МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

РЯДЫ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Методические рекомендации и варианты контрольной работы по дисциплине *“Высшая математика”* для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Брест 2011

УДК 517.4/.5 (076)

В настоящей методической разработке приведены вопросы программы и варианты контрольной работы по разделам «Ряды», «Теория функции комплексного переменного» и «Операционное исчисление» дисциплины «Высшая математика», изучаемых студентами технических специальностей заочной формы обучения в третьем семестре. Приведены некоторые методические рекомендации, полезные для успешного выполнения контрольной работы. В организационно-методических указаниях указаны правила оформления контрольной работы.

Составители: Гладкий И.И., доцент,
Лизунова И.В., доцент,
Тузик Т.А., доцент,
Юхимук М.М., старший преподаватель

Рецензент: Савчук В.Ф., зав. кафедрой информатики и прикладной математики УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент.

ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В контрольную работу включены 8 заданий по разделам «Ряды», «Теория функции комплексного переменного» и «Операционное исчисление» дисциплины «Высшая математика».

Нумерация задач состоит из двух чисел: первое число – номер задания, второе (после точки) – номер варианта.

Правила оформления контрольной работы:

1) контрольная работа выполняется в отдельной (тонкой) ученической тетради с отчерченными полями;
2) на обложке обязательно должен быть указан шифр (номер зачетной книжки);
3) контрольная работа выполняется студентом в соответствии со своим вариантом, который определяется по двум последним цифрам шифра;
4) каждое задание начинается на новой странице с обязательной записью его полного условия. Если задача имеет общую формулировку, то ее условие переписывают, заменяя общие данные конкретными, соответствующими номеру варианта;
5) решения всех заданий должны быть подробными и аккуратными, содержать достаточные пояснения, необходимые рисунки и таблицы;
6) завершает работу список используемой литературы и роспись студента;
7) после рецензии исправления в тексте работы недопустимы;
8) исправление ошибок, указанных рецензентом, выполняют в той же тетради после росписи студента.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КУРСА «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

III семестр

1. Числовой ряд и его сумма. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.
2. Свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости числового ряда.
3. Признаки сравнения.
4. Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши.
5. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.
6. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
7. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.
8. Функциональный ряд и его область сходимости.
9. Равномерная сходимость функционального ряда. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.
10. Степенной ряд. Теорема Абеля.
11. Область сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов.

12. Условия представления функции рядом Тейлора. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.
13. Приложения степенных рядов.
14. Ряд Фурье. Тригонометрический ряд Фурье для 2π- периодической функции.
15. Ряды Фурье для четных и нечетных функций.
16. Ряды Фурье для функций, заданных на отрезке $[0,\pi]$.
17. Ряд Фурье для функции, заданной на отрезке длины 2π.
18. Ряд Фурье для функций с произвольным периодом.
19. Понятие функции комплексной переменной. Геометрическая интерпретация.
20. Предел и непрерывность функции в точке. Основные элементарные функции комплексной переменной.
21. Производная функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана.
22. Аналитические функции. Правильные и особые точки аналитической функции.
23. Геометрический смысл модуля и аргумента производной аналитической функции.
24. Гармонические функции.
25. Понятие конформного отображения.
26. Интеграл от функции комплексной переменной, его свойства и вычисление.
27. Интегральная теорема Коши.
28. Интегральная формула Коши. Формулы для производных.
29. Ряд Тейлора в комплексной области.
30. Ряд Лорана.
31. Нули и изолированные особые точки аналитической функции.
32. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке.
33. Вычет в бесконечно удаленной точке.
34. Основная теорема о вычетах.
35. Применение вычетов к вычислению интегралов.
36. Оригинал и изображение. Классы оригиналов и изображений.
37. Линейность преобразования. Теоремы подобия и запаздывания.
38. Изображение свертки оригиналов.
39. Дифференцирование и интегрирования оригиналов и изображений.
40. Графическое задание оригиналов.
41. Оригиналы от рациональных функций.
42. Решение дифференциальных уравнений операционным методом.
43. Решение систем дифференциальных уравнений операционным методом.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Задание 1. Исследовать сходимость числовых рядов.

1.1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.

1.2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3}{4^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2+1}$.

1.3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^{n-1}}{n^2+4}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$.

1.4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+4}{(n+1)^4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{n(n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

1.5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{(2n+1)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n-2}}$.

1.6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{(n+1)^2}$.

1.7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n+4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n\cdot 5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2-1}$.

1.8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 5^n}{(n+1)^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$.

1.9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(2n+8)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n-1}}{(n+1)^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}}$.

1.10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+5)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{(n+1)(n+3)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$.

1.11. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+8n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(n+1)(n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$.

1.12. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$.

1.13. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n+1)}$.

1.14. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^{n-1}}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)^2}$.

1.15. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n+2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)\cdot 3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n-1}}$.

1.16. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{n^2(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 2^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$.

1.17. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-2}{n^2+3n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 5^n}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

1.18. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{n(n+4)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot 6^n}{(n+2)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n+1}}$.

1.19. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^4}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{4n+5}}$.

1.20. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{\sqrt{n^3+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.

1.21. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n+1}}{(n+2)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)^2}$.

1.22. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+3}$.

1.23. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{\sqrt{n^2+4n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)\cdot 5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{2n^2+1}$.

1.24. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 3^n}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+4}$.

1.25. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+3}$.

1.26. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+4}$.

1.27. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{(n+1)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^n}{(n+2)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5n+3}$.

1.28. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 2^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)^2}$.

1.29. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+3)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n(n+1)(n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

1.30. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+5)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n\cdot 5^{n+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+6}$.

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость:
а) написать первые четыре члена ряда;
б) найти интервал сходимости ряда;
в) выявить вопрос о сходимости ряда на концах интервала сходимости.

2.01. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n}{2^n\cdot n^n}(x+1)^n$.

2.02. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n\cdot(n+1)}(x-3)^n$.

2.03. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+3)}(x-4)^n$.

2.04. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n}(x+1)^n$.

2.05. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n\cdot n^n}(x-1)^n$.

2.06. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{3^n}(x-1)^n$.

2.07. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n\cdot n}(x+3)^n$.

2.08. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n\cdot(n+3)}(x+1)^n$.

2.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}(x+6)^n$.

2.17. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(x+3)^n$.

2.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{6^n}(x-6)^n$.

2.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n\cdot n^n}(x-3)^n$.

2.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x+1)^n$.

2.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}(x-1)^n$.

2.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n+2}}(x+2)^n$.

2.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2^n}(2x-1)^n$.

2.09. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n (x-2)^n$.

2.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2}(x+8)^n$.

2.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)^n}{3^n\cdot n^n}(x-1)^n$.

2.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n^2}(x-2)^n$.

2.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2^n}(x+2)^n$.

2.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^n\cdot n}(x-5)^n$.

2.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{2n-1}(x-4)^n$.

2.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^n}{(n+1)^n}(x+4)^n$.

2.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}\cdot 4^n}(x+1)^n$.

2.26. $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(2+x)^n$.

2.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2\cdot 2^n}(x+5)^n$.

2.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}(x-1)^n$.

2.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+3)}(x-1)^n$.

2.30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{n\cdot\sqrt{n}}(x+1)^n$.

Задание 3. Найти три первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения $y'=f(x)$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=y_0$.

3.01. $y'=3\cos x+y^2$, $y(0)=1$.
3.02. $y'=2y+y^2$, $y(0)=3$.
3.03. $y'=4\sin x+y^2$, $y(0)=1$.
3.04. $y'=x^2+y^2$, $y(0)=2$.
3.05. $y'=2e^y+xy$, $y(0)=0$.
3.06. $y'=e^x+y^2$, $y(0)=0$.
3.07. $y'=2e^y-xy$, $y(0)=0$.
3.08. $y'=e^x+y$, $y(0)=4$.
3.09. $y'=\sin x+3y^2$, $y(0)=1$.
3.10. $y'=x+x^2+y^3$, $y(0)=5$.
3.16. $y'=3xy-e^x+4$, $y(0)=0$.
3.17. $y'=2\sin x-x^2y$, $y(0)=1$.
3.18. $y'=xy^3-2x$, $y(0)=2$.
3.19. $y'=3xy-\sin x$, $y(0)=2$.
3.20. $y'=e^{3x}+2xy^2$, $y(0)=0$.
3.21. $y'=2\sin x+xe^y+2$, $y(0)=1$.
3.22. $y'=4xy^2-yx^2$, $y(0)=-1$.
3.23. $y'=4xy^2-2x$, $y(0)=3$.
3.24. $y'=5xy^2-e^x+1$, $y(0)=0$.
3.25. $y'=4x^3-xy^2$, $y(0)=1$.

3.11. $y' = 2x^2 + y^3$, $y(0) = 3$.

3.12. $y' = 3x^2 - yx$, $y(0) = 3$.

3.13. $y' = xy - e^{2x}$, $y(0) = 0$.

3.14. $y' = 3xy^2 + y$, $y(0) = 1$.

3.15. $y' = x^2y - 3x + 1$, $y(0) = 0$.

3.26. $y' = e^{3x} - \sin x$, $y(0) = 1$.

3.27. $y' = 3xy - \cos 3x$, $y(0) = 1$.

3.28. $y' = x^2y + \sin 2x$, $y(0) = 2$.

3.29. $y' = 3xy^2 - \sin 3x$, $y(0) = 3$.

3.30. $y' = xy^2 + e^{3x}$, $y(0) = 2$.

Задание 4. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке z_0 при отображении $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$.

	$u(x,y)$	$v(x,y)$	z_0
4.1.	$3x^2y - y^3$;	$3xy^2 - x^3$;	$-i + 1$.
4.2.	$e^{1+y}\cos x$;	$-e^{1+y}\sin x$;	$\frac{p}{4} + i$.
4.3.	$x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2$;	$3x^2y - y^3 + 2xy$;	$\frac{2}{3}i$.
4.4.	$2xy - 2x$;	$y^2 - 2y - x^2 + 1$;	1.
4.5.	$e^x \cos y$;	$e^x \sin y$;	$-1 + ip$.
4.6.	$x^2 + 2x - y^2$;	$2xy + 2y$;	i.
4.7.	$e^{-1-y}\cos x$;	$e^{-1-y}\sin x$;	$p - i$.
4.8.	$e^{-x}\cos y$;	$-e^{-x}\sin y$;	i.
4.9.	$x^2 - y^2$;	$2xy$;	$\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.
4.10.	$2xy$;	$y^2 - x^2$;	$-i$.
4.11.	$2x^2 - 2y^2 + y$;	$4xy - x$;	$-1 + i$.
4.12.	$e^{y^2 - x^2}\cos 2xy$;	$-e^{y^2 - x^2}\sin 2xy$;	i.
4.13.	$x^3 - 3xy^2 + 3x$;	$3x^2y - y^3 + 3y - 1$;	$-1 + i$.
4.14.	$x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2$;	$3x^2y - y^3 + 2xy$;	$1 - i$.

4.15.	$e^{-1+2y}\cos 2x$;	$-e^{-1+2y}\sin 2x$;	$\frac{\pi}{6}$.
4.16.	x^3-3xy^2+2x;	$3x^2y-y^3+2y-1$;	$2i$.
4.17.	$3xy^2-x^3$;	y^3-3x^2y;	$-1+i$.
4.18.	$-e^{1+y}\sin x$;	$-e^{1+y}\cos x$;	$-\frac{\pi}{4}-i$.
4.19.	$3x^2y-y^3+2xy$;	$-x^3+3xy^2-x^2+y^2$;	$\frac{2}{3}i$.
4.20.	x^2-y^2-x;	$2xy-y$;	$5-4i$.
4.21.	y^2-2y-x^2+1;	$2x-2xy$;	$1-2i$.
4.22.	$xy+y+2$;	$\frac{1}{2}\left(y^2-x^2\right)-x-1$;	$1+i$.
4.23.	$e^{-x}\sin y$;	$e^{-x}\cos y$;	πi.
4.24.	x^2-y^2-3x+1;	$2xy-3y$;	4.
4.25.	$2xy-3y$;	$-x^2+y^2+3x-1$;	i.
4.26.	$4xy-x$;	$2y^2-y-2x^2$;	$1-i$.
4.27.	$3x^2y-y^3+3y-1$;	$3xy^2-x^3-3x$;	$\frac{1}{2}i$.
4.28.	$3x^2y-y^3+2xy$;	$y^2-x^3+3xy^2-x^2$;	$2+i$.
4.29.	$e^{1+2y}\sin 2x$;	$e^{1+2y}\cos 2x$;	$\frac{\pi}{3}$.
4.30.	$3x^2y-y^3+2x-1$;	$3xy^2-x^3+2y$;	$3+2i$.

Задание 5. Вычислить интегралы.

5.01. а) $\int\limits_L \bar{z}\cdot\mathrm{Re}\left(z^2\right)dz$, где L – дуга параболы $y=x^2$ от $z_1=0$ до $z_2=1+i$.

б) $\oint\limits_C \frac{z}{(z+3)(z-3i)}dz$, где $C:|z+3|=1$.

5.02. а) $\int\limits_L \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re}\left(z^2\right) dz$, где L – отрезок прямой $y = 2 + x$ от $z_1 = -1 + i$ до $z_2 = 1 + 3i$.

б) $\oint\limits_C \frac{z+1}{(z+2+3i)(z+3i)} dz$, где $C: \left| z + 2 + 3i \right| = 1$.

5.03. а) $\int\limits_L \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re}\left(z^2\right) dz$, где L – дуга параболы $y = 1 - x^2$ от $z_1 = -1$ до $z_2 = i$.

б) $\oint\limits_C \frac{z-3}{(z+2-4i)(z+2-2i)} dz$, где $C: \left| z + 2 - 4i \right| = 1$.

5.04. а) $\int\limits_L z \cdot \operatorname{Re}\left(z^2\right) dz$, где L – дуга параболы $y = -x^2$ от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 - i$.

б) $\oint\limits_C \frac{z-2}{(z+2+i)(z+4+i)} dz$, где $C: \left| z + 2 + i \right| = 1$.

5.05. а) $\int\limits_L \operatorname{Re}\left(z^2\right) \cdot \operatorname{Im}(z + 2 - 3i) dz$, где L – отрезок прямой $y = 3 - x$ от $z_1 = 3i$ до $z_2 = 3$.

б) $\oint\limits_C \frac{z-i}{(z+2-i)(z+2-3i)} dz$, где $C: \left| z + 2 - i \right| = 1$.

5.06. а) $\int\limits_L (\bar{z})^3 dz$, где L – дуга параболы $y = x^2$ от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$.

б) $\oint\limits_C \frac{z+2}{(z+1-4i)(z+5-4i)} dz$, где $C: \left| z + 1 - 4i \right| = 2$.

5.07. а) $\int\limits_L (\bar{z})^2 \cdot \operatorname{Im} z \, dz$, где L – отрезок прямой $y = 2 + x$ от $z_1 = -1 + i$ до $z_2 = 1 + 3i$.

б) $\oint\limits_C \frac{z+i}{(z+1+4i)(z+1+8i)} dz$, где $C: \left| z + 1 + 4i \right| = 2$.

5.08. а) $\int\limits_L (\bar{z})^2 \cdot \operatorname{Re} z\, dz$, где L – дуга параболы $y = 1 - x^2$ от $z_1 = -1$ до $z_2 = i$

б) $\oint\limits_C \dfrac{z + 2i}{(z + 1 - 2i)(z - 3 - 2i)} dz$, где $C : \left| z + 1 - 2i \right| = 2$.

5.09. а) $\int\limits_L z \cdot (\bar{z})^2\, dz$, где L – дуга параболы $y = -x^2$ от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 - i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{2z + 1}{(z + 1 - i)(z + 1 - 7i)} dz$, где $C : \left| z + 1 - i \right| = 3$.

5.10. а) $\int\limits_L (\bar{z})^2 \cdot \operatorname{Im}(z + 2 - 3i)\, dz$, где L – отрезок прямой $y = 3 - x$ от $z_1 = 3i$ до $z_2 = 3$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{z + 4}{(z + 1 + i)(z - 5 + i)} dz$, где $C : \left| z + 1 + i \right| = 3$.

5.11. а) $\int\limits_L \bar{z} \cdot \operatorname{Im}\left(z^2\right) dz$, где L – дуга параболы $y = x^2$ от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{z - i}{(z - 1 - 4i)(z - 1 + 2i)} dz$, где $C : \left| z - 1 - 4i \right| = 3$.

5.12. а) $\int\limits_L \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im}\left(z^2\right) dz$, где L – отрезок прямой $y = 2 + x$ от $z_1 = -1 + i$ до $z_2 = 1 + 3i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{z + 3i}{(z - 1 + 3i)(z - 7 + 3i)} dz$, где $C : \left| z - 1 + 3i \right| = 3$.

5.13. а) $\int\limits_L \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im}\left(z^2\right) dz$, где L – дуга параболы $y = 1 - x^2$ от $z_1 = -1$ до $z_2 = i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{2z + 1}{(z - 1 - 2i)(z - 1 - 10i)} dz$, где $C : \left| z - 1 - 2i \right| = 4$.

5.14. а) $\int\limits_L z\cdot \operatorname{Im}\left(z^2\right)dz$, где L – дуга параболы $y=-x^2$ от $z_1=0$

до $z_2=1-i$.

б) $\oint\limits_C \frac{z-1}{(z-1-i)(z+7-i)}dz$, где $C: \left|\, z-1-i \,\right| = 4$.

5.15. а) $\int\limits_L \operatorname{Im}\left(z^2\right)\cdot \operatorname{Im}(z+2-3i)\,dz$, где L – отрезок прямой $y=3-x$

от $z_1=3i$ до $z_2=3$.

б) $\oint\limits_C \frac{z+i}{(z-1+i)(z-1+9i)}dz$, где $C: \left|\, z-1+i \,\right| = 4$.

5.16. а) $\int\limits_L z\cdot\left(\overline{z+1-i}\right)dz$, где L – дуга параболы $y=x^2$ от $z_1=0$

до $z_2=1+i$.

б) $\oint\limits_C \frac{z-4}{(z-3-4i)(z-11-4i)}dz$, где $C: \left|\, z-3-4i \,\right| = 4$.

5.17. а) $\int\limits_L \left(\overline{z+1-i}\right)\cdot \operatorname{Im} z\,dz$, где L – дуга параболы $y=2+x$

от $z_1=-1+i$ до $z_2=1+3i$.

б) $\oint\limits_C \frac{z+3i}{(z-3+3i)(z-3-4i)}dz$, где $C: \left|\, z-3+3i \,\right| = 5$.

5.18. а) $\int\limits_L \left(\overline{z+1-i}\right)\cdot \operatorname{Re} z\,dz$, где L – дуга параболы $y=1-x^2$ от $z_1=-1$

до $z_2=i$.

б) $\oint\limits_C \frac{2z-i}{(z-2-2i)(z-12-2i)}dz$, где $C: \left|\, z-2-2i \,\right| = 5$.

5.19. а) $\int\limits_L z\cdot\left(\overline{z+1-i}\right)dz$, где L – дуга параболы $y=-x^2$ от $z_1=0$

до $z_2=1-i$.

б) $\oint\limits_C \frac{z+2}{(z-3-i)(z-3+9i)}dz$, где $C: \left|\, z-3-i \,\right| = 5$.

5.20. а) $\int\limits_L \left(\overline{z+1-i}\right)\cdot \operatorname{Im}\left(z+2-3i\right)dz$, где L – отрезок прямой $y=3-x$ от $z_1=3i$ до $z_2=3$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{i-z}{(z-2+i)(z+8+i)}dz$, где $C:\left|\,z-2+i\,\right|=5$.

5.21. а) $\int\limits_L \operatorname{Im} z\cdot \operatorname{Re}\left(z^2\right)dz$, где L – отрезок прямой $y=2+x$ от $z_1=-1+i$ до $z_2=1+3i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{z+2i}{(z-2-4i)(z-2-16i)}dz$, где $C:\left|\,z-2-4i\,\right|=3$.

5.22. а) $\int\limits_L \overline{z}\cdot z^2\,dz$, где L – дуга параболы $y=x^2-1$ от $z_1=1$ до $z_2=-i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{z+2i}{(z-3+i)(z-8-3i)}dz$, где $C:\left|\,z-3+i\,\right|=4$.

5.23. а) $\int\limits_L z\cdot\left(\overline{z}\right)^2 dz$, где L – дуга параболы $y=-x^2$ от $z_1=0$ до $z_2=1-i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{3-z}{(z-3-2i)(z-3+10i)}dz$, где $C:\left|\,z-3-2i\,\right|=6$.

5.24. а) $\int\limits_L \operatorname{Im}\left(z^2\right)\cdot \operatorname{Im}\left(z+2-3i\right)dz$, где L – отрезок прямой $y=3-x$ от $z_1=3i$ до $z_2=3$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{i-2z}{(z-2-i)(z+10-i)}dz$, где $C:\left|\,z-2-i\,\right|=6$.

5.25. а) $\int\limits_L \left(\overline{z+1-i}\right)\cdot \operatorname{Im} z\,dz$, где L – дуга параболы $y=x^2$ от $z_1=0$ до $z_2=1+i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{z+1-i}{(z-3+i)(z-3-4i)}dz$, где $C:\left|\,z-3+i\,\right|=1$.

5.26. а) $\int\limits_L \left(\overline{z-1+2i}\right)\cdot \operatorname{Re}\left(z-i\right)dz$, где L – дуга параболы $y=-x^2$ от $z_1=0$ до $z_2=1-i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{2z-3+4i}{(z+3-i)(z+3-3i)}dz$, где $C:\left|\,z+3-i\,\right|=1$.

5.27. а) $\int\limits_L \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im}\left(z^2\right) dz$, где L – отрезок прямой $y = 2 + x$ от $z_1 = -1 + i$ до $z_2 = 1 + 3i$.

б) $\oint\limits_C \frac{2i - z}{(z + 1 + i)(z - 5 + i)} dz$, где $C: \left| z + 1 + i \right| = 3$.

5.28. а) $\int\limits_L \bar{z} \cdot \operatorname{Im}\left(z^2\right) dz$, где L – дуга параболы $y = x^2$ от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$.

б) $\oint\limits_C \frac{1 + i - z}{(z + 1 - i)(z + 1 - 7i)} dz$, где $C: \left| z + 1 - i \right| = 3$.

5.29. а) $\int\limits_L (\bar{z})^3 \cdot \operatorname{Re}(z - 1 + i) dz$, где L – дуга параболы $y = x^2$ от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$.

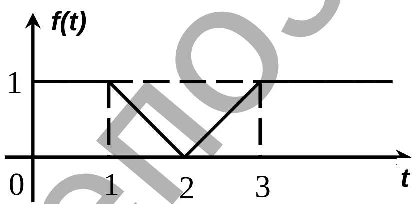
б) $\oint\limits_C \frac{z + 3 - 2i}{(z + 2 - i)(z + 2 - 3i)} dz$, где $C: \left| z + 2 - i \right| = 1$.

5.30. а) $\int\limits_L (\bar{z})^2 \cdot \operatorname{Re}(z + 2 - 3i) dz$, где L – отрезок прямой $y = 3 - x$ от $z_1 = 3i$ до $z_2 = 3$.

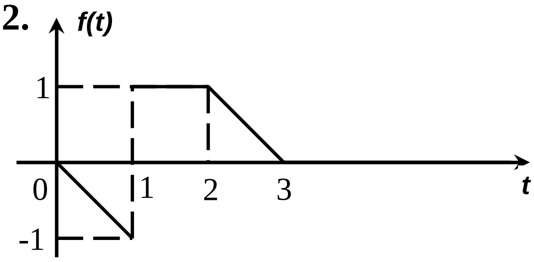
б) $\oint\limits_C \frac{2z - i + 5}{(z + 1 + 4i)(z + 1 + 8i)} dz$, где $C: \left| z + 1 + 4i \right| = 2$.

Задание 6. По данному графику оригинала $f(t)$ найти изображение

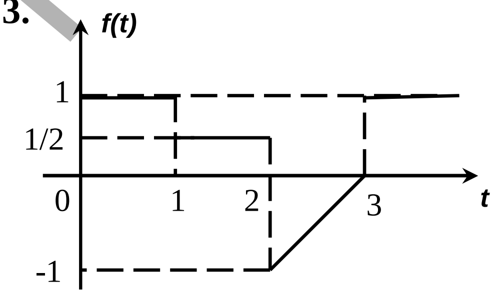
1.



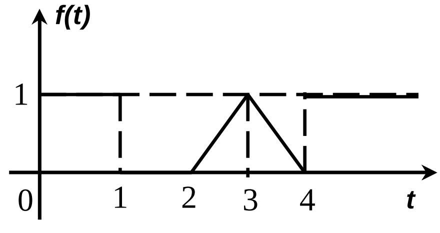
2.



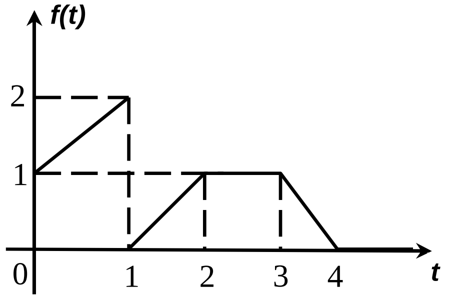
3.



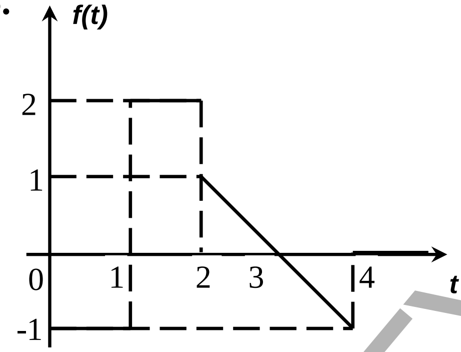
4.



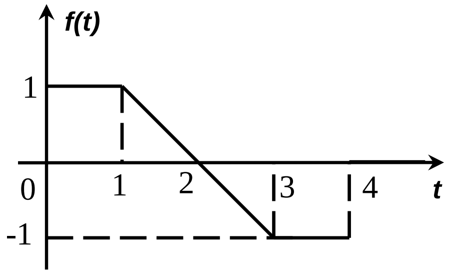
5.



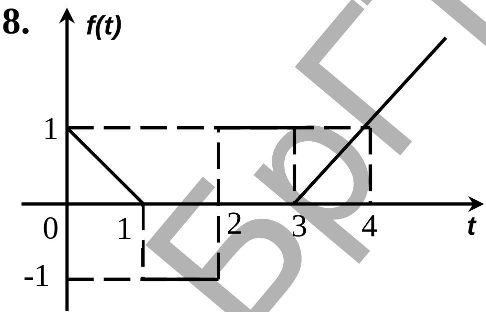
6.



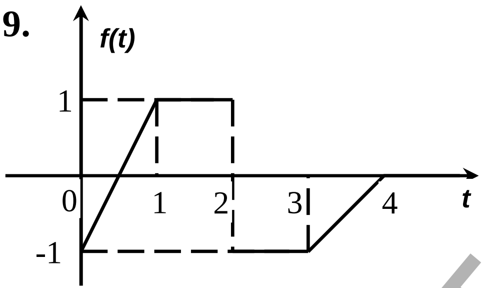
7.



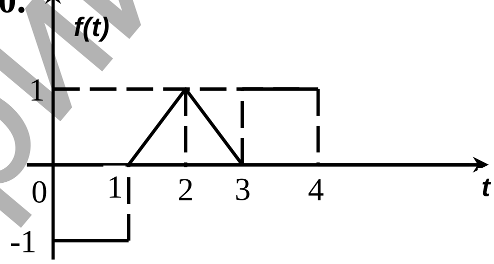
8.



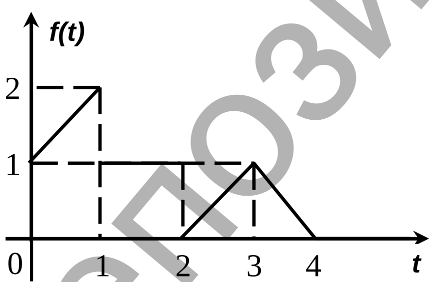
9.



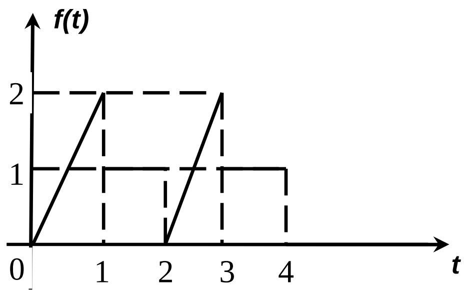
10.



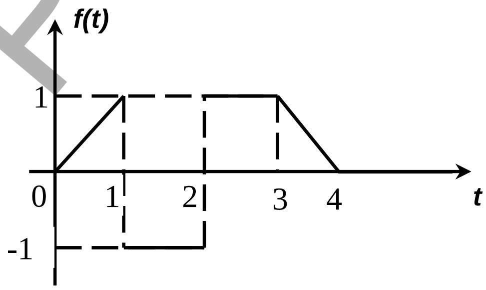
11.



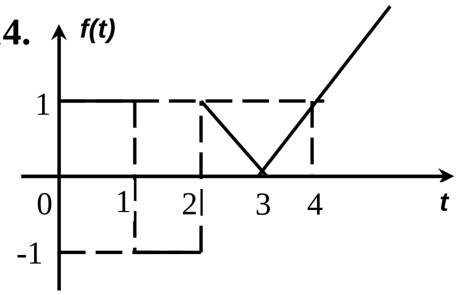
12.



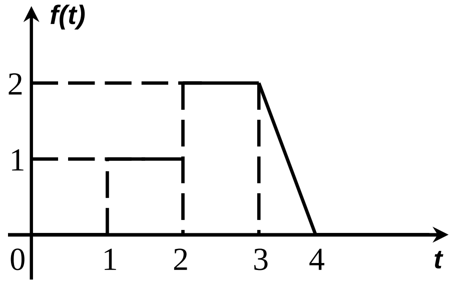
13



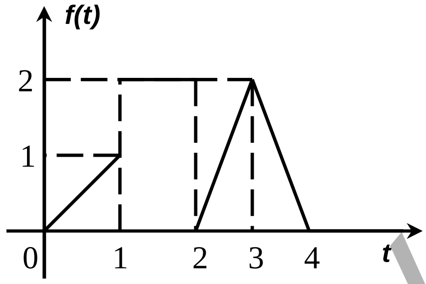
14.



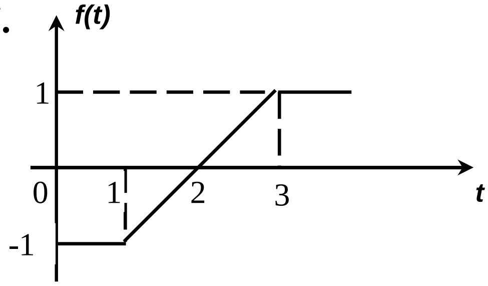
15.



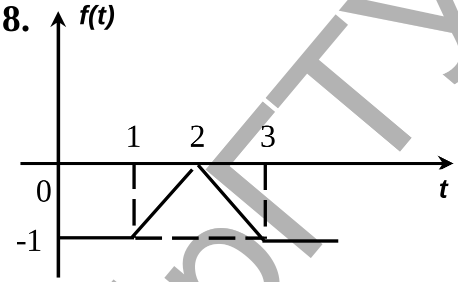
16.



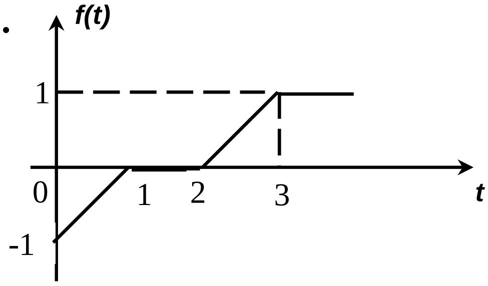
17.



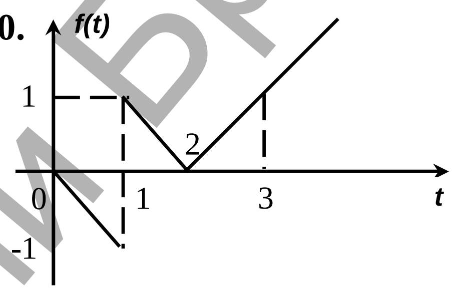
18.



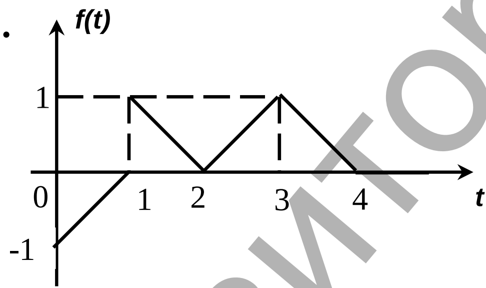
19.



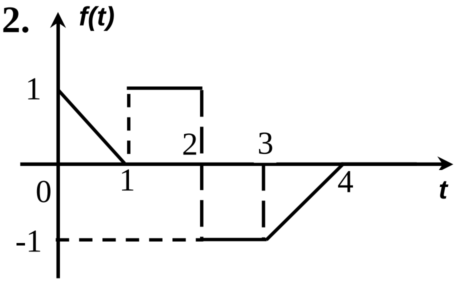
20.



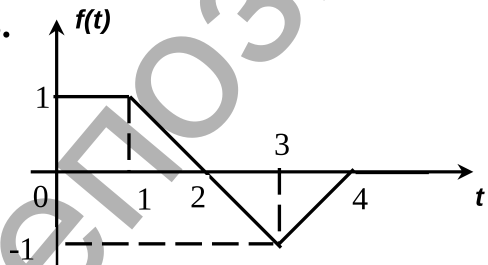
21.



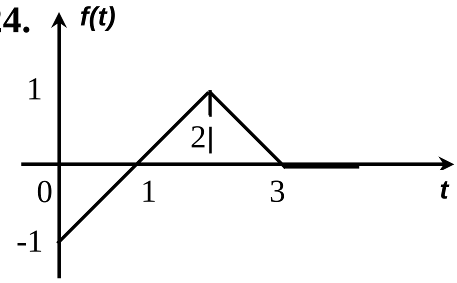
22.



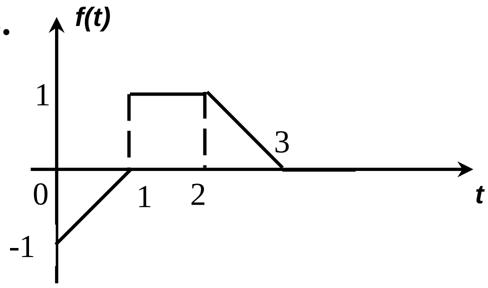
23.



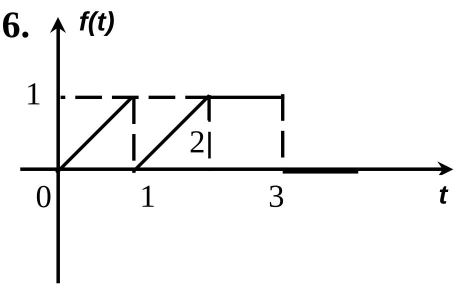
24.

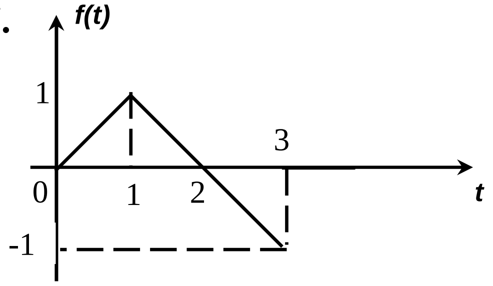


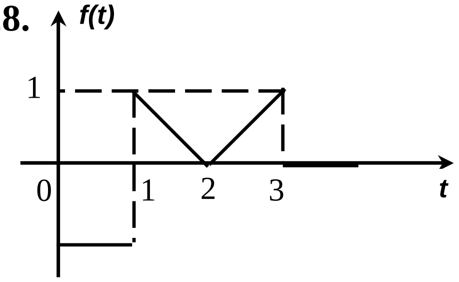
25.

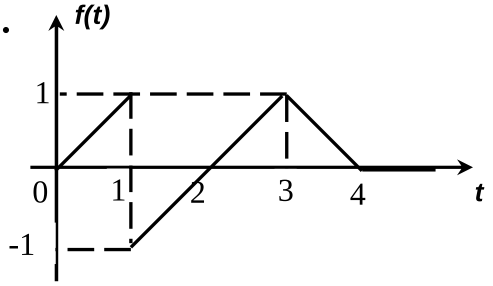


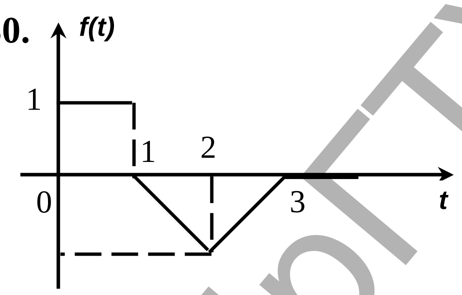
26.



27.


28.


29.


30.


Задание 7. Операционным методом решить задачу Коши.

7.1. $y'' + y' + y = 7e^{2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

7.2. $y'' + y' - 2y = -2(t+1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

7.3. $y'' + 4y' + 29y = e^{-2t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

7.4. $2y'' + 5y' = 29\cos t$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

7.5. $y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t}\cos 3t$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 1$.

7.6. $y'' + y' - 2y = e^{-t}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

7.7. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{t}\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

7.8. $y'' + y' + y = t^2 + t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$.

7.9. $y'' + 4y = \sin 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

7.10. $y'' - 9y = \sin t - \cos t$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 2$.

7.11. $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.

7.12. $y'' + 3y' - 10y = 47\cos 3t - \sin 3t$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.

7.13. $y'' - 2y' = e^t\left(t^2 + t - 3\right)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

7.14. $y'' + 4y = 8\sin 2t$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.

7.15. $y'' + y = \operatorname{sh} t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

7.16. $y'' + y' - 2y = e^t$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

7.17. $y'' + y = 6e^{-t}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.

7.18. $y'' - y' = t^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

7.19. $y'' + y' = t^2 + 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.

7.20. $y'' - y' = \cos 3t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

7.21. $y'' + 2y' = 2 + e^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

7.22. $y'' + y' = \cos 2t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

7.23. $y'' + 2y' = \sin\left(\dfrac{t}{2}\right)$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 4$.

7.24. $y'' - 3y' + 2y = e^t$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

7.25. $y'' + 3y' + y = 3e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

7.26. $y'' - 2y' - 3y = 2t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

7.27. $y'' - y' - 6y = 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

7.28. $y'' + 4y = 4e^{2t} + 4t^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

7.29. $y'' + 4y' + 4y = t^3e^{2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

7.30. $y'' + 4y = 3\sin t + 10\cos 3t$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 3$.

Задание 8. Операционным методом решить систему линейных дифференциальных уравнений.

8.01. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 1, \\ \dot{y} = x + y, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 2. \end{cases}$,

8.02. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 1, \\ \dot{y} = 4x - y, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

8.03. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x - y + 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = -1, \\ y(0) = 2. \end{cases}$

8.04. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = 2x - y + 9, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

8.05. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

8.06. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 1, \\ \dot{y} = x + 2y + 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$

8.07. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -5x - 3y + 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

8.08. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3y, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$

8.09. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 6y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

8.10. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 1, \\ \dot{y} = 4x - 2y, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = -1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

8.11. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y + 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 5. \end{cases}$

8.12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y, \\ \dot{y} = -4x, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 3, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

8.13. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 1, \\ \dot{y} = -\dfrac{3}{2}x + y, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

8.14. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y + 2, \\ \dot{y} = 3x + y + 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$

8.15. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = \dfrac{5}{2}x - y + 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

8.16. $\begin{cases} \dot{x} = 2y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = -1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

8.17. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y + 1, \\ \dot{y} = 3x + 4y, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

8.18. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + 2, \\ \dot{y} = 4y + 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

8.19. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 4x + y + 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

8.20. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 1, \\ \dot{y} = -3x, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

8.21. $\begin{cases} \dot{x} = 3y + 2, \\ \dot{y} = x + 2y, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = -1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

8.22. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y, \\ \dot{y} = x + 4y + 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

8.23. $\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = 2x + 3y + 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

8.24. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + 2, \\ \dot{y} = 3x, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

8.25. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3, \\ \dot{y} = x + 2y, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = -1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

8.26. $\begin{cases} \dot{x} = y + 3, \\ \dot{y} = x + 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

8.27. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 3, \\ \dot{y} = x - y + 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

8.28. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x + y + 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

8.29. $\begin{cases} \dot{x} = 3y, \\ \dot{y} = 3x + 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

8.30. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = x - y, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Исследовать сходимость числовых рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^5}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(n+1)^2}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+3)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+2}$.

Решение

а) Для исследования числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^5}}$ на сходимость используем признак сравнения. Сравним его со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ $\left(\alpha=\frac{3}{2}>1\right)$.

Составляем предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, где $a_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ и $b_n=\frac{n+1}{\sqrt{n^5}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}:\frac{n+1}{\sqrt{n^5}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{n^5}}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

Так как предел конечен и не равен нулю, то оба ряда ведут себя одинаково. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^5}}$ сходится.

б) Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(n+1)^2}{2^n}$ по признаку Д’Аламбера.

Запишем a_n и a_{n+1} члены ряда

$$a_n=\frac{n\cdot(n+1)^2}{2^n}\text{ и }a_{n+1}=\frac{(n+1)\cdot(n+2)^2}{2^{n+1}}.$$

Составляем предел $k=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$k=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)\cdot(n+2)^2}{2^{n+1}}:\frac{n\cdot(n+1)^2}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)\cdot(n+2)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n\cdot(n+1)^2}\right)=$$