Теорема 5 [2]

> Если на каноническое вложение $\check{f}$ подмногообразия (👎$_0$, f) подействовать преобразованием $Ad\,h$ присоединенной группы $Ad\,H$, то оно преобразуется в каноническое вложение подмногообразия (👎$_0$, $T_h \circ f$) по совокупности подпространств (18).

Применив к равенству (21) каноническую проекцию π, получим:

$$\pi \circ J(h) \circ exp\,\check{f}(x_0) = \pi \circ exp\,Ad\,h\left(\check{f}(x_0)\right) = \pi \circ J(h)\left(\hat{f}(x_0)\right) \qquad (22)$$

Учитывая, что $\pi \circ J(h) = T_h \circ \pi$, $\pi \circ \hat{f} = f$. Отсюда получим:

$$T_h \circ f(x_0) = \pi \circ J(h)\left(\hat{f}(x_0)\right) \qquad (23)$$

и

$$T_h \circ f(x_0) = \pi \circ exp \circ Ad\,h\left(\check{f}(x_0)\right). \qquad (24)$$

Равенства (37) и (38) вместе с теоремами 3 и 5 доказывают, что имеет место следующая теорема:

Теорема 6 [2]

> Эквивалентность относительно внутренних автоморфизмов группы H на множестве всех канонических лифтов n-мерных подмногообразий однородного пространства G/H индуцирует H-эквивалентность соответствующих подмногообразий однородного пространства G/H. Эквивалентность относительно присоединенной группы $Ad\,H$ на множестве всех канонических вложений n-мерных подмногообразий однородного пространства G/H индуцирует H-эквивалентность соответствующих подмногообразий однородного пространства G/H.

Поскольку в однородном пространстве G/H проблема G-эквивалентности подмногообразий сводится к проблеме H-эквивалентности, то теоремы 5,6 сводят проблему G-эквивалентности подмногообразий в однородном пространстве $M = G/H$ к проблеме H-эквивалентности подмногообразий в алгебре Ли ☺ структурной группы Ли G.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Юдов А.А. Описание и обоснование метода Картана построения канонического репера подмногообразия. // Известия АН БССР, деп. ВИНИТИ, 1982 г., №359582
2. Юдов А.А. Канонический лифт подмногообразия однородного пространства G в структурную группу Ли и ее алгебру Ли. Проблема эквивалентности подмногообразий пространства $^2R_4$. // Известия АН БССР, деп. ВИНИТИ, 1989 г., №1498-В89
3. Юдов А.А. Основное уравнение подмногообразия однородного пространства. Тезисы докладов. Математическая конференция “Еругинские чтения-III”, 1996 г.
4. Кожух И.Г., Юдов А.А. О геометрических приложениях одного матричного дифференциального уравнения. Тезисы докладов. Математическая конференция “Еругинские чтения-IV”, 1997 г.
5. Кожух И.Г., Юдов А.А. Некоторые геометрические приложения одного дифференциального уравнения. Тезисы докладов. Математическая конференция “Еругинские чтения-V”, 1998 г.
6. Кожух И.Г., Юдов А.А. Об одном классе подмногообразия однородного пространства. Тезисы докладов. Математическая конференция “Еругинские чтения-VI”, 1999 г.
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1967 г.
8. Андреев А.С, Юдов А.А. Канонический лифт подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и в ее алгебру Ли. // Вестник Брестского государственного технического университета, №5 – 2000. С. 28–31.

УДК 517.949

Брызгалова Н.А., Самодуров А.А., Санюкевич А.В.

ОДИН ИЗ СПОСОБОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ p-го ПОРЯДКА

Рассмотрим разностное уравнение p-го порядка

$$x(n+p) = f\left(n, x(n+1), x(n+2), ..., x(n+p-1)\right). \qquad (1)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$x(n) = \sum_{j=1}^{p} c_j(n) \cdot x_j(n), \qquad (2)$$

Брызгалова Наталья Александровна. *Аспирант каф. общей математики и информатики Белорусского государственного университета.*

Самодуров Александр Александрович. *Доцент каф. общей математики и информатики Белорусского государственного университета.*

Санюкевич Александр Викторович. *Доцент каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.*

Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

где $c_1(n)$, …, $c_p(n)$ — линейно-независимые решения уравнения (1).

Предположим, что функции $x_i(n)$ определяются системой

$$\Delta x_i(n) = f_i\left(n, x_1(n),\dots,x_p(n),c_1(n),\dots,c_p(n)\right),$$
$$(\,i=\overline{1,p}\,) \qquad (3)$$

где функции f_i будут определены ниже. Тогда

$$x(n+1)=\sum_{j=1}^{p}c_j(n+1)\cdot x_j(n+1)=$$
$$=\sum_{j=1}^{p}c_j(n+1)\cdot x_j(n)+\sum_{j=1}^{p}c_j(n+1)\cdot \Delta x_j(n).$$

Приравнивая вторую сумму в правой части к нулю, имеем первое условие для f_j:

$$\sum_{j=1}^{p}c_j(n+1)\cdot f_j\left(n,x_1(n),\dots,x_p(n),c_1(n),\dots,c_p(n)\right)=0\,. \qquad (4)$$

С учетом (3) и (4) имеем

$$x(n+2)=\sum_{j=1}^{p}c_j(n+2)\cdot x_j(n+2)=$$
$$=\sum_{j=1}^{p}c_j(n+2)\cdot x_j(n)+\sum_{j=1}^{p}c_j(n+2)\cdot \Delta x_j(n).$$

Аналогично предыдущему, приравнивая вторую сумму в правой части к нулю, имеем второе условие для f_j:

$$\sum_{j=1}^{p}c_j(n+2)\cdot f_j\left(n,x_1(n),\dots,x_p(n),c_1(n),\dots,c_p(n)\right)=0\,. \qquad (5)$$

Таким же образом, находя $x(n+3)$, …, $x(n+p-1)$, будем иметь еще (p-3) условия:

$$\sum_{j=1}^{p}c_j(n+3)\cdot f_j\left(n,x_1(n),\dots,x_p(n),c_1(n),\dots,c_p(n)\right)=0$$
$$\dots \qquad (6)$$
$$\sum_{j=1}^{p}c_j(n+p-1)\cdot f_j\left(n,x_1(n),\dots,x_p(n),c_1(n),\dots,c_p(n)\right)=0$$

Учитывая все полученные условия, а также то, что $c_j(n)$ – решения уравнения (1), имеем

$$x(n+p)=\sum_{j=1}^{p}x_j(n)\cdot f\left(n,c_j(n),c_j(n+1),\dots,c_j(n+p-1)\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{p}c_j(n+p)\cdot f_j\left(n,x_1(n),\dots,x_p(n),c_1(n),\dots,c_p(n)\right).$$

Следовательно, (2) дает решение уравнения (1), если

$$\sum_{j=1}^{p}c_j(n+p)\cdot f_j\left(n,x_1(n),\dots,x_p(n),c_1(n),\dots,c_p(n)\right)=F(n) \qquad (7)$$

где

$$F(n)=f(n,\sum_{j=1}^{p}c_j(n)\cdot x_j(n),$$
$$\sum_{j=1}^{p}c_j(n+1)\cdot x_j(n),\dots,\sum_{j=1}^{p}c_j(n+p-1)\cdot x_j(n)-$$
$$-\sum_{j=1}^{p}x_j(n)\cdot f\left(n,c_j(n),c_j(n+1),\dots,c_j(n+p-1)\right).$$

Если известны функции $c_j(n)$, то мы можем найти функции f_j из системы p линейных уравнений (4), (5), (6) и (7). Решая эту систему, получим

$$f_j\left(n,x_1(n),\dots,x_p(n),c_1(n),\dots,c_p(n)\right)=(-1)^{j+1}\frac{W_j}{W}F(n),$$

где
$$W=\begin{vmatrix} c_1(n+1) & \dots & c_p(n+1)\\ \dots & \dots & \dots\\ c_1(n+p) & \dots & c_p(n+p)\end{vmatrix},$$

а W_j получается из W вычеркиванием j-го столбца и последней строки.

Пример 1. Рассмотрим следующее разностное уравнение второго порядка

$$x(n+2)+\frac{2}{n}x^2(n+1)+f(n)x(n)=0\,. \qquad (8)$$

Если $c_1(n)$ и $c_2(n)$ – линейно-независимые решения уравнения (8), то его решение имеет вид $x(n)=c_1(n)x_1(n)+c_2(n)x_2(n)$, где $\Delta x_i(n)$ ($i=1,2$) находятся из системы уравнений

$$\Delta x_1(n)=\frac{2c_2(n+1)P(n)}{nW},\ \Delta x_2(n)=\frac{2c_1(n+1)P(n)}{nW},$$

где

$$P(n)=\left(c_1(n+1)x_1(n)+c_2(n+1)x_2(n)\right)^2-$$
$$-x_1(n)\left(c_1(n+1)\right)^2-x_2(n)\left(c_2(n+1)\right)^2.$$
$$W=c_1(n+1)c_2(n+2)-c_1(n+2)c_2(n+1)\,.$$

Пример 2. Рассмотрим разностное уравнение третьего порядка

$$x(n+3)+x(n)x(n+2)-x^2(n+1)+1=0\,. \qquad (9)$$

Если $c_1(n)$, $c_2(n)$ и $c_3(n)$ – линейно-независимые решения уравнения (9), то решение имеет вид $x(n)=c_1(n)x_1(n)+c_2(n)x_2(n)+c_3(n)x_3(n)$, где $\Delta x_i(n)$ ($i=\overline{1,3}$) находятся из системы уравнений

$$\Delta x_1(n)=\frac{W_1}{W}G(n),\ \Delta x_2(n)=\frac{W_2}{W}G(n),$$
$$\Delta x_3(n)=\frac{W_3}{W}G(n),$$

где

$$G(n)=-\left(c_1(n)x_1(n)+c_2(n)x_2(n)+c_3(n)x_3(n)\right)\times$$
$$\times\left(c_1(n+2)x_1(n)+c_2(n+2)x_2(n)+c_3(n+2)x_3(n)\right)-$$
$$-\left(c_1(n+1)x_1(n)+c_2(n+1)x_2(n)+c_3(n+1)x_3(n)\right)^2+$$
$$+x_1(n)\cdot\left(c_1(n)c_1(n+2)-\left(c_1(n+1)\right)^2+1\right)+$$
$$+x_2(n)\cdot\left(c_2(n)c_2(n+2)-\left(c_2(n+1)\right)^2+1\right)+$$
$$+x_3(n)\cdot\left(c_3(n)c_3(n+2)-\left(c_3(n+1)\right)^2+1\right)$$

Пример 3. Рассмотрим разностное уравнение третьего порядка

$$x(n+3)+ax(n)x(n+2)=0. \qquad (10)$$

Если $c_1(n)$, $c_2(n)$ и $c_3(n)$ – линейно-независимые решения уравнения (10), то решение имеет вид $x(n)=c_1(n)x_1(n)+c_2(n)x_2(n)+c_3(n)x_3(n)$, где $\Delta x_i(n)$ ($i=\overline{1,3}$) находятся из системы уравнений

$$\Delta x_1(n)=\frac{W_1}{W}H(n), \qquad \Delta x_2(n)=\frac{W_2}{W}H(n),$$

$$\Delta x_3(n)=\frac{W_3}{W}H(n),$$

где

$$H(n)=-a\big(c_1(n)x_1(n)+c_2(n)x_2(n)+c_3(n)x_3(n)\big)\times$$
$$\times\big(c_1(n+2)x_1(n)+c_2(n+2)x_2(n)+c_3(n+2)x_3(n)\big)+$$
$$+ax_1(n)c_1(n)c_1(n+2)+ax_2(n)c_2(n)c_2(n+2)+$$
$$+ax_3(n)c_3(n)c_3(n+2).$$

УДК 539.3

Веремейчик А.И.

МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ НЕСВЯЗАННЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Система дифференциальных уравнений (ДУ) несвязанных нестационарных краевых и начально-краевых задач классической термоупругости для изотропных материалов при отсутствии источников тепла имеет следующий вид [1]:

$$\mu u_{i,kk}+(\lambda+\mu)u_{k,ki}=\rho\ddot{u}_i+(3\lambda+2\mu)\alpha_T T_{,i}-X_i, \qquad (1)$$

$$T_{,kk}-\frac{1}{a}\dot{T}=0. \qquad (2)$$

Для полной постановки задачи необходимо сформулировать краевые условия. Граничные и начальные условия задаются отдельно для уравнений движения (1) и уравнения теплопроводности (2). Для ДУ (1) на границе задаются перемещения или нагрузки, для уравнения теплопроводности - распределение температуры или теплового потока. Возможно также задание смешанных граничных условий. Начальные условия характеризуют соответственно движение тела или распределение температуры в некоторый начальный момент времени. В уравнениях (1) и (2): λ и μ - коэффициенты Ламе, α_T - коэффициент линейного теплового расширения, a - коэффициент температуропроводности [2], $X_i(x,t)$ - массовые нагрузки, c_ε - теплоемкость при постоянной деформации.

В постановке (1) и (2) рассматривается динамическая задача термоупругости. Однако обычно в реальных условиях температурное поле медленно изменяется со временем, поэтому можно принять упрощение, основанное на пренебрежении инерционными членами в уравнениях движения (1). В результате получаем задачу несвязанной термоупругости в квазистатической постановке; при этом ДУ (1) принимает вид:

$$\mu u_{i,kk}+(\lambda+\mu)u_{k,ki}=(3\lambda+2\mu)\alpha_T T_{,i}-X_i. \qquad (3)$$

Решение краевых и начально-краевых задач термоупругости для любых конструктивных элементов и граничных условий возможно только численным путем. Наиболее оптимальным методом является метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) [3] теории потенциала. Метод ГИУ характеризуется как один из наиболее перспективных методов анализа показателей напряженно-деформированного состояния применительно к широкому классу практических задач строительной механики, теории упругости и термоупругости. Сущность методов ГИУ – в преобразовании дифференциальных уравнений в эквивалентную систему интегральных уравнений. Это позволяет получить систему уравнений, включающую только значения переменных на границе области. С помощью соответствующих формул представления определяются значения неизвестных величин во внутренних точках области через их граничные значения и значения их первых производных. Кроме того, такой подход уменьшает размерность исходной задачи на единицу.

Частное решение уравнения (3) представляем в виде, предложенном Гудьером, вводя потенциал термоупругого перемещения Φ [5]:

$$u_i=\Phi_{,i}. \qquad (4)$$

Подставляя формулы (4) в (3) в случае отсутствия массовых сил, получим:

$$\Phi_{,ii}=mT, \qquad (5)$$

где $m=\dfrac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\alpha_T$.

Рассмотрим задачу определения температуры и перемещений в пространстве E^2, вызванных действием единичного источника тепла, помещенного в начале координат. В силу центральной симметрии поля перемещений и деформаций, необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\Delta\Phi'=mT'_*,$$
$$\Delta T'_*-\frac{1}{a}T'_*=-\frac{\delta(R)}{a}\delta(t), \qquad (6)$$
$$\Delta=\frac{d^2}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{d}{dR}.$$

Применяя к уравнениям (6) преобразование Лапласа [6], получаем:

$$\Delta\overline{\Phi}'=m\overline{T}''_*,$$
$$\Delta\overline{T}'_*-\frac{p}{a}\overline{T}'_*=-\frac{\delta(R)}{a}, \qquad (7)$$

Веремейчик Андрей Иванович. *Аспирант кафедры сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.