АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

УДК 519.6+517.983.54

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ ЯВНОГО ТИПА В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

Альциванович Л.М.
УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест

В действительном гильбертовом пространстве *H* решается уравнение первого рода

$$Ax = y\,, \tag{1}$$

где A – ограниченный положительный самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением. Однако нуль принадлежит спектру оператора A и, следовательно, задача некорректна.

Исследуем сходимость к решению уравнения (1) методов

$$x_{n+1} = \left(E - \alpha A^2\right)x_n + \alpha A y\,, \quad x_0 = 0\,, \tag{2}$$

$$x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^2\right)x_{n,\delta} + \alpha A y_\delta\,, \quad x_{0,\delta} = 0 \tag{3}$$

в энергетической норме $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$. Покажем, что использование энергетической нормы позволяет получить оценки без предположения истокопредставимости точного решения уравнения (1), т. е. что $x = A^s z$, $s > 0$. Получим оценки погрешности для метода (3) в энергетической норме. Справедлива

Теорема 1. *При условии*

$$0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|^2}\,, \tag{4}$$

итерационный процесс (3) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если выбирать число итераций* $n(\delta)$ *из условий* $n^{\frac{1}{4}}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0.$

Доказательство.

Нетрудно показать, что $x - x_n = A^{-1}\left(E - \alpha A^2\right)^n y = \left(E - \alpha A^2\right)^n x$. Воспользовавшись определением энергетической нормы $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$ и интегральным представлением самосопряжённого оператора, запишем

$\|x - x_n\|_A^2 = \left(A\left(E - \alpha A^2\right)^n x, \left(E - \alpha A^2\right)^n x\right) = \int\limits_0^{\|A\|} \lambda\left(1 - \alpha\lambda^2\right)^{2n} d(E_\lambda x, x)$. Для положительной подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda\left(1 - \alpha\lambda^2\right)^{2n}$ при условии (4) справедлива оценка $\max\limits_{\lambda \in [0, M]} |f(\lambda)| \le (4n\alpha e)^{-1/2}$. Следовательно, $\|x - x_n\|_A \le (4n\alpha e)^{-1/4}\|x\|$.

Отсюда получим $\|x-x_n\|_A \to 0, \quad n\to\infty$. Оценим $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A$.

Имеем $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int\limits_0^{\|A\|} \lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right]^2 d\left(E_\lambda(y-y_\delta), y-y_\delta\right)$. Оценим сверху подынтегральную функцию $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right]^2 \ge 0$ при условии (4).

Имеем $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right]\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right]$.

Так как $\lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right] \le \left(\frac{5}{4}\right)^{1/2} 2(n\alpha)^{1/2}$ при $n\ge 1$, $\lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right] \le 2(n\alpha)^{1/2}$ при $n\ge 2$ и $\left|1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right| \le 2$, то $g_n(\lambda)\le \left(\frac{5}{4}\right)^{1/2} 4(n\alpha)^{1/2}$ при $n\ge 1$, $g_n(\lambda)\le 4(n\alpha)^{1/2}$ при $n\ge 2$. Следовательно, при условии (4) $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{4}} 2n^{\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{4}}\delta, \quad n\ge 1$, $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le 2n^{\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{4}}\delta$, $n\ge 2$.

Поскольку $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le \|x-x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le \|x-x_n\|_A + 2n^{\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{4}}\delta, \quad n\ge 2$ и $\|x-x_n\|_A \to 0$, $n\to\infty$, то для сходимости $\|x-x_{n,\delta}\|_A \to 0$, $n\to\infty$, достаточно, чтобы $n^{\frac{1}{4}}\delta\to 0$, $n\to\infty$, $\delta\to 0$. Таким образом, если в процессе (3) выбрать число итераций $n=n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{\frac{1}{4}}\delta\to 0$, $n\to\infty$, $\delta\to 0$, то получим регуляризованный метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме. Теорема 1 доказана.

Запишем общую оценку погрешности метода (3) в энергетической норме

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A \le \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{4}} 2n^{\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{4}}\delta + (4n\alpha e)^{-\frac{1}{4}}\|x\|, \quad n\ge 1, \tag{5}$$

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A \le 2n^{\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{4}}\delta + (4n\alpha e)^{-\frac{1}{4}}\|x\|, \quad n\ge 2. \tag{6}$$

Полученные результаты объединим в теорему

Теорема 2. *Для итерационного процесса* (3) *при условии* (4) *справедливы оценки погрешности* (5) *и* (6).

Оптимизируем по n полученную оценку (6). Приравняв к нулю производную по n от правой части неравенства (6), имеем

$$n_{\text{îïò}} = 2^{-3}\alpha^{-1}e^{-\frac{1}{2}}\|x\|^2\delta^{-2}. \tag{7}$$

Подставим $n_{\text{îïò}}$ в оценку (6), получим оптимальную оценку погрешности

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A^{\text{îïò}} \le 2^{\frac{5}{4}} e^{-\frac{1}{8}} \delta^{\frac{1}{2}} \|x\|^{\frac{1}{2}}, \; n \ge 2. \tag{8}$$

Итак, доказана

Теорема 3. *В условиях предыдущей теоремы оптимальная оценка погрешности в энергетической норме для метода* (3) *имеет вид* (8) *и получается при* $n_{\text{îïò}}$ *из* (7).

Таким образом, энергетическая норма как бы заменяет истокопредставимость точного решения уравнения (1) степени $s = \frac{1}{2}$. Её использование позволило получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова без дополнительного требования на гладкость точного решения – его истокообразную представимость. Следовательно, энергетическая норма позволяет сделать итерационный процесс (3) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения.

Важен вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H. Эти условия дает

Теорема 4. *Если выполнены условия* 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, 2) $E_\varepsilon x = 0$, *где* $E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda$, ε – *фиксированное положительное число* ($0 < \varepsilon < \|A\|$), *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к* x *в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.*

УДК 517.948

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОДНОШАГОВЫХ И МНОГОШАГОВЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Артюшеня А.А.

УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест

Для решения нелинейной системы

$$f(x) = 0, f(D \in R^n \to R^n), f \in C_D^{(2)} \tag{1}$$

применяются одношаговые, двухшаговые и трехшаговые методы.

В данной работе для решения модельной системы вида [2]:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = n+1, \\ x_1 + 2x_2 + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = n+1, \\ x_1 + x_2 + \ldots + 2x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = n+1, \\ x_1 x_2 \ldots x_{n-2} x_{n-1} x_n = 1, \\ \sin^2 x_1 + \cos^3 x_n = \sin^2 1 + \cos^3 1 \end{cases} \tag{2}$$

применялись одношаговые, двухшаговые и трехшаговые методы.