

Окончательно, с помощью (25), (28) из (26) и (27), будем иметь следующую систему уравнений термоупругости кубически анизотропного тела в плоскости  $\mathbf{x}'_2 = \mathbf{0}$ :

$$\begin{aligned}
 & A^2 \partial_1^2 \sigma_{11} + \left( A_4 + \frac{A_1 + A_2}{2} \right) \partial_1^2 \sigma_{33} + \partial_3^2 (A_1 \sigma_{11} - A_2 \sigma_{33}) + \\
 & + \beta \left( A_4 + \frac{A_1 - A_2}{2} \right) \partial_1^2 T + \beta (A_1 - A_2) (\partial_3^2 T - \bar{\rho} \ddot{T}) + \\
 & + A^2 \partial_1 \bar{X}_1 = \rho (A_1 \ddot{\sigma}_{11} - A_2 \ddot{\sigma}_{33}), \\
 & A^2 \partial_3^2 \sigma_{33} + A_1 \partial_3^2 \sigma_{11} + \partial_1^2 \left( \left( A_4 + \frac{A_1 + A_2}{2} \right) \sigma_{33} - A_2 \sigma_{11} \right) + \\
 & + \beta (A_1 - A_2) \partial_3^2 T + \beta \left( A_4 + \frac{A_1 - A_2}{2} \right) (\partial_1^2 T - \bar{\rho} \ddot{T}) + A^2 \partial_3 \bar{X}_3 = \\
 & = \rho \left( \left( A_4 + \frac{A_1 + A_2}{2} \right) \ddot{\sigma}_{33} - A_2 \ddot{\sigma}_{11} \right), \\
 & \partial_1 \partial_3 (\sigma_{11} + \sigma_{33}) + \Delta \sigma_{13} - \bar{\rho} \ddot{\sigma}_{13} + \partial_1 \bar{X}_3 + \partial_3 \bar{X}_1 = 0, \\
 & \lambda \Delta T (A^2 + A_2 A_4) - (\dot{T} + \tau \ddot{T}) \times \\
 & \times \left( c_v (A^2 + A_2 A_4) + \beta^2 T_0 (A_4 + \frac{3}{2} (A_1 - A_2)) \right) = \\
 & = \beta T_0 \left( (A_1 - A_2) (\dot{\sigma}_{11} + \tau \ddot{\sigma}_{11}) + \left( A_4 + \frac{A_1 + A_2}{2} \right) (\dot{\sigma}_{33} + \tau \ddot{\sigma}_{33}) \right), \tag{29}
 \end{aligned}$$

где  $A^2 = A_1 \left( A_4 + \frac{A_1 + A_2}{2} \right) - A_2^2 - A_2 A_4$ .

С помощью (29) можно получить аналогичным образом уравнения движения в плоскости  $\mathbf{x}'_1 = \mathbf{0}$ ; в плоскости  $\mathbf{x}'_3 = \mathbf{0}$  система (29) принимает вид системы уравнений (20), (21).

УДК 539.3

**Босяков С. М.**

### ПОВЕРХНОСТИ ХРАКТЕРИСТИК В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

При изучении упругих волн, распространяющихся в некоторых материалах, необходимо учитывать пьезоэлектрическую связь между их упругими и электрическими свойствами. Распространение плоских волн в анизотропных средах с учетом пьезоэлектрического эффекта рассмотрено, в частности, в известных монографиях [1, 2]. В стороне от внимания ученых осталось применение метода характеристик [3 – 5] для исследования нестационарных процессов в кубически анизотропной среде с учетом связи между электрическими и упругими свойствами. Данная работа в определенной степени компенсирует этот пробел.

Следует отметить, что даже в сильных пьезоэлектриках взаимодействие между упругими и электромагнитными волнами оказывается слабым из-за большой разности соответствующих скоростей [1]. Поэтому распространение волн можно рассматривать независимо, в квазистатическом приближении. В этом случае разрешающая система уравнений движения

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Системы уравнений (20), (21) и (28) имеют явный вид и позволяют подробно исследовать закономерности распространения термоупругих волн и изменение термоупругой энергии в кубически анизотропных телах, а также выяснить характер взаимосвязи теплового и механического полей. Особенно целесообразным, в контексте обобщенной теории теплопроводности (ввиду малости промежутка времени  $\tau$ ), является применение метода характеристик. Результаты, полученные с его помощью, представляют собой выражения для скоростей распространения волн высокой частоты ( $\sim 10^9 - 10^{11}$  Гц), что дает возможность исследовать влияние времени релаксации теплового потока  $\tau$  на распространение термоупругих волн в зависимости от угла наклона нормали к характеристической поверхности.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. Киев, 1976.
2. Пашков А. С., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. Волновые явления теплопроводности: системно структурный подход. Мн., 1993.
3. Sharma J. N., Singh H. // J. Acoust. Soc. Am. 1989, Vol. 85, № 4, P. 1407 – 1413.
4. Haddow J. B., Wegner J. L. // Math. and Mech. Solids. 1996, Vol. 1, №1, P. 111 – 127.
5. Liu Kaishin, Xie Suming // Acta mech. solida sin. 1996. Vol. 17, № 3, P. 221 – 228.
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. IV, ч. 2. М., 1981.
7. Современная кристаллография. Т. IV. Физические свойства кристаллов. М., 1984.
8. Таблицы физических величин. Справочник. Под редакцией И. К. Кикоина. М. 1976.
9. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. III, ч. 1. М., 1980.
10. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М., 1982.

включает уравнения движения анизотропной среды и уравнение Пуассона для непроводящей среды [1, 2]. Имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j,k,l=1}^3 A_{ijkl} \partial_j \partial_k u_l + \sum_{j,k=1}^3 e_{kij} \partial_j \partial_k \Phi = \rho \ddot{u}_i, \\
 & \sum_{j,k,l=1}^3 e_{jkl} \partial_j \partial_k u_l - \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jk}^S \partial_j \partial_k \Phi = 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $e_{jkl}$  - пьезоэлектрические модули,  $\epsilon_{jk}^S$  - диэлектрические проницаемости,  $A_{ijkl}$  - упругие постоянные анизотропной среды,  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  - вектор перемещений,  $\rho$  - плотность,  $\Phi$  - электрический потенциал,

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i, j, k, l = \overline{1,3}.$$

Для кубических анизотропных сред уравнения (1) принимают вид [1, 2]:

$$(A_4 \Delta + \varepsilon \partial_i^2) u_i + (A_2 + A_4) \partial_i \sum_{k=1}^3 \partial_k u_k + 2e \sum_{j \neq k=1}^3 \partial_j \partial_k \Phi = \rho \ddot{u}_i, \\ 2e \sum_{j \neq k=1}^3 \partial_j \partial_k u_i - \varepsilon^S \Delta \Phi = 0, \quad \varepsilon = A_1 - A_2 - 2A_4, \quad i = \overline{1,3}. \quad (2)$$

Будем считать электрический потенциал  $\Phi$  непрерывно дифференцируемой функцией и начальные данные к системе (2) зададим на плоскости  $t=0$  [3-5]

$$u_i|_{t=0} = f_i(x_1, x_2, x_3), \quad \dot{u}_i|_{t=0} = \varphi_i(x_1, x_2, x_3), \quad (3)$$

Если система (4) совместно с данными (3) не позволяет определить все частные производные второго порядка по  $t$ , то плоскость  $t=0$  является характеристической [5]. В общем случае начальные данные (4) зададим на поверхности  $Z(t, x_1, x_2, x_3) = const$  и перейдем к новым переменным по следующей схеме [3-5]

$$Z_k = Z_k(t, x_1, x_2, x_3), \quad k = \overline{0,3}, \quad Z_0 \equiv Z.$$

Выразим производные по старым переменным через производные по новым переменным:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} = \sum_{m,n=0}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial Z_n \partial Z_m} \frac{\partial Z_n}{\partial x_k} \frac{\partial Z_m}{\partial x_l} + \\ + \sum_{m=0}^3 \frac{\partial u_i}{\partial Z_m} \frac{\partial^2 Z_m}{\partial x_k \partial x_l}, \quad k, l = \overline{0,3}, \quad x_0 = t. \quad (4)$$

Подставим (4) в (3) и выпишем те члены, которые содержат производные второго порядка

$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial Z^2}, \quad i = \overline{1,3}$ , так как только они будут использоваться в дальнейшем изложении [5]. В результате получим

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial Z^2} (A_4 g^2 + \varepsilon p_i^2 - \rho p_0^2) + (A_2 + A_4) p_i \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u_k}{\partial Z^2} p_k + \\ + 2e p_k p_l \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} + \dots = 0, \quad k \neq l \neq i = \overline{1,3}. \quad (5)$$

$$2e \sum_{i \neq k \neq l=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial Z^2} p_k p_l - \varepsilon^S g^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} + \dots = 0.$$

Исключим из системы (5) частную производную от электрического потенциала  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2}$ . Будем иметь

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial Z^2} (A_4 g^2 + \varepsilon p_i^2 + \frac{4e^2}{\varepsilon^S} \frac{p_k p_l^2}{g^2} - \rho p_0^2) + \\ + (A_2 + A_4) p_i \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u_k}{\partial Z^2} p_k + \dots = 0, \quad k \neq l \neq i = \overline{1,3}. \quad (6)$$

$$\text{Здесь } p_k = \frac{\partial Z}{\partial x_k}, \quad p_0 = \frac{\partial Z}{\partial t}, \quad g^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \quad k = \overline{1,3}.$$

Условие нахождения уравнения характеристической поверхности системы (2) является невозможность определения

производных  $\frac{\partial^2 u_i}{\partial Z^2}, \quad i = \overline{1,3}$  из (6), что эквивалентно равенству нулю определителя, составленного из коэффициентов при этих производных [5]:

$$\det \|\omega_{ij}\| = 0, \quad (6)$$

где

$$\omega_{ii} = A_4 g^2 + (\varepsilon + A_2 + A_4) p_i^2 + \frac{4e^2}{\varepsilon^S} \frac{p_k p_l^2}{g^2}, \\ \omega_{ij} = (A_2 + A_4) p_i p_j, \quad i \neq j \neq k \neq l = \overline{1,3}.$$

Из (6) следует:

$$(A_4 g^2 - \rho p_0^2)^3 + G_1 (A_4 g^2 - \rho p_0^2)^2 + \\ + G_2 (A_4 g^2 - \rho p_0^2) + G_3 = 0, \quad (7)$$

$$G_1 = b_1 g^2 + b_2 \frac{m}{g^2}, \quad G_2 = b_3 m + \frac{b_4 n}{g^2},$$

$$G_3 = b_5 n + \frac{b_6 m^2}{g^2} - 2b_2^2 b_1 \frac{mn}{g^4},$$

$$m = \sum_{i \neq j=1}^3 p_i^2 p_j^2, \quad n = p_1^2 p_2^2 p_3^2,$$

$$b_1 = A_1 - A_4, \quad b_2 = \frac{4e^2}{\varepsilon^S}, \quad b_3 = b_1 b_2 + \varepsilon (A_1 + A_2),$$

$$b_4 = b_2 (b_2 - 3b_1),$$

$$b_5 = \varepsilon^2 (A_1 + 2A_2 + A_4) - 2b_2 \left( \varepsilon (A_1 + A_2) + \frac{b_2}{2} \varepsilon b_1 \right),$$

$$b_6 = b_2 \varepsilon (A_1 + A_2).$$

С учетом того, что скорость распространения поверхности разрыва определяется как  $V = -\frac{p_0}{g}$ , а направляющие косинусы нормали к характеристической поверхности

$\cos \alpha_k = \frac{p_k}{g}, \quad k = \overline{1,3}$  [5], из (7) получим следующее уравнение

$$(A_4 - \rho V^2)^3 + G_1^* (A_4 - \rho V^2)^2 + G_2^* (A_4 - \rho V^2) + G_3^* = 0 \quad (8)$$

где  $G_1^* = b_1 + b_2 m^*$ ,  $G_2^* = b_3 m^* + b_4 n^*$ ,

$$G_3^* = b_5 n^* + b_6 (m^*)^2 - 2b_2^2 b_1 m^* n^*,$$

$$m^* = \sum_{i \neq j=1}^3 \cos^2 \alpha_i \cos^2 \alpha_j,$$

$$n^* = \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_3.$$

Уравнение (8) учитывает пьезоэлектрическую связь между механическим и электрическим полями, которая имеет место при распространении упругих волн в определенных кубически анизотропных материалах (таблица 1), и позволяет найти скорость распространения поверхности разрыва в зависимости от углов  $\alpha_k, k = \overline{1,3}$ .

Приведем (8) к следующему виду

$$(y^*)^3 + p^* y^* + q^* = 0. \quad (9)$$

Таблица 1 – Упругие константы, плотности и пьезоэлектрические модули некоторых кубически анизотропных сред.

Материал	Упругие константы, $\times 10^{10}$ Па			Плотность, $\rho$ кг/м <sup>3</sup>	Пьезоэлектрический модуль $e$ , Кл/м <sup>2</sup>	Диэлектрическая проницаемость $\epsilon^S$ , $\times 10^{-11}$ Ф/м
	$A_1$	$A_2$	$A_4$			
Германат висмута	12.8	3.05	5.94	9230	0.99	34.2
Арсенид галлия	11.88	5.38	5.94	5307	-0.16	9.73

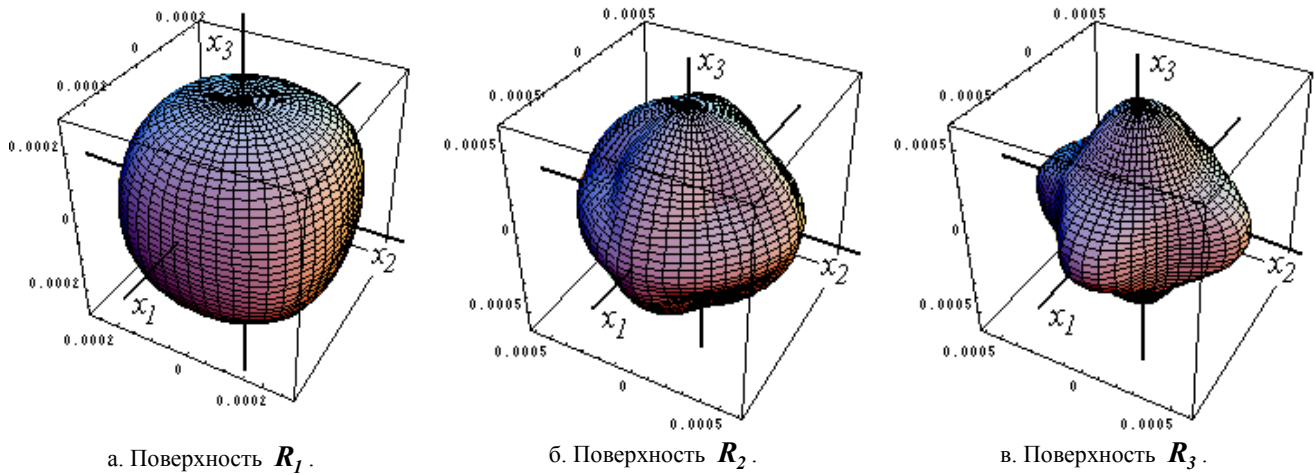


Рисунок 1 – Германат висмута. Поверхности обратных скоростей (с/м).

Здесь  $p^* = G_2^* - (G_1^*)^2/3$ ,  
 $q^* = 2(G_1^*)^3/27 - G_1^*G_2^*/3 + G_3^*$ ,  
 $y^* = G_1^*/3 + A_4 - \rho V^2$ .

Решение приведенного кубического уравнения (9) относительно скоростей распространения поверхностей разрыва наиболее легко найти в направлениях осей симметрии четвертого  $L^4$  ( $\cos \alpha_1 = 1, \cos \alpha_2 = \cos \alpha_3 = 0$ ), третьего  $L^3$  ( $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = \cos \alpha_3 = 1/\sqrt{3}$ ) и второго  $L^2$  ( $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = 1/\sqrt{2}, \cos \alpha_3 = 0$ ) порядка [6]. Соответственно этому будем иметь

$$V_1 = V_1^{ynp} = \sqrt{\frac{A_1}{\rho}}, V_{2,3} = V_{2,3}^{ynp} = \sqrt{\frac{A_4}{\rho}}, \quad (10)$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{1}{3\rho} \left( A_1 + 2A_2 + 4A_4 + \frac{4e^2}{3\epsilon^S} \right)},$$

$$V_{2,3} = \sqrt{\frac{1}{3\rho} \left( A_1 - A_2 + A_4 + \frac{8e^2}{9\epsilon^S} \right)}, \quad (11)$$

$$V_1 = V_1^{ynp} = \sqrt{\frac{A_1 + A_2 + 2A_4}{2\rho}}, V_2 = \sqrt{\frac{1}{\rho} \left( A_4 + \frac{e^2}{\epsilon^S} \right)}$$

$$V_3 = V_3^{ynp} = \sqrt{\frac{A_1 - A_2}{2\rho}}, \quad (12)$$

Как следует из (11) и (12), в направлении оси  $L^4$  упругие волны не взаимодействуют с электрическими полями, тогда как в направлении оси  $L^3$  продольная и поперечные волны являются пьезоактивными. При распространении упругих волн в направлении оси симметрии второго порядка пьезоэлектрический эффект оказывает влияние на распространение одной из квазипоперечных волн. В таблице 2 приведены значения скоростей пьезоактивных волн для германата висмута и арсенида галлия, а также величина относительного изменения скоростей упругих волн при учете пьезоэффекта.

Таблица 2 – Скорости распространения поверхностей разрыва (в скобках указаны соответствующие значения скоростей в отсутствии пьезоэлектрического эффекта).

Материал	Скорости вдоль $L^3$ , м/с				Скорости вдоль $L^2$ , м/с	
	$V_1$	$\Delta_1$ , %	$V_2$	$\Delta_2$ , %	$V_2$	$\Delta_3$ , %
Германат висмута	3263.01 (3241.79)	0.66	2129.33 (2107.61)	1.03	1753.06 (1662.15)	5.47
Арсенид галлия	5400.55 (5398.51)	0.04	2797.90 (2795.28)	0.09	3352.96 (3345.56)	0.22

Для расчета фазовых скоростей распространения квазипродольной и квазипоперечных волн в любых других направлениях решение уравнения (9) запишем с помощью тригонометрических формул [7]. Будем иметь

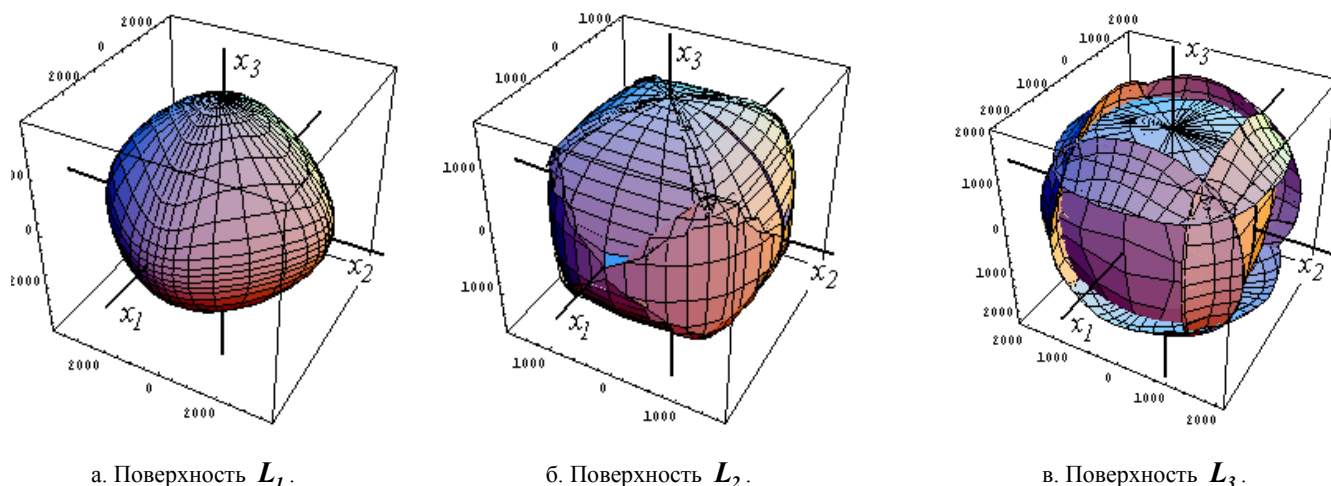


Рисунок 2 – Германат висмута. Волновые поверхности квазипродольной и квазипоперечных волн (при построении волновых фронтов принимаем  $t=1$ , значения указаны в м).

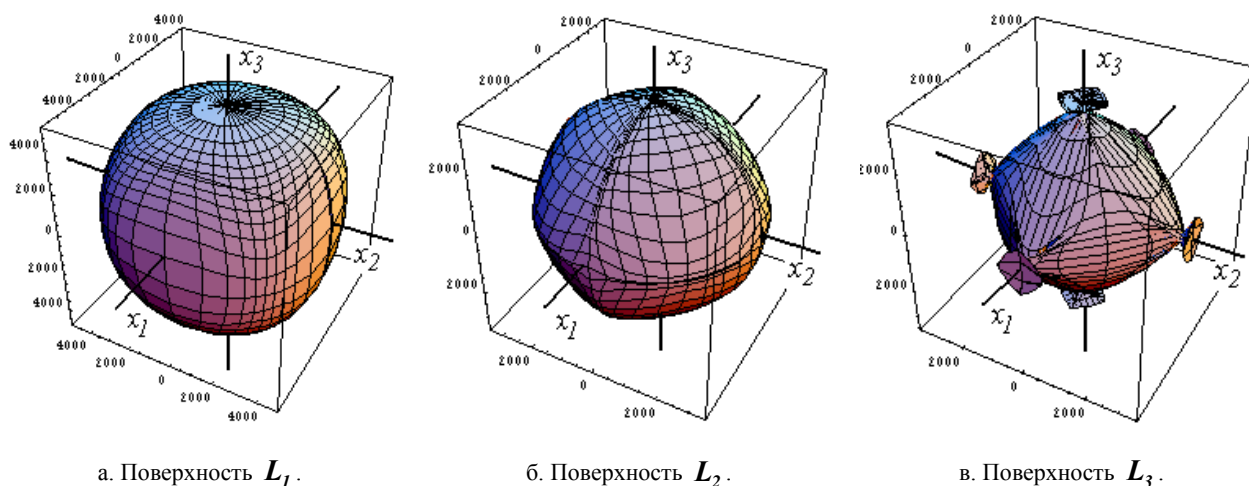


Рисунок 3 – Арсенид галлия. Волновые поверхности квазипродольной и квазипоперечных волн (м).

$$V_k = \sqrt{\frac{1}{3\rho} \left( 3A_4 + G_1^* - 6\sqrt{-\frac{p^*}{3}} \cos\left(\frac{1}{3}(\Lambda^* + 2\pi k)\right) \right)}, \quad (13)$$

$$k = \overline{1,3} \quad ,$$

где  $\Lambda^* = \arccos\left(-\frac{q^*}{2} \sqrt{-\left(\frac{3}{p^*}\right)^3}\right)$ . Зависимости скорости

стей  $V_k$  от угла наклона характеристической нормали наглядно отражают поверхности концов векторов рефракции (обратных скоростей)  $R_k = 1/V_k$ , которые легко построить в сферической системе координат  $(R_k, \theta, \varphi)$ ,  $k = \overline{1,3}$ , полагая в (10)  $\cos \alpha_1 = \sin \varphi \cos \theta$ ,  $\cos \alpha_2 = \sin \varphi \sin \theta$ ,  $\cos \alpha_3 = \cos \varphi$  (рисунок 1).

Из (13) и рисунка 1 следует, что скорость  $V_1$  превышает скорости  $V_2$  и  $V_3$ , поэтому будем считать, что поверхность  $R_1$

характеризует квазипродольную волну, поверхности  $R_2$  и  $R_3$  соответствуют квазипоперечным волнам [4]. Учитывая тот факт, что скорость переноса энергии в каждой точке нормальна к поверхности обратных скоростей, при распространении квазипоперечных волн можно предполагать возникновение лагун [1, 4].

Чтобы построить волновые поверхности квазипродольной и квазипоперечных волн, найдем образующие их бихарактеристики. Для этого уравнение (7) приведем к следующему виду:

$$y^3 + py + q = 0, \quad (14)$$

где  $p = G_2 - (G_1)^2/3$ ,  $q = 2(G_1)^3/27 - G_1G_2/3 + G_3$ ,  $y = G_1/3 + A_4g^2 - \rho p_0^2$ .

Решение (14) относительно  $p_0$  запишем также с помощью тригонометрических формул [7]:

$$p_0^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{3\rho} \left( 3A_4 g^2 + G_1 - 6\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{1}{3}(\Lambda + 2\pi k)\right) \right)},$$

$$k = \overline{1,3},$$

где  $\Lambda = \arccos\left(-\frac{q}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}\right)$ .

Уравнения бихарактеристик получим в результате интегрирования следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений [3-5]

$$\frac{dx_j^{(k)}}{dt} = \frac{\partial p_0^{(k)}}{\partial p_j}.$$

Как следует из (15), правая часть (16) является однородной функцией нулевого порядка относительно  $p_1, p_2, p_3$  и не зависит от времени  $t$  [5], поэтому

$$x_j^{(k)} = \frac{\partial p_0^{(k)}}{\partial p_j} t; \quad k, j = \overline{1,3}.$$

Найдем частные производные от  $p_0^{(k)}$  по  $p_1, p_2, p_3$ . Будем иметь

$$x_j^{(k)} = \frac{t}{\sqrt{3\rho V_k}} \left( 6A_4 \cos \alpha_j + G_1^{(j)} - 2\sqrt{3} \left( \frac{p^{(j)}}{2\sqrt{-p}} \cos\left(\frac{1}{3}(\Lambda + 2\pi k)\right) + \sqrt{-p} \sin\left(\frac{1}{3}(\Lambda + 2\pi k)\right) \frac{A^{(j)}}{3} \right) \right); \quad k = \overline{1,3},$$

$$A^{(j)} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{27q^2}{4p^3}}} \left( q^{(j)} \sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3} + \frac{9\sqrt{3}qp^{(j)}}{2\sqrt{-p^5}} \right),$$

$$p^{(j)} = G_2^{(j)} - \frac{2}{3} G_1^* G_1^{(j)},$$

$$q^{(j)} = \frac{2}{9} (G_1^*)^2 G_1^{(j)} - \frac{1}{3} (G_1^{(j)} G_2^* + G_2^{(j)} G_1^*) + G_3^{(j)},$$

$$G_1^{(j)} = 2 \cos \alpha_j (b_1 + b_2 ((1 - \cos^2 \alpha_j) - m^*)),$$

$$G_2^{(j)} = 2 \cos \alpha_j (b_3 (1 - \cos^2 \alpha_j) + b_4 (m^* - \cos^2 \alpha_j (1 - \cos^2 \alpha_j)) - n^*),$$

$$G_3^{(j)} = 2 \cos \alpha_j (b_5 (m^* - \cos^2 \alpha_j (1 - \cos^2 \alpha_j)) + b_6 (2m^* (1 - \cos^2 \alpha_j) - (m^*)^2) - 2b_1 b_2 (n^* (1 - \cos^2 \alpha_j) + m^* (m^* - \cos^2 \alpha_j (1 - \cos^2 \alpha_j)) - 2m^* n^*).$$

В формулах (18)-(20) учтено, что  $p_j = g \cos \alpha_j, j = \overline{1,3}$ .

Бихарактеристики (18) позволяют определить совокупность точек  $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$ , до которых к данному моменту

времени  $t$  дошла энергия волнового возмущения, и построить поверхности фронтов  $L_k, k = \overline{1,3}$  квазипродольной и квазипоперечных волн, распространяющихся из точечного источника по всем направлениям [4, 6] (рисунок 2).

Как следует из рисунка 2, при распространении квазипоперечных волн  $L_2$  и  $L_3$  возникают лакуны в виде перекрывающихся полос, причем на поверхности  $L_3$  существуют такие участки, где одновременно перекрываются три лакуны.

Отметим, что германат висмута относится к кубически анизотропным материалам, для упругих постоянных которых выполняется неравенство  $A_1 - A_2 - 2A_4 < 0$ , тогда как для упругих постоянных арсенида галлия  $A_1 - A_2 - 2A_4 > 0$  (таблица 1). Этим можно объяснить тот

факт, что соответствующие волновые фронты  $L_k, k = \overline{1,3}$  поверхностей разрыва в арсениде галлия и германате висмута существенно отличаются друг от друга (рисунки 2, 3).

Шесть лакун, образующихся при распространении квазипоперечной волны  $L_3$  в арсениде галлия, имеют вид конусов, поэтому их можно охарактеризовать телесным углом  $Y$ , содержащим основание лакуны. Для этого рассмотрим сечение волновой поверхности  $L_3$  плоскостью  $x_3 = 0$ , (аналогичный результат получим сечением поверхности  $L_3$  плоскостями  $x_1 = 0$  или  $x_2 = 0$ , рисунок 4).

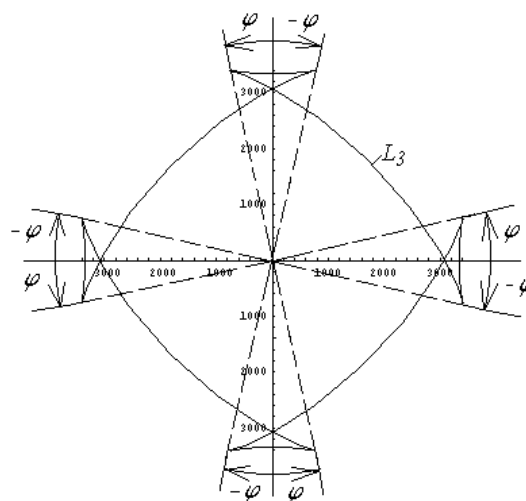


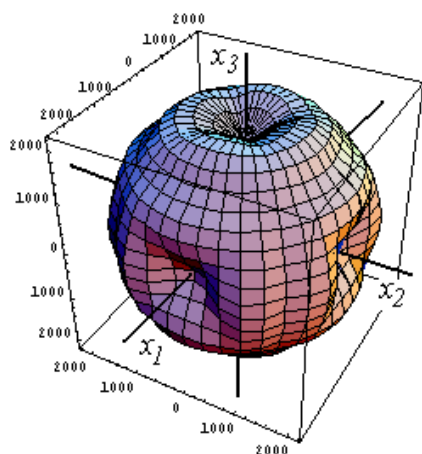
Рисунок 4 – Арсенид галлия. Сечение волновой поверхности  $L_3$  плоскостью  $x_3 = 0$ .

Расчет, проведенный для арсенида галлия, показывает, что в плоскостях  $x_k = 0, k = \overline{1,3}$  угол  $\varphi$  составляет  $12^{\circ}30'$ . Выражение для определения телесного угла, содержащего лакуну, запишем в следующем виде

$$Y = 2\pi(1 - \cos \varphi).$$

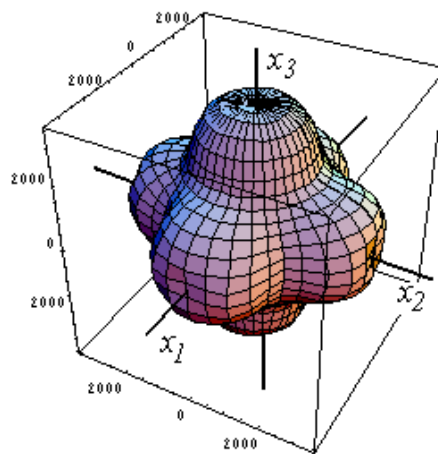
Из (21) для арсенида галлия будем иметь  $Y = 0.149$  стерадиан.

Углы лакун  $\varphi$ , возникающих при распространении квазипоперечных волн в германате висмута, можно легко рассчитать в сечениях соответствующих волновых поверхностей плоскостями  $x_k = 0, k = \overline{1,3}$ . Однако, как следует из рисунка 2б, этого будет недостаточно для описания лакун, поэтому необходимо обратиться к другим сечениям волновых



а. Германат висмута.

Поверхность групповой скорости  $P_2$ .



б. Арсенид галлия.

Поверхность групповой скорости  $P_3$ .

Рисунок 5 – Поверхности групповых скоростей (м/с).

тыми относительно  $x_k = 0$  на  $45^\circ$  [1].

Отметим, что бихарактеристики (16) являются также составляющими групповых скоростей распространения поверхностей разрыва [3-5]

$$P_k = \sqrt{\sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial p_0^{(k)}}{\partial p_j} \right)^2} \quad (22)$$

Также как и в случае с фазовыми скоростями наиболее легко определить скорости  $P_k$  в направлениях осей симметрии кубически анизотропного тела. Расчет, проведенный для германата висмута и арсенида галлия, показывает, что в направлениях осей  $L^1, L^2$  и  $L^3$  фазовые скорости совпадают с групповыми, то есть  $V_k = P_k, k = \overline{1,3}$ . Для других направлений характеристической нормали распределение скоростей  $P_k$  распространения квазипродольной и квазипоперечных волн наглядно характеризуют поверхности групповых скоростей (рисунок 5).

Следует отметить, что в существующей литературе [4, 6] поверхностями групповых скоростей (поверхностями лучевых скоростей или лучевыми поверхностями) принято считать волновые поверхности  $L_k$  (рисунки 2, 3), так как  $L_k$  является геометрическим местом концов векторов групповых скоростей для всевозможных направлений в анизотропной среде. Однако определение угла наклона вектора  $P_k$  в системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  волновой поверхности  $L_k$  крайне сложно и предусматривает предварительный расчет углов наклона вектора  $P_k$  (с помощью соотношений (16)) по за-

данным углам наклона  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  нормали к характеристической поверхности. Поэтому целесообразно рассматривать поверхности  $P_k$  в качестве поверхностей групповых скоростей, так как они представляют собой геометрическое место концов векторов  $P_k$ , но их положение определяется углами  $\alpha_k, k = \overline{1,3}$ .

В заключение отметим, что среди поверхностей групповых скоростей  $P_k$ , поверхностей концов векторов рефракции  $R_k$  и поверхностей волновых фронтов  $L_k, k = \overline{1,3}$  непосредственный физический смысл имеют поверхности  $L_k$ , которые лишь масштабом отличаются от реальных поверхностей волновых фронтов, распространяющихся из точечного источника по всем направлениям [4, 6].

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М., 1982.
2. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М., 1988.
3. Петрашень Г. И., Каштан Б. М.// Распр. объемных волн и методы расчета волн. полей в анизотр. упр. средах. Л., 1984, С. 15—107.
4. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л., 1980.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. IV, ч. 2. М., 1981.
6. Федоров Ф. И. Упругие волны в кристаллах. М., 1965.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. I. М., 1978.