

**А. А. Волчек¹, М. Г. Герменчук², И. И. Кирвель³, С. И. Парфомук¹,
Л. Н. Журавович²**

¹Брестский государственный технический университет, г. Брест, Республика Беларусь

²Государственное учреждение «Республиканский центр по гидрометеорологии, контролю радиоактивного загрязнения и мониторингу окружающей среды» г. Минск, Республика Беларусь

³Академия Поморская, г. Слупск, Республика Польша

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИИ КОЛЕБАНИЙ УРОВНЯ ОЗЕРА НАРОЧЬ

Предложена метод моделирования траектории колебаний уровня озера Нарочь. Исходные данные уровня озера Нарочь разложены на 3 составляющие: полиномиальную регрессию, периодическую составляющую и остаточную последовательность независимых случайных величин. Моделирование траектории колебаний основано на детерминированной части, состоящей из регрессии 8-го порядка и периодической составляющей, а также случайной части, состоящей из независимых одинаково распределенных величин.

► **Ключевые слова:** уровень воды, параметрическая модель, полиномиальная регрессия 8-го порядка, моделирование траектории, остаточная последовательность.

Введение

Нарочь – самое большое озеро в Беларуси, расположено в бассейне р. Нарочь (вытекает из озера), в 4 км западнее г.п. Мядель, между деревнями Чаровки, Пасынки, Микольцы, Гатовичи, Занарочь на высоте 165 м над уровнем моря. Входит в Нарочанскую группу озер и в состав Нарочанского Национального парка.

Котловина озера подпрудного типа делится полуостровом Наносы на два плёса: Малый плёс, расположенный на северо-западе озера и Большой плёс – на юго-востоке. У северо-восточного берега имеется остров площадью 6,2 га, объявленный памятником природы. Формирование котловины озера связано с образованием Свенцянской конечно-моренной возвышенности и таянием последнего (валдайского) ледника. Склоны котловины на севере и северо-востоке высотой 45–50 м, образованы отрогами Свянтянских гряд. На юге к озеру примыкает более низкая Южно-Нарочанская гряда. Берега в основном низкие, песчаные, местами крутые и абразивные, высотой 2–11 м, на юго-востоке заболоченные, торфяные [2–5].

Хорошо выражены две террасы – на высоте 1,5 и 4,5 м над уровнем зеркала. В восточной части озера преобладают невысокие берега, а на северо-западе и западе большие участки представлены аккумулятивными берегами с чистыми песчаными пляжами. Сложно построено ложе озера, где чередуются холмистые и плоские участки, далеко вытянутые подводные гряды. Почти везде, кроме участков северного берега, широкую прибрежную полосу занимает литоральная зона с плосконаклонной поверхностью. На северо-западе ее ширина достигает 200 м, а у юго-восточного берега – до 300 м. Изобата 2 м ограничивает 14% площади водного зеркала. Пологая мелководная зона с глубинами до 5 м занимает около 30% площади. Такая обширная литораль, заросшая густым покровом водных растений, играет важную роль в защите озера от загрязняющих веществ, поступающих с водосбора. Лишь на коротком отрезке вдоль северных берегов литораль сложена крупными валунами. Сублитораль в озере пологая, постепенно переходит в ложе. Дно относительно ровное, средний наклон 1°, на востоке более сложного строения (наклон 5–6°), встречаются участки, приподнятые почти до поверхности участки (мялины) [2–5].

Площадь водного зеркала озера составляет 79,62 км². Средняя глубина составляет 8,9 м, наибольшая глубина на юго-востоке в Гатовских ямах и достигает 24,8 м. Озеро не имеет ярко выраженной направленности или вытянутости в какую-либо сторону. Ширина озера составляет 9,8 км, длина наибольшего поперечника – 12,8 км, береговая линия в сумме составляет 40 км. В Нарочи аккумуляровано около 710 млн. м³ воды. Водосбор озера составляет 199 км² [2–5].

В гидрологическом отношении озеро Нарочь относится к числу слабопроточных водоемов. Вода поступает в него из озера Мясстро через короткую протоку Скема. Мясстро соединено протокой Баторинский ручей с озером Баторино. Кроме того, Нарочь принимает воды 17 ручьев, главным образом со стороны высоких склонов. Это Проньки, Антонинсберг, Урлики, Симоны и др. Сток из озера идет по реке Нарочь, которая, вытекая на юго-востоке, впадает в р. Вилию – правый приток Немана.

Таким образом, озера Баторин и Мястро служат как бы буферной зоной, задерживая поступление в Нарочь загрязняющих веществ. Малая величина удельного водосбора выражается в характере водного баланса озера. В средние по водности годы в озеро Нарочь поступает 83,6 млн. м³ воды; из них 30,7 млн. м³ (около 30%) приходит с поверхностным стоком, более 52 млн. м³ (60%) озеро получает за счет атмосферных осадков, выпадающих на водное зеркало. В расходной части водного баланса преобладает сток по р. Нарочь (56%) и испарение с водной поверхности. В итоге водный баланс Нарочи положительный, так как атмосферные осадки превышают испарение, что характерно для климата гумидной зоны. Значительная площадь и объем воды озера свидетельствуют о медленном процессе водообмена. Весь объем воды сменяется раз в 10 лет.

Колебания уровня воды в течение года до 40, иногда до 70 см. Во время половодья площадь озера увеличивается на 2%. Зарастает 21% площади озера. Наиболее зарос Малый плес, в северо-восточной части которого ширина полосы зарастания до 2 км, в Большом плесе – от 5 до 350 м. Тростник, камыш растут до глубины 1,5–2 м и покрывают менее 3% площади озера. Подводная растительность, среди которой преобладают харовые водоросли, распространена до глубины 7,5 м, занимает 18% площади дна озера [2–5].

Основное направление рационального использования озера Нарочь состоит в повышении его рыбопродуктивности и рекреационная деятельность. Однако следует сказать, что развитие курортов, увеличение числа отдыхающих и туристов создают угрозу сохранения мезотрофного уровня системы озера. Данные многолетних исследований свидетельствуют, с одной стороны, об устойчивости Нарочанской экологической системы к антропогенному воздействию, а с другой – о некоторых признаках антропогенного эвтрофирования. Распашка земель, мелиорация заболоченных площадей, расширение населенных пунктов оказывает антропогенное влияние на озеро.

Целью настоящей работы является моделирование возможных колебаний средних годовых уровней воды озера

Методика расчета

Если рассматривать колебания уровня озера в плоскости (приращение уровня), то исключается явная зависимость колебаний уровня от времени, т. к. исходные данные на плоскости представляются множеством точек [6]. Для этого множества точек можно построить выборочную регрессию, показывающую меру разброса экспериментальных точек вокруг некоторой функции $g(x)$, называемой регрессией. Чаще всего мера разброса для непрерывной на заданном отрезке функции $g(x)$ определяется формулой

$$Q(g) = \sum_{j=1}^n (y_j - g(x_j))^2, \quad (1)$$

где y_j – ордината; x_j – абсцисса экспериментальных наблюдений.

Теорема Вейерштрасса гласит, что любая непрерывная на конечном отрезке функция может быть приближена алгебраическим полиномом с любой заданной точностью, поэтому ее можно применять для анализа колебаний уровня воды с применением параметрической модели вида [6]:

$$\Delta H = \Phi(H) + \gamma(t), \quad (2)$$

где H – уровень водоема; ΔH – его приращения; $\gamma(t)$ – случайная возмущающая сила; $\Phi(H)$ – алгебраический полином, называемый автономной (не зависящей от времени) регрессией.

В автономное уравнение или систему автономных уравнений явно не входит независимая переменная (время), что означает, что закон изменения неизвестных функций, описываемых автономным уравнением или системой автономных уравнений, не меняется с течением времени [8]. Поэтому, полученное решение этого уравнения дает возможность проводить моделирование уровня воды за пределами рассматриваемого отрезка времени.

Для проведения расчетов и последующего моделирования исходные данные наблюдений нормируются с помощью преобразования:

$$Z(t) = \frac{2H(t) - H_{\max} - H_{\min}}{H_{\max} - H_{\min}}, \quad (3)$$

где $Z(t)$ – нормированная величина уровня водоема; $H(t)$ – исходный уровень в момент времени $t = 1, \dots, N$; $H_{\max} = \max_{1 \leq t \leq N} H(t)$ – максимальный уровень; $H_{\min} = \min_{1 \leq t \leq N} H(t)$ – минимальный уровень водоема.

Метод построения параметрической регрессии основан на использовании следующей линейной относительно параметров дифференциально-разностной модели [1]:

$$Z(t+1) - Z(t) = \Phi(Z(t)) + \gamma^{(k)}(t), \quad (4)$$

где $\gamma^{(k)}(t)$ – остаточная последовательность модели регрессии порядка k , а $\Phi(Z(t))$ определяется из соотношения:

$$\Phi(Z(t)) = \sum_{i=0}^k a_i Z^i(t).$$

Будем предполагать, что эта последовательность имеет постоянное математическое ожидание и дисперсию, а ее значения некоррелированы. Оценки параметров a_i определяются из условия минимума функции Q методом наименьших квадратов:

$$Q(a_0, a_1, \dots, a_k) = \sum_{t=1}^{N-1} \left[Z(t+1) - Z(t) - \sum_{i=0}^k a_i Z^i(t) \right]^2, \quad (5)$$

где k – степень полинома; N – число статистических данных наблюдений.

Функция $Q(a_0, a_1, \dots, a_k)$ достигает минимума в точках, где производные по соответствующим переменным обращаются в ноль. Полученные уравнения являются линейными относительно параметров и решаются обычным способом. Степень полинома k выбирается при условии стабилизации суммы квадратов остаточной последовательности.

При решении уравнения $\Phi(Z(t)) = 0$ получают равновесные положения уровня для нормированных данных, а соответствующие им равновесные абсолютные положения уровня при рассмотрении производной в полученных точках означают устойчивое (знак “–”) или неустойчивое (знак “+”) состояние [8]. Для наглядности движения идеальной точки под действием случайной вынуждающей силы рассматривают потенциал

$$U(H) = - \int \Phi(H) dH. \quad (7)$$

Минимумы потенциала соответствуют устойчивым состояниям равновесия, а максимумы – неустойчивым.

Для моделирования траектории исследуется остаточная последовательность. Если исследуемая функция $Y(t)$ есть сумма периодической функции $f_p(t)$ с периодом P_0 и шума $\varepsilon(t)$, то при наложении отрезков ряда Y_k длиной P_0 друг на друга выявляется вид периодической функции $f_p(t)$. Для этого необходимо свернуть временной ряд с периодом P_0 и рассмотреть фазовую диаграмму этого периода. Фазовая диаграмма представляет собой зависимость Y_k от X_k , где абсцисса X_k определяется следующим выражением [9]:

$$X_k = fr \left(\frac{t_k - t_0}{P_0} \right), k = 1, \dots, N, \quad (8)$$

где $fr(z)$ – дробная часть числа z ; t_k – моменты времени наблюдений; t_0 – произвольно выбранный момент времени.

Исходные данные и результаты исследований

В основу исследования положены материалы наблюдений за уровнями воды в озере Нарочь за 55-летний интервал – с 1956 по 2010 гг., полученные государственным учреждением «Республиканский центр по гидрометеорологии, контролю радиоактивного загрязнения и мониторингу окружающей среды» Министерства природных ресурсов и охраны окружающей среды Республики Беларусь. Для проведения анализа имеющегося ряда данных наблюдений построен график колебаний уровня воды озера Нарочь на исследуемом интервале, изображенный на рис. 1.

Для моделирования колебаний уровня во избежание ошибок при округлении в вычисления исходные данные были нормированы с помощью преобразования (3). При использовании для нормированных данных модели (4)–(5) были рассчитаны суммы квадратов остаточной последовательности $\gamma^{(k)}(t)$ для степени полинома k , равной числам от 3 до 10 включительно. Полученные результаты свидетельствуют о стабилизации остаточной суммы квадратов нормированных данных при $k = 8$, поэтому дальнейшее увеличение порядка регрессии не требуется (рис. 2).

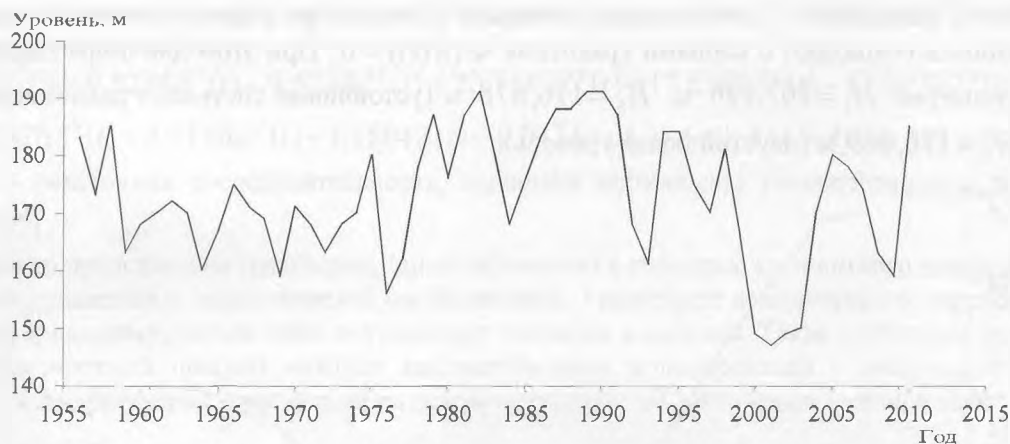


Рисунок 1 – Колебания уровня воды озера Нарочь, 1956–2010 гг.

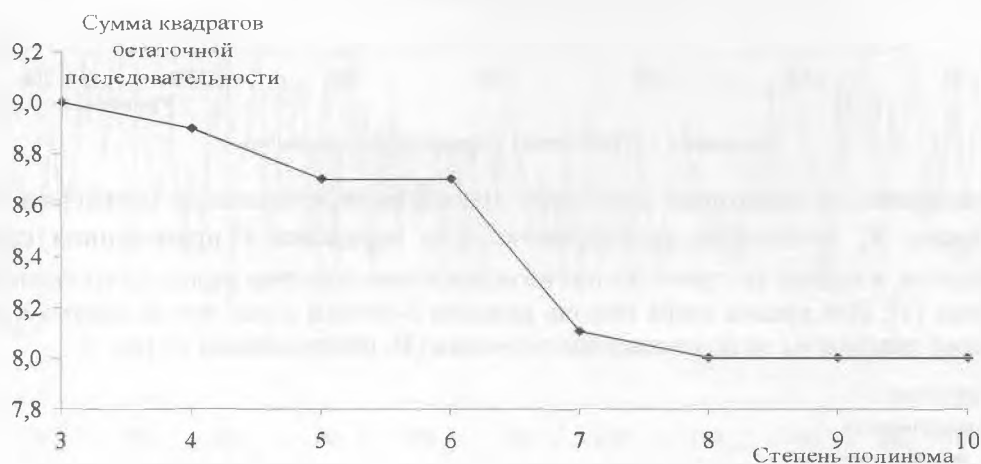


Рисунок 2 – Зависимость суммы квадратов остаточной последовательности от степени полинома

Далее методом наименьших квадратов была рассчитана функция $\Phi(Z(t))$, описывающая колебания нормированных данных наблюдений и представленная в виде полиномиальной регрессии 8-й степени:

$$\Phi(Z(t)) = -9.8234Z^8(t) - 9.5248Z^7(t) + 20.3185Z^6(t) + 17.6399Z^5(t) - 13.8939Z^4(t) - 8.3926Z^3(t) + 3.3150Z^2(t) + 0.1504Z(t) - 0.0134. \quad (9)$$

Равновесные положения уровня являются корнями уравнения $\Phi(Z(t)) = 0$ и принимают для нормированных данных значения $Z_1 = -0,082$, $Z_2 = 0,049$, $Z_3 = 0,349$, что соответствует трем значениям уровня $H_1 = 167,196$ м, $H_2 = 170,069$ м, $H_3 = 176,678$ м, являющихся положениями равновесия (рис. 3).

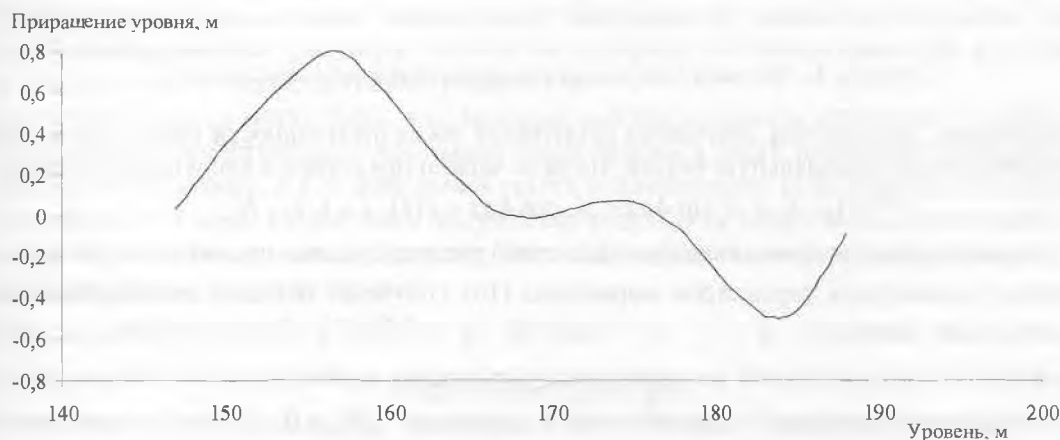


Рисунок 3 – Полиномиальная регрессия 8-го порядка в абсолютном масштабе

Используя выражение (7), исследован потенциал уровня озера Нарочь (рис. 4). Точки экстремумов потенциала совпадают с корнями уравнения $\Phi(Z(t)) = 0$. При этом для озера Нарочь характерно два минимума $H_1 = 167,196$ м, $H_3 = 176,678$ м (устойчивые состояния равновесия) и один максимум $H_2 = 170,069$ м (неустойчивый уровень).

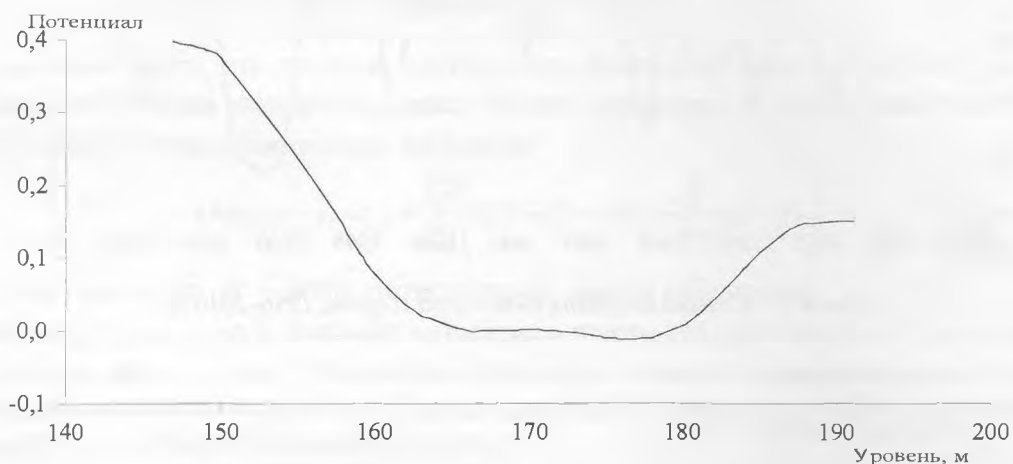


Рисунок 4 – Потенциал регрессии 8-го порядка

Для моделирования траектории колебаний уровня была исследована остаточная последовательность. Период P_0 остаточной последовательности определен с применением спектрально-временного анализа, в основу которого положено вычисление спектров вариации на скользящих временных отрезках [7]. Для уровня озера Нарочь выявлен 2-летний цикл, что положено в основу построения фазовой диаграммы на основании соотношения (8), изображенной на рис. 5.

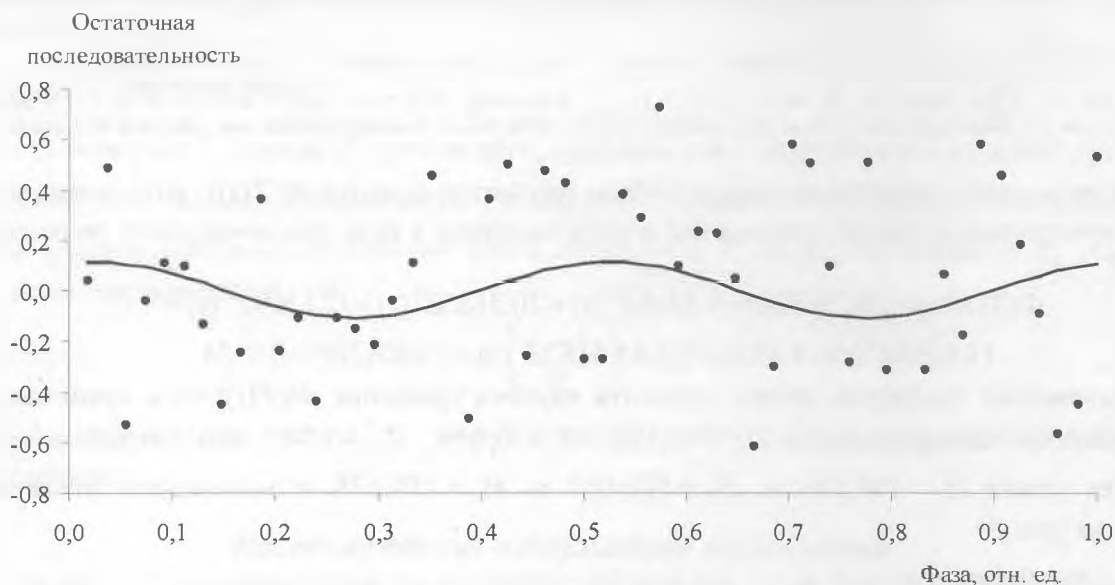


Рисунок 5 – Фазовая диаграмма остаточной последовательности

Предположим, что фазовая диаграмма остаточной последовательности имеет характерную для сезонных колебаний синусоидальную форму, тогда ее можно представить следующим образом:

$$\gamma^{(8)}(t) = A_0 + A_1 \sin 4\pi t + A_2 \cos 4\pi t + \varepsilon(t), \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

где $\varepsilon(t)$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

Значения неизвестных параметров выражения (10) получены методом наименьших квадратов и имеют следующие значения: $A_0 = 0$, $A_1 = 0,03418$, $A_2 = 0,10471$. После удаления из остаточной последовательности периодической составляющей рассчитаны параметры последовательности $\varepsilon(t)$, имеющие следующие значения: математическое ожидание $M_k = 0$ и стандартное отклонение $\sqrt{D_k} = 0,3805$.

Для моделирования траектории колебаний уровня озера Нарочь выражение (9) преобразуется к следующему выражению:

$$\Phi(Z(t)) = -9.8234Z^8(t) - 9.5248Z^7(t) + 20.3185Z^6(t) + 17.6399Z^5(t) - 13.8939Z^4(t) - 8.3926Z^3(t) + 3.3150Z^2(t) + 1.1504Z(t) - 0.0134 + A_0 + A_1 \sin 4\pi t + A_2 \cos 4\pi t + \varepsilon(t), \quad (11)$$

где $\varepsilon(t)$ – остаточная последовательность, имеющая нормальное распределение с параметрами $N(0; 0,3805)$.

На рис. 6 представлена траектория, смоделированная с помощью автономного дифференциально-разностного уравнения и периодической составляющей. Траектория демонстрирует переходы от верхнего уровня к нижнему, резкие либо постепенные подъемы и падения. Такая траектория позволяет получить вероятностный прогноз методом математического моделирования – построения достаточно большого числа траекторий и расчета на их основе вероятностей достижения того или иного уровня.

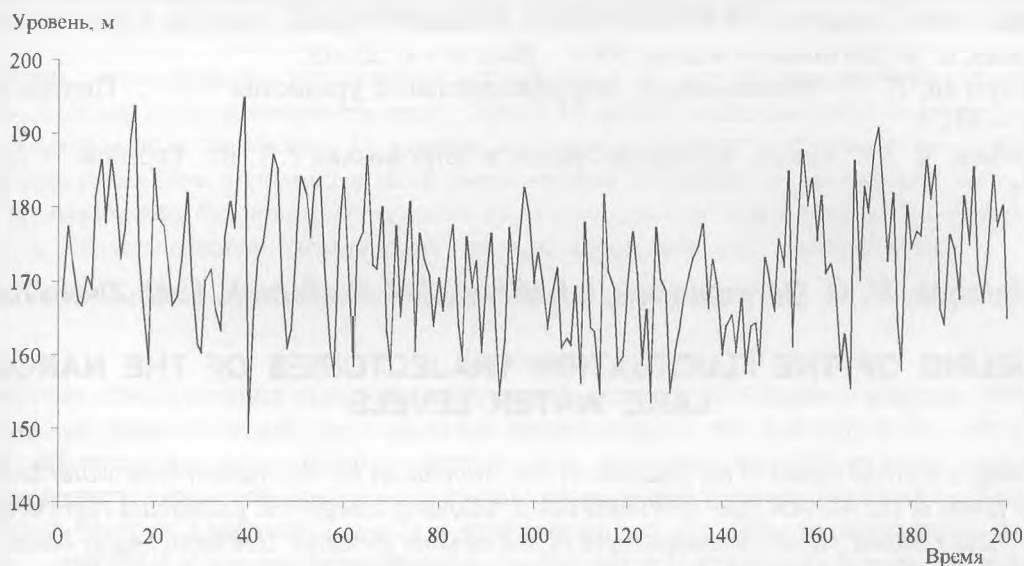


Рисунок 6 – Моделированная траектория колебаний уровня озера Нарочь

Моделирование по формуле (11) траектории длиной 200 значений показало, что за пределы верхнего уровня, равного 191 м, выходят 2 значения, что составляет 1%. Это позволяет говорить о том, что вероятность превышения максимального годового уровня озера Нарочь маловероятна.

Заключение

В результате проведенных исследований колебаний уровня озера Нарочь исходные данные разложены на 3 составляющие: полиномиальную регрессию, позволяющую определить не зависящий от времени закон траектории, периодическую составляющую синусоидального характера и остаточную последовательность независимых случайных величин. Моделирование траектории колебаний основано на детерминированной части, состоящей из регрессии 8-го порядка и периодической составляющей, а также случайной части, состоящей из независимых одинаково распределенных величин.

С применением предложенной модели можно моделировать траектории колебаний уровня озера Нарочь. Смоделированная траектория длиной 200 значений продемонстрировала вероятность превышения максимального годового уровня, равную 1%.

Полученные данные могут быть использованы для последующих прогнозных оценок гидрологического режима и экологического состояния озера Нарочь в части изменений температурного режима, кислородного режима, в т. ч. изменений такого показателя как БПК-5, а так же изменений концентраций примесей в воде. Кроме того, полученные результаты могут быть использованы для долгосрочных экономических оценок ресурсного потенциала объекта, например, при изменении площадей нерестилищ промысловых видов рыб.

Список литературы

1. Айвазян, С. А. Прикладная статистика. Исследование зависимостей / С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 487 с.

2. Блакітная кніга Беларусі: Энцыкл./ Беларус. Энцыкл.; Рэдкал.: Н. А. Дзісько і інш. – Мінск: БелЭн, 1994. – 415 с.
3. Блакітны скарб Беларусі: Рэкі, азёра, вадасховішчы, турыцкі патынцыял водных аб'ектаў / Маст.: Ю. А. Тарэеў, У. І. Цярэнцьеў. – Мінск: БелЭн, 2007. – 480 с.
4. Водные ресурсы Национального парка «Нарочанский»: справочник / А. Г. Аронов [и др.]; под общей редакцией В. С. Люштыка, д-ра биол. наук Т. В. Жуковой. – Минск : РИФТУР ПРИНТ, 2012. – 128 с.
5. Иванов-Смоленский, В. Г. Все озера Беларуси: справочник / В. Г. Иванов-Смоленский. – Минск РИФТУР ПРИНТ, 2013. – 752 с.
6. Кожевникова, И.А. Моделирование колебаний уровня озера Кинерет / И. А. Кожевникова, В. И. Швейкина // Водные ресурсы. – 2014. – Том 41, №1. – С. 565–572.
7. Логинов, В. Ф. Спектрально-временной анализ уровня озера и колебаний расходов воды крупных рек Беларуси / В. Ф. Логинов, В. Ф. Иконников // Природопользование: сб. научн. тр. / Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т проблем использования природ. ресурсов и экологии; под ред. И. И. Лиштвана, В. Ф. Логинова. – Минск, 2003. – Вып. 9. – С. 25–33.
8. Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М.: Наука, 1965. – 331 с.
9. Теребиж, В. Ю. Анализ временных рядов в астрофизике / В. Ю. Теребиж. – М.: Наука, 1992. – 389 с.

A. A. Volchek, M. G. Germenchuk, I. I. Kirvel, S. I. Parfomuk, L. N. Zhuravovich

MODELING OF THE FLUCTUATION TRAJECTORIES OF THE NAROCH LAKE WATER LEVELS

Following is method model of the fluctuation line calculation for the Naroch Lake water levels. Initial data of water levels of the Naroch Lake is divided into 3 following categories: polinomial regression, periodic component and residual sequence independent of the random quantities. line modeling is based on deterministic part which consists of 8th level regression and periodic component as well as random part consisting of independent uniformly distributed quantities.