$$

Из (1) следуют такие уравнения движения в перемещениях:

$$(A_4 \Delta + \varepsilon \partial_i^2) u_i + (A_2 + A_4) \partial_i \sum_{k=1}^3 \partial_k u_k + X_i = \rho \ddot{u}_i + \beta \partial_i T \quad (2)$$

$\Delta$  - оператор Лапласа,  $\varepsilon = A_1 - A_2 - 2A_4$ ,  $\rho$  - плотность среды,  $X_i$  - массовые силы,  $\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ ,  $i = \overline{1,3}$ .

Запишем уравнения движения (2) в компонентах тензора напряжений. Для этого (2) продифференцируем по  $x_j$  и по  $x_j$  и полученные выражения сложим. Будем иметь

$$A_4 \Delta (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \varepsilon (\partial_j \partial_i^2 u_i + \partial_i \partial_j^2 u_j) + 2(A_2 + A_4) \partial_j \partial_i \sum_{k=1}^3 \partial_k u_k + \partial_j X_i + \partial_i X_j = \rho (\partial_j \ddot{u}_i + \partial_i \ddot{u}_j) + 2\beta \partial_i \partial_j T,$$

или

$$2A_4 \Delta e_{ij} + \varepsilon \partial_i \partial_j (e_{ii} + e_{jj}) + 2(A_2 + A_4) \partial_j \partial_i \sum_{k=1}^3 e_{kk} + \partial_j X_i + \partial_i X_j = 2\rho \ddot{e}_{ij} + 2\beta \partial_i \partial_j T. \quad (3)$$

Из (1) вытекают следующие соотношения

$$\sum_{k=1}^3 e_{kk} = \frac{1}{A_1 + 2A_2} \left( \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk} + 3\beta T \right), \quad e_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2A_4}, \quad (4)$$

$$e_{ii} = \frac{1}{A_1 - A_2} \left( \sigma_{ii} - \frac{A_2}{A_1 + 2A_2} \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk} \right) + \frac{\beta T}{A_1 + 2A_2}.$$

В уравнениях (3) положим  $i = j$ . Получим

$$A_4 \Delta e_{ii} + \varepsilon \partial_i^2 e_{ii} + (A_2 + A_4) \partial_i^2 \sum_{k=1}^3 e_{kk} + \partial_i X_i = \rho \ddot{e}_{ii} + 2\beta \partial_i^2 T. \quad (5)$$

$$+ \partial_i X_i = \rho \ddot{e}_{ii} + 2\beta \partial_i^2 T.$$

С помощью (4) из (5) после несложных преобразований будем иметь

$$(A_1 + 2A_2) (\Delta \sigma_{ii} + \varepsilon \partial_i^2 \sigma_{ii} - \rho \ddot{\sigma}_{ii}) - A_2 \Delta \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk} + (A_1 + A_2) \partial_i^2 \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk} + A_2 \sum_{k=1}^3 \ddot{\sigma}_{kk} + (A_1 - A_2) \beta (\Delta T + \partial_i^2 T - \rho \ddot{T}) + (A_1 - A_2) (A_1 + 2A_2) \partial_i \bar{X}_i = 0. \quad (6)$$

Запишем уравнения (3) с учетом того, что  $i \neq j$ , и воспользуемся формулами (4). В результате получим:

$$\frac{(A_1 - A_2)(A_1 + 2A_2)}{A_4} (\Delta \sigma_{ij} - \rho \ddot{\sigma}_{ij}) + \varepsilon (A_1 + 2A_2) \partial_i \partial_j (\sigma_{ii} + \sigma_{jj}) + 2(A_1 + A_2) \partial_i \partial_j \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk} + 2(A_1 - A_2) \beta \partial_i \partial_j T + (A_1 - A_2) (A_1 + 2A_2) (\partial_i \bar{X}_j + \partial_j \bar{X}_i) = 0. \quad (7)$$

В уравнениях (6), (7)

$$\bar{\varepsilon} = \frac{A_1 - A_2}{A_4} - 2, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{A_4}, \quad \bar{X}_i = \frac{X_i}{A_4}, \quad i = \overline{1,3}.$$

Для получения замкнутой системы уравнений термоупругости кубически анизотропного тела присоединим к (6), (7) обобщенное уравнение теплопроводности (в отсутствии внутренних источников тепла), которое формально совпадает с уравнением теплопроводности для изотропной среды [3]

$$\lambda \Delta T - c_v (\dot{T} + \tau \ddot{T}) = T_0 \beta \left( \sum_{k=1}^3 \dot{e}_{kk} + \tau \sum_{k=1}^3 \ddot{e}_{kk} \right).$$

или, учитывая (4),

$$\lambda \Delta T - (\dot{T} + \tau \ddot{T}) \left( c_v + \frac{3\beta^2 T_0}{A_1 + 2A_2} \right) = \frac{T_0 \beta}{A_1 + 2A_2} \left( \sum_{k=1}^3 \dot{\sigma}_{kk} + \tau \sum_{k=1}^3 \ddot{\sigma}_{kk} \right). \quad (8)$$

Здесь  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности,  $\tau$  - время релаксации теплового потока,  $c_v$  - удельная теплоемкость при постоянном объеме,  $T_0$  - начальная температура. Учитывая связь между термоупругой константой  $\beta$  и коэффициентом линейного теплового расширения  $\alpha$ , уравнение (8) преобразуем к следующему виду

$$\lambda \Delta T - (\dot{T} + \tau \ddot{T}) (c_v + 3\alpha^2 T_0 (A_1 + 2A_2)) = T_0 \alpha \left( \sum_{k=1}^3 \dot{\sigma}_{kk} + \tau \sum_{k=1}^3 \ddot{\sigma}_{kk} \right). \quad (9)$$

Уравнения (6), (7) и (9) образуют полную замкнутую систему дифференциальных уравнений термоупругости кубически анизотропного тела в случае обобщенной взаимосвязанной динамической задачи термоупругости.

Таблица 1 – Значения коэффициентов связности для некоторых кубически анизотропных тел.

Материал	Упругие постоянные, ×10 <sup>10</sup> Н/м <sup>2</sup>			α, ×10 <sup>-6</sup> 1/град	a, кН/град·м <sup>2</sup>	b
	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>4</sub>			
серебро	12.4	9.34	4.61	19.0	98.623	0.0056
свинец	4.66	3.92	1.44	28.35	88.309	0.0083
молибден	46	17.6	11.0	5.0	17.844	0.0015
алюминий	10.82	6.13	2.85	22.6	139.536	0.0066
золото	18.6	15.7	4.20	14.0	86.142	0.004
медь	16.84	12.14	7.54	16.61	99.720	0.005
никель	24.65	14.73	12.47	12.55	74.912	0.0037
вольфрам	50.1	19.8	15.14	4.4	15.265	0.0013

Таблица 2 – Значения скоростей распространения термоупругой волны в некоторых кубически анизотропных телах.

Материал	λ, Вт/м·град	c <sub>v</sub> , кДж/град·м <sup>3</sup>	ρ, кг/м <sup>3</sup>	V, м/с	V <sub>T</sub> , м/с	δ = $\frac{V_T - V}{V}$ , %
серебро	418	2454	10505	4047	4127	2
свинец	34.89	1458	11342	1502	1547	3
молибден	162	2188	9010	2668	2721	2
алюминий	207	2370	2700	2872	2955	3
золото	310	2451	19300	3496	3556	1.7
медь	400	3377	8930	3392	3442	1.5
никель	92	3919	8850	1518	1532	1
вольфрам	33.2	2503	18850	1148	1152	0.3

**МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК**

Начальные данные для системы (6), (7) и (9) зададим на поверхности  $Z(t, x_1, x_2, x_3) = const$  и перейдем к новым переменным по следующей схеме [6]

$$Z = Z(t, x_1, x_2, x_3), Z_k = Z_k(t, x_1, x_2, x_3), k = \overline{1,3}.$$

Производные по старым переменным запишем через производные по новым переменным

$$\frac{\partial y(t, X)}{\partial x_k} = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial y}{\partial Z_i} \frac{\partial Z_i}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_n} = \sum_{i,j=0}^3 \frac{\partial^2 y}{\partial Z_j \partial Z_i} \frac{\partial Z_j}{\partial x_k} \frac{\partial Z_i}{\partial x_n} + \sum_{i=0}^3 \frac{\partial y}{\partial Z_i} \frac{\partial^2 Z_i}{\partial x_n \partial x_k}, \quad (10)$$

$$Z \equiv Z_0, t \equiv x_0.$$

Внесем (10) в систему (6), (7), (9) и выпишем те члены, которые содержат производные второго порядка

$\frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial Z^2}, \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}, i, j = \overline{1,3}$ , так как только они будут важны для последующего анализа [6]. Будем иметь

$$(\delta + 3)(g^2 + \bar{\epsilon} p_i^2 - \bar{\rho} p_0^2) \frac{\partial^2 \sigma_{ii}}{\partial Z^2} -$$

$$-(g^2 - (\delta + 2) p_i^2 - \bar{\rho} p_0^2) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial Z^2} +$$

$$+\delta \beta (g^2 + p_i^2 - \bar{\rho} p_0^2) \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} + \dots = 0,$$

$$\frac{A_1 + 2A_2}{A_4} \delta (g^2 - \bar{\rho} p_0^2) \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial Z^2} +$$

$$+ \bar{\epsilon} (\delta + 3) \left( \frac{\partial^2 \sigma_{ii}}{\partial Z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{jj}}{\partial Z^2} \right) p_i p_j +$$

$$+ 2(\delta + 2) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial Z^2} p_i p_j + 2\delta \beta \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} p_i p_j + \dots = 0, \quad (11)$$

$$\left( \lambda g^2 - \tau (c_v + 3\alpha^2 (A_1 + 2A_2) T_0 p_0^2) \right) \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} -$$

$$- \tau \alpha T_0 p_0^2 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial Z^2} + \dots = 0,$$

где

$$\delta = \frac{A_1}{A_2} - 1, \quad g^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \quad p_0 = \frac{\partial Z}{\partial t},$$

$$p_k = \frac{\partial Z}{\partial x_k}, \quad k = \overline{1,3}$$

Чтобы получить уравнение распространения характеристик, приравняем нулю определитель, составленный из коэффициентов при производных второго порядка по Z, входящих в систему (11) [6]. Будем иметь

$$\det \|\omega_{kl}\|_{k,l=\overline{1,7}} = 0, \quad (12)$$

$$\omega_{ii} = (\delta + 2)(g^2 - \bar{\rho} p_0^2) + p_i^2 (\bar{\epsilon} (\delta + 3) + \delta + 2), \quad \omega_{ij} =$$

$$= p_i^2 (\delta + 2) - (g^2 - \bar{\rho} p_0^2),$$

$$\begin{aligned} \omega_{41} = \omega_{42} = \omega_{51} = \omega_{53} = \omega_{62} = \omega_{63} = \\ = p_1 p_2 (\varepsilon(\delta + 3) + 2(\delta + 2)), \\ \omega_{3+i,4-i} = 2(\delta + 2) p_1 p_2, \omega_{i+3,i+3} = \\ = \frac{A_1 + 2A_2}{A_4} \delta (g^2 - \bar{\rho} p_0^2), \omega_{7i} = -b \varphi_0^2, \\ \omega_{i7} = \delta \beta (g^2 + p_i^2 - \bar{\rho} p_0^2), \omega_{i+3,7} = \\ = 2\delta \beta p_1 p_2, \omega_{77} = \lambda g^2 - \tau (c_v + a) p_0^2, \\ a = 3T_0 (A_1 + 2A_2) \alpha^2, b = T_0 \alpha, i \neq j = \bar{1,3}. \end{aligned} \quad (13)$$

В формулах (13) постоянные  $a$  и  $b$  выражают связь между механическим и температурным полями, причем при температуре  $T_0 = 293 \text{ K}$  константа  $a$  имеет порядок  $10^4 \div 10^5 \text{ Н/град}\cdot\text{м}^2$ , константа  $b \sim 10^{-4} \div 10^{-3}$  [7, 8] (таблица 1). Учитывая, что время релаксации теплового потока для металлов имеет порядок  $10^{-11} \text{ с}$ , в формулах (13) можно принять компоненты  $\omega_{7i} \approx 0$ . В этом случае для расчета скорости распространения термоупругой волны (тепловой волны, сопровождающейся полем деформаций) из (12) будем иметь

$$V = \sqrt{\frac{\lambda}{\tau(c_v + a)}}. \quad (14)$$

Определенные таким образом по данным таблицы 1 значения скоростей распространения термоупругой волны в некоторых кубически анизотропных телах, а также относительное изменение скорости  $V$  по сравнению со скоростью теплового потока  $V_T = \sqrt{\frac{\lambda}{\tau c_v}}$  приведены в таблице 2. Как следует из (14) и таблицы 2, скорость  $V$  меньше скорости теплового потока [1]  $V_T$  и не зависит от угла наклона нормали характеристической поверхности. Это является аналитическим подтверждением того факта, что скорость волны второго звука  $V$  меньше скорости распространения тепловой волны

$$V_T, \text{ поскольку } V_T = V \sqrt{1 + \frac{a}{c_v}}.$$

Введем обозначения  $y = 1 + \frac{A_1 - A_4}{3A_4} - \bar{\rho} p_0^2$ .

$$\begin{aligned} p = (A_1 - A_2 - 2A_4)(A_1 + A_2) \sum_{i \neq j=1}^3 \cos^2 \alpha_i \cos^2 \alpha_j - \\ - \frac{1}{3}(A_1 - A_4)^2, q = \frac{2}{27}(A_1 - A_4)^3 - \\ - \frac{1}{3}(A_1 - A_2 - 2A_4)(A_1 - A_4)(A_1 + A_2) \times \\ \times \sum_{i \neq j=1}^3 \cos^2 \alpha_i \cos^2 \alpha_j + (A_1 - A_2 - 2A_4)^2 (A_1 + 2A_2 + A_4) \times \\ \times \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_3. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда для скоростей распространения упругих волн из (12) имеем следующее выражение:

$$y^3 + py + q = 0, \quad (15)$$

где  $\cos \alpha_i = \frac{p_i}{g}$  - направляющие косинусы нормали к ха-

рактеристической поверхности,  $i = \bar{1,3}$ . Для большинства кубически анизотропных тел с упругими постоянными

$A_1, A_2, A_4$  дискриминант  $D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$  кубиче-

ского уравнения (15) всегда неположителен, поэтому выражения для скоростей распространения упругих волн можно представить в следующем виде [9]:

$$\begin{aligned} V_k = \\ = \sqrt{\frac{1}{3\bar{\rho}} \left[ 2 + \frac{A_1}{A_4} - 6\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left[ \frac{1}{3} \left( \arccos \left( -\frac{q}{2} \sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3} \right) + 2\pi k \right) \right] \right]} \\ k = \bar{1,3} \end{aligned} \quad (16)$$

Для расчета скорости распространения поверхности разрыва, не зависящей от угла наклона нормали к характеристической поверхности, из (12) имеем

$$V^* = \sqrt{\frac{A_4}{\rho}}. \quad (17)$$

До сих пор полагалось, что  $\omega_{7i} = 0$ . Учет компонент  $\omega_{7i} = -b \varphi_0^2, i = \bar{1,3}$  при раскрытии определителя (12) существенно усложняет расчет скоростей распространения упругих и термоупругих волн, однако дает более полную информацию о характере волн и позволяет исследовать влияние времени релаксации теплового потока  $\tau$  на их распространение. В связи с этим обратимся к двумерным аналогам этой задачи (случай ПД).

### ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим системы координат  $(x_1, x_2, x_3)$  и  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  кубически анизотропного тела (рисунок 1) [10].

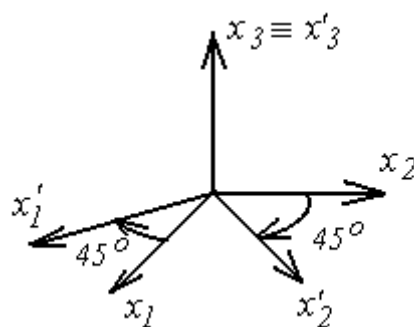


Рисунок 1 - Системы координат  $(x_1, x_2, x_3)$  и  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ .

Для описания динамических процессов в плоскости  $x_3 = 0$  воспользуемся законом Дюамеля - Неймана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = A_1 e_{11} + A_2 e_{22} - \beta T, \sigma_{22} = A_2 e_{11} + A_1 e_{22} - \beta T, \\ \sigma_{33} = A_2 (e_{11} + e_{22}) - \beta T, \sigma_{12} = \sigma_{21} = 2A_4 e_{12}. \end{aligned} \quad (18)$$

При этом из (18) имеем

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{A_1\sigma_{11} - A_2\sigma_{22}}{A_1^2 - A_2^2} + \frac{\beta T}{A_1 + A_2}, \\
 e_{22} &= \frac{A_1\sigma_{22} - A_2\sigma_{11}}{A_1^2 - A_2^2} + \frac{\beta T}{A_1 + A_2}, \\
 e_{11} + e_{22} &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{A_1 + A_2} + \frac{2\beta T}{A_1 + A_2}, \quad e_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2A_4}.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Подставляя (19) в уравнения (3) для случаев  $i = j = 1, 2$  и  $i = 1, j = 2$ , (напряженно – деформированное состояние характеризуется тремя независимыми компонентами напряжений  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ ), после очевидных преобразований получим

$$\begin{aligned}
 &A_1(A_4\Delta\sigma_{11} - \rho\ddot{\sigma}_{11}) + (A_1 + A_2)(A_1 - A_2 - 2A_4)\partial_1^2\sigma_{11} - \\
 &- A_2(A_4\Delta\sigma_{22} - \rho\ddot{\sigma}_{22}) + A_4(A_1 + A_2)\partial_1^2\sigma_{22} + \partial_1 X_1 + \\
 &+ \beta(A_1 - A_2)(A_4\Delta T - \rho\ddot{T}) = 0, \\
 &A_4\Delta\sigma_{12} - \rho\ddot{\sigma}_{12} + A_4\partial_1\partial_2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \partial_2 X_1 + \partial_1 X_2 = 0, \\
 &A_1(A_4\Delta\sigma_{22} - \rho\ddot{\sigma}_{22}) + (A_1 + A_2)(A_1 - A_2 - 2A_4)\partial_2^2\sigma_{22} - \\
 &- A_2(A_4\Delta\sigma_{11} - \rho\ddot{\sigma}_{11}) + A_4(A_1 + A_2)\partial_2^2\sigma_{11} + \partial_2 X_2 + \\
 &+ \beta(A_1 - A_2)(A_4\Delta T - \rho\ddot{T}) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Уравнение теплопроводности (9) преобразуем с учетом того, что  $e_{33} = 0$ , а потому  $\sigma_{33} = \frac{A_2(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{A_1 + A_2} + \frac{(A_2 - A_4)\beta T}{A_1 + A_2}$ . Получим

$$\begin{aligned}
 &\lambda\Delta T - (\dot{T} + \tau\ddot{T})\left(c_v + \frac{2\beta^2 T_0}{A_1 + A_2}\right) - \\
 &- \frac{\beta T_0}{A_1 + A_2}(\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22} + \tau(\ddot{\sigma}_{11} + \ddot{\sigma}_{22})) = 0
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Отметим, что система уравнений движения (20), (21) полученная для кубически анизотропного термоупругого тела в плоскости  $x_3 = 0$ , имеет аналогичный вид и в плоскостях  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$ .

В плоскости  $x_2' = 0$  кубически анизотропного тела выражения для напряжений имеют тот же вид, как и для тетрагонально-анизотропной среды [10]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= A_{11}e_{11} + A_{13}e_{33} - \beta_1 T, \quad \sigma_{33} = A_{13}e_{11} + A_{33}e_{33} - \beta_3 T, \\
 \sigma_{13} &= 2A_{44}e_{13}, \quad \sigma_{22} = A_{12}e_{11} + A_{13}e_{33} - \beta_1 T,
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

где  $A_{11}, A_{12}, A_{33}, A_{13}, A_{44}$  - упругие постоянные и  $\beta_1, \beta_3$  - термоупругие константы кубически анизотропной среды в системе координат  $(x_1', x_2', x_3')$ . Уравнения движения в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned}
 &(A_{11}\partial_1^2 + A_{44}\partial_3^2)u_1 + (A_{13} + A_{44})\partial_1\partial_3 u_3 = \rho\ddot{u}_1 + \beta_1\partial_1 T, \\
 &(A_{13} + A_{44})\partial_1\partial_3 u_1 + (A_{44}\partial_1^2 + A_{33}\partial_3^2)u_3 = \rho\ddot{u}_3 + \beta_3\partial_3 T.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Дифференцируя (23) по  $x_1$  и  $x_3$ , получим уравнения движения в деформациях

$$\begin{aligned}
 &(A_{11}\partial_1^2 + A_{44}\partial_3^2)e_{11} + (A_{13} + A_{44})\partial_1^3 e_{33} + \partial_1 X_1 = \rho\ddot{e}_{11} + \beta_1\partial_1^2 T, \\
 &(A_{44}\partial_1^2 + A_{33}\partial_3^2)e_{11} + (A_{13} + A_{44})\partial_3^3 e_{11} + \partial_3 X_3 = \rho\ddot{e}_{33} + \beta_3\partial_3^2 T, \\
 &\partial_1\partial_3(A_{11}e_{11} + A_{33}e_{33}) + A_{13}\partial_1\partial_3(e_{11} + e_{33}) + 2A_4(\partial_1^2 + \partial_3^2)e_{13} = \\
 &= 2\rho\ddot{e}_{13} + (\beta_1 + \beta_3)\partial_1\partial_3 T.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Из (22) имеем

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{A_{33}\sigma_{11} - A_{13}\sigma_{33} + T(\beta_1 A_{33} - \beta_3 A_{13})}{A_{11}A_{33} - A_{13}^2}, \\
 e_{33} &= \frac{A_{11}\sigma_{33} - A_{13}\sigma_{11} + T(\beta_3 A_{11} - \beta_1 A_{11})}{A_{11}A_{33} - A_{13}^2}, \\
 e_{13} &= \frac{\sigma_{13}}{2A_{44}}.
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Подставляя (25) в (24), получим

$$\begin{aligned}
 &(A_{11}A_{33} - A_{13}^2 - A_{13}A_{44})\partial_1^2\sigma_{11} + A_{11}A_{44}\partial_1^2\sigma_{33} + \\
 &+ A_{44}\partial_3^2(A_{33}\sigma_{11} - A_{13}\sigma_{33}) + A_{44}(\beta_3 A_{11} - \beta_1 A_{13})\partial_1^2 T + \\
 &+ (\beta_1 A_{33} - \beta_3 A_{13})(A_4\partial_3^2 T - \rho\ddot{T}) + \partial_1 X_1 = \\
 &= \rho(A_{33}\ddot{\sigma}_{11} - A_{13}\ddot{\sigma}_{33}), \\
 &(A_{11}A_{33} - A_{13}^2 - A_{13}A_{44})\partial_3^2\sigma_{33} + A_{33}A_{44}\partial_3^2\sigma_{11} + \\
 &+ A_{44}\partial_1^2(A_{11}\sigma_{33} - A_{13}\sigma_{11}) + A_{44}(\beta_1 A_{33} - \beta_3 A_{13})\partial_3^2 T + \\
 &+ (\beta_3 A_{11} - \beta_1 A_{13})(A_4\partial_1^2 T - \rho\ddot{T}) + \partial_3 X_3 = \\
 &= \rho(A_{11}\ddot{\sigma}_{33} - A_{13}\ddot{\sigma}_{11}), \\
 &A_{44}(\partial_1\partial_3(\sigma_{11} + \sigma_{33}) + \Delta\sigma_{13}) - \rho\ddot{\sigma}_{13} + \partial_1 X_3 + \partial_3 X_1 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Уравнение теплопроводности для кубически анизотропных тел в плоскости  $x_2' = 0$  запишем в следующем виде

$$\begin{aligned}
 &\lambda_1\partial_1^2 T + \lambda_3\partial_3^2 T - c_v(\dot{T} + \tau\ddot{T}) = \\
 &= T_0(\beta_1(\dot{e}_{11} + \tau\ddot{e}_{11}) + \beta_3(\dot{e}_{33} + \tau\ddot{e}_{33})).
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Выразим модули упругости  $A_{11}, A_{12}, A_{33}, A_{13}, A_{44}$ , термоупругие постоянные  $\beta_1, \beta_3$ , а также коэффициенты теплопроводности  $\lambda_1, \lambda_3$  в основной системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$ . Для этого запишем матрицу преобразования координат

$$\gamma_i^j = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда, используя известные законы преобразования тензоров [10],

$$A'_{ijkl} = \sum_{p,q,r,s=1}^3 \gamma_i^p \gamma_j^q \gamma_k^r \gamma_l^s A_{ijkl}, \quad \beta'_{ij} = \sum_{p,q=1}^3 \gamma_i^p \gamma_j^q \beta_{pq},$$

получим

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= A_4 + \frac{A_1 + A_2}{2}, \quad A_{12} = A_{13} = A_2, \quad A_{33} = A_1, \\
 A_{44} &= A_4, \quad \beta_1 = \beta_3, \quad \lambda_1 = \lambda_3.
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Окончательно, с помощью (25), (28) из (26) и (27), будем иметь следующую систему уравнений термоупругости кубически анизотропного тела в плоскости  $\mathbf{x}'_2 = \mathbf{0}$ :

$$\begin{aligned}
 & A^2 \partial_1^2 \sigma_{11} + \left( A_4 + \frac{A_1 + A_2}{2} \right) \partial_1^2 \sigma_{33} + \partial_3^2 (A_1 \sigma_{11} - A_2 \sigma_{33}) + \\
 & + \beta \left( A_4 + \frac{A_1 - A_2}{2} \right) \partial_1^2 T + \beta (A_1 - A_2) (\partial_3^2 T - \bar{\rho} \ddot{T}) + \\
 & + A^2 \partial_1 \bar{X}_1 = \rho (A_1 \ddot{\sigma}_{11} - A_2 \ddot{\sigma}_{33}), \\
 & A^2 \partial_3^2 \sigma_{33} + A_1 \partial_3^2 \sigma_{11} + \partial_1^2 \left( \left( A_4 + \frac{A_1 + A_2}{2} \right) \sigma_{33} - A_2 \sigma_{11} \right) + \\
 & + \beta (A_1 - A_2) \partial_3^2 T + \beta \left( A_4 + \frac{A_1 - A_2}{2} \right) (\partial_1^2 T - \bar{\rho} \ddot{T}) + A^2 \partial_3 \bar{X}_3 = \\
 & = \rho \left( \left( A_4 + \frac{A_1 + A_2}{2} \right) \ddot{\sigma}_{33} - A_2 \ddot{\sigma}_{11} \right), \\
 & \partial_1 \partial_3 (\sigma_{11} + \sigma_{33}) + \Delta \sigma_{13} - \bar{\rho} \ddot{\sigma}_{13} + \partial_1 \bar{X}_3 + \partial_3 \bar{X}_1 = 0, \\
 & \lambda \Delta T (A^2 + A_2 A_4) - (\dot{T} + \tau \ddot{T}) \times \\
 & \times \left( c_v (A^2 + A_2 A_4) + \beta^2 T_0 (A_4 + \frac{3}{2} (A_1 - A_2)) \right) = \\
 & = \beta T_0 \left( (A_1 - A_2) (\dot{\sigma}_{11} + \tau \ddot{\sigma}_{11}) + \left( A_4 + \frac{A_1 + A_2}{2} \right) (\dot{\sigma}_{33} + \tau \ddot{\sigma}_{33}) \right), \tag{29}
 \end{aligned}$$

где  $A^2 = A_1 \left( A_4 + \frac{A_1 + A_2}{2} \right) - A_2^2 - A_2 A_4$ .

С помощью (29) можно получить аналогичным образом уравнения движения в плоскости  $\mathbf{x}'_1 = \mathbf{0}$ ; в плоскости  $\mathbf{x}'_3 = \mathbf{0}$  система (29) принимает вид системы уравнений (20), (21).

УДК 539.3

**Босяков С. М.**

### ПОВЕРХНОСТИ ХРАКТЕРИСТИК В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

При изучении упругих волн, распространяющихся в некоторых материалах, необходимо учитывать пьезоэлектрическую связь между их упругими и электрическими свойствами. Распространение плоских волн в анизотропных средах с учетом пьезоэлектрического эффекта рассмотрено, в частности, в известных монографиях [1, 2]. В стороне от внимания ученых осталось применение метода характеристик [3 – 5] для исследования нестационарных процессов в кубически анизотропной среде с учетом связи между электрическими и упругими свойствами. Данная работа в определенной степени компенсирует этот пробел.

Следует отметить, что даже в сильных пьезоэлектриках взаимодействие между упругими и электромагнитными волнами оказывается слабым из-за большой разности соответствующих скоростей [1]. Поэтому распространение волн можно рассматривать независимо, в квазистатическом приближении. В этом случае разрешающая система уравнений движения

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Системы уравнений (20), (21) и (28) имеют явный вид и позволяют подробно исследовать закономерности распространения термоупругих волн и изменение термоупругой энергии в кубически анизотропных телах, а также выяснить характер взаимосвязи теплового и механического полей. Особенно целесообразным, в контексте обобщенной теории теплопроводности (ввиду малости промежутка времени  $\tau$ ), является применение метода характеристик. Результаты, полученные с его помощью, представляют собой выражения для скоростей распространения волн высокой частоты ( $\sim 10^9 - 10^{11}$  Гц), что дает возможность исследовать влияние времени релаксации теплового потока  $\tau$  на распространение термоупругих волн в зависимости от угла наклона нормали к характеристической поверхности.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. Киев, 1976.
2. Пашков А. С., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. Волновые явления теплопроводности: системно структурный подход. Мн., 1993.
3. Sharma J. N., Singh H. // J. Acoust. Soc. Am. 1989, Vol. 85, № 4, P. 1407 – 1413.
4. Haddow J. B., Wegner J. L. // Math. and Mech. Solids. 1996, Vol. 1, №1, P. 111 – 127.
5. Liu Kaishin, Xie Suming // Acta mech. solida sin. 1996. Vol. 17, № 3, P. 221 – 228.
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. IV, ч. 2. М., 1981.
7. Современная кристаллография. Т. IV. Физические свойства кристаллов. М., 1984.
8. Таблицы физических величин. Справочник. Под редакцией И. К. Кикоина. М. 1976.
9. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. III, ч. 1. М., 1980.
10. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М., 1982.

включает уравнения движения анизотропной среды и уравнение Пуассона для непроводящей среды [1, 2]. Имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j,k,l=1}^3 A_{ijkl} \partial_j \partial_k u_l + \sum_{j,k=1}^3 e_{kij} \partial_j \partial_k \Phi = \rho \ddot{u}_i, \\
 & \sum_{j,k,l=1}^3 e_{jkl} \partial_j \partial_k u_l - \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jk}^S \partial_j \partial_k \Phi = 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $e_{jkl}$  - пьезоэлектрические модули,  $\epsilon_{jk}^S$  - диэлектрические проницаемости,  $A_{ijkl}$  - упругие постоянные анизотропной среды,  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  - вектор перемещений,  $\rho$  - плотность,  $\Phi$  - электрический потенциал,

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i, j, k, l = \overline{1,3}.$$