СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия. Т. II. М.: Просвещение, 1975.
2. Бакельман И.Я. Введение в дифференциальную геометрию "в целом". М.: Наука, 1973.
3. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.: Просвещение, 1968.
4. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.
5. Щербаков Р.Н., Пичурин Л.Ф. Дифференциалы помогают геометрии. М.: Просвещение, 1982.
6. Энциклопедия элементарной математика. Кн. V. М.: Наука, 1966.

УДК 514.112.3

Пархимович И.В.

НАХОЖДЕНИЕ ОТНОШЕНИЙ ВЗАИМНОГО ДЕЛЕНИЯ МЕДИАН, БИССЕКТРИС, ВЫСОТ ТРЕУГОЛЬНИКА

Известна теорема Менелая (I век н.э.): пусть точки A_1 и B_1 лежат соответственно на сторонах BC и CA, а точка C_1 – на продолжении стороны BA треугольника ABC. Для того чтобы точки A_1, B_1, C_1 лежали на одной прямой необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1\,.$$

Используя теорему Менелая, доказывается __Теорема 1__. В треугольнике известны отношения длин его сторон. Тогда точка пересечения биссектрис внутренних углов треугольника делит каждую биссектрису, считая от вершины, в отношении, равном отношению суммы длин сторон, образующих угол, к длине противоположной стороны.

__Доказательство.__

В ΔABC (рисунок 1) AD, BE, CF – биссектрисы и $AB:BC:AC = m:n:p$. Тогда длины сторон треугольников (подобных), удовлетворяющих этим отношениям, можно представить в виде:

$$AB=am,\quad BC=an,\quad AC=ap\,, \tag{1}$$

где a – соответствующий коэффициент отношений (с возможно определенной размерностью).

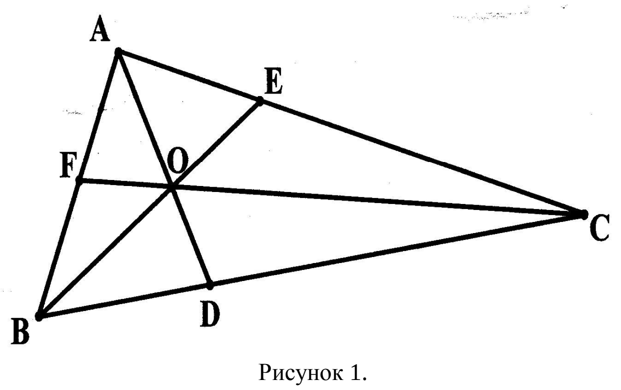

Рисунок 1.

Применяя теорему Менелая к ΔADC и к точкам E, O, B, находящихся на одной прямой и на сторонах и на продолжении стороны ΔADC, - будем иметь:

$$\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AO}{OD}\cdot\frac{DB}{BC}=1\,. \tag{2}$$

Так как биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам угла, то в силу соотношений (1) получаем:

$$\frac{CE}{EA}=\frac{BC}{AB}=\frac{an}{am}=\frac{n}{m} \tag{3}$$

$$\frac{DB}{BC}=\frac{DB}{DB+DC}=\frac{1}{\dfrac{DB+DC}{DB}}=\frac{1}{1+\dfrac{DC}{DB}}= \\ =\frac{1}{1+\dfrac{AC}{AB}}=\frac{1}{1+\dfrac{ap}{am}}=\frac{1}{1+\dfrac{p}{m}} \tag{4}$$

Тогда соотношение (2) с учетом равенств (3) и (4) примет вид

$$\frac{n}{m}\cdot\frac{AO}{OD}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{p}{m}}=1$$

откуда

$$\frac{AO}{OD}=\frac{m}{n}\left(1+\frac{p}{m}\right)=\frac{m}{n}\cdot\frac{m+p}{m}=\frac{m+p}{n}=\frac{a(m+p)}{na}= \\ =\frac{ma+pa}{na}=\frac{AB+AC}{BC}$$

ч.т.д.

По такой же схеме доказываются следующие теоремы.

__Теорема 2.__ В треугольнике известны отношения длин его сторон. Биссектриса внутреннего угла треугольника делится, считая от вершины, медианой в отношении, равном отношению суммы длин сторон, заключающих биссектрису к длине стороны, к которой не проведена ни биссектриса, ни медиана.

__Теорема 3.__ Медиана треугольника, отношения сторон которых известны, делится (считая от вершины) биссектрисой внутреннего угла треугольника в отношении, равном отношению удвоенной длины стороны, к которой не проведена ни медиана, ни биссектриса, к длине стороны, к которой проведена медиана.

Пархимович Игорь Владимирович. *К. ф.-м. н., профессор каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Теорема 4. Высота треугольника с известными углами делится (считая от вершины) медианой в отношении, равном отношению суммы котангенсов углов треугольника, прилежащих к стороне, к которой проведена высота, к модулю котангенса угла треугольника, из которого проведена медиана.

Теорема 5. Медиана треугольника с известными углами делится (считая от вершины) его высотой в отношении, равном модулю отношения удвоенного котангенса угла треугольника, из которого выходит медиана, к котангенсу угла, из которого не выходит ни медиана, ни высота.

Теорема 6. Высота треугольника с известными углами делится (считая от вершины) биссектрисой внутреннего угла треугольника в отношении, равном произведению двух отношений: первое равно отношению синуса угла треугольника, из которого не выходит ни высота, ни биссектриса, к синусу угла треугольника, из которого выходит высота; второе равно модулю отношения суммы котангенсов углов треугольника, прилежащих к стороне, к которой проведена высота, к котангенсу угла треугольника, из которого выходит биссектриса.

Теорема 7. В треугольнике с известными углами биссектриса внутреннего угла треугольника делится (считая от вершины) высотой треугольника в отношении, равном произведению двух отношений; первое равно модулю отношения котангенса угла треугольника, из которого выходит биссектриса, к котангенсу угла треугольника, из которого не выходит ни биссектриса, ни высота; второе равно отношению суммы синусов углов треугольника, прилежащих к стороне, к которой проведена биссектриса, к синуса угла треугольника, из которого не выходит ни биссектриса, ни высота треугольника.

Теорема 8. В треугольнике с известными углами высота (первая) делится (считая от вершины) другой высотой в отношении, равном модулю произведения двух отношений; первое равно отношению котангенса угла треугольника, из которого выходит первая высота к котангенсу угла треугольника, из которого не выходит ни первая, ни вторая высота; второе равно отношению суммы котангенсов углов треугольника, прилежащих к стороне, к которой проведена первая высота, к котангенсу угла треугольника, из которого выходит вторая высота.

УДК 681.324

Головко В.А., Савицкий Ю.В., Маньяков Н.В., Рубанов В.С.

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ХАОТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

1. ВВЕДЕНИЕ

Хаотическое поведение характеризуется высокой чувствительностью к начальным условиям и наблюдается во многих системах (котировки акций, ЭЭГ мозговой активности, центральная нервная система и др.). Обработка хаотических временных рядов может быть разделена на три этапа, показанных на рисунке 1. Первый этап – анализ временного ряда. В результате его идентифицируется хаотичность поведения и оцениваются параметры вложения. С использованием данных этого этапа возможно представить псевдофазовый портрет системы или построить нейронную сеть для оптимального предсказания ряда. Общим параметром хаотичности является вычисление наибольшего показателя Ляпунова, который должен быть положительным [1]. Такой показатель Ляпунова является статистической мерой расхождения двух траекторий, исходящих из близких точек. Пусть d_0 является начальным расстоянием между двумя точками, а d_n - расстояние между этими же точками через n шагов. Тогда наибольший показатель Ляпунова определяется соотношением

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{d_n}{d_0} . \qquad (1)$$

Имея дело с одномерными временными рядами необходимо прежде всего произвести псевдофазовую реконструкцию поведения системы. Она основана на теореме вложения Такенса [2], которая гарантирует всё знание о поведении системы во временном ряде только одного измерения. В результате получается полный многомерный фазовый портрет, построенный только из одного временного ряда.

Для применения теоремы вложения необходимо определить подходящие размерность пространства вложения и временную задержку. Оценивание этих параметров приводит к максимальной предсказуемости временных рядов и используется для выбора оптимального размера окна (количества входных элементов) в нейронной сети для предсказания ряда. В разделах 2 и 3 описывается подход к выбору временной задержки и размерности пространства вложения. Разделы 4 и

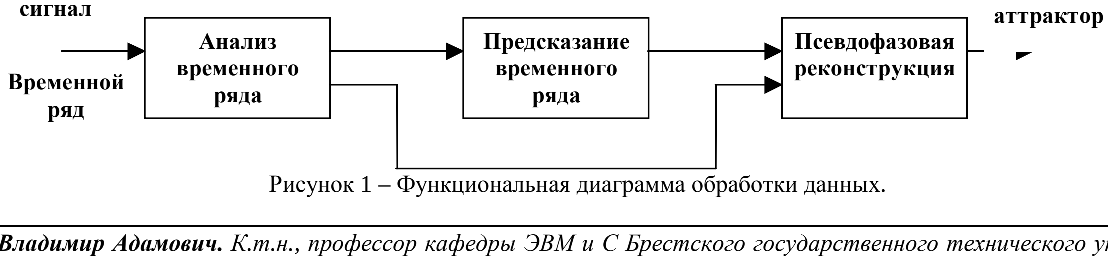

Рисунок 1 – Функциональная диаграмма обработки данных.

Головко Владимир Адамович. *К.т.н., профессор кафедры ЭВМ и С Брестского государственного технического университета.*
Савицкий Юрий Викторович. *К.т.н., доцент кафедры ЭВМ и С Брестского государственного технического университета.*
Маньяков Николай Владимирович. *Ассистент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Рубанов Владимир Степанович. *К.ф.-м.н., заведующий кафедрой высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.