# УДК 531.2+624.04 **Холодарь Б.Г.**

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ФЕРМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИАГРАММЫ МАКСВЕЛЛА-КРЕМОНЫ

Диаграмма Максвелла-Кремоны (ДМК) является удобным и наглядным способом определения усилий в стержнях плоской статически-определимой фермы при заданном нагружении. Построение фактически не зависит от сложности нагружения узлов фермы, так как после построения многоугольника внешних (активных и реактивных) сил определение внутренних сил сводится к присоединению к фигуре двух или одного отрезков, соответствующих вновь определяемым усилиям в стержнях, примыкающих к очередному вырезаемому узлу.

Процедуру построения диаграммы, использующую поименованные поля [1], можно упростить, проставляя номера стержней с индексами "р" или "с" (растянут-сжат) на соответствующих отрезках прямых, представляющих усилия в стержнях. В этом случае именование полей перестает быть необходимым для построения и чтения диаграммы.

Построение силового многоугольника внешних сил производится при соблюдении предварительно выбранного направления обхода контура фермы. В том же направлении обходятся силы, сходящиеся в очередном вырезаемом узле в соответствии с процедурой метода вырезания узлов. При этом неизвестные еще усилия ставятся последними в списке усилий, приложенных к данному узлу. Удобно при этом дать номера стержням в порядке очередности обращения к ним при построении диаграммы, т.е. номера стержней на схеме фермы будут соответствовать последовательности определения усилий при построении диаграммы.

В соответствии с этими правилами разработана программа на языке Фортран, которая позволяет строить диаграмму в автоматическом режиме по исходным массивам узловых точек и нагрузок без предварительного расчета усилий с помощью уравнений равновесия. На рис.1 для примера показана ферма и несколько ДМК (при  $P_x=0$ ). Узлам фермы соответствуют замкнутые поля диаграммы, и наоборот, замкнутым внутренним полям фермы соответствуют узлы на диаграмме. Автоматизация построения позволяет легко следить за трансформацией диаграммы при изменении некоторых исходных данных. Из рисунка видно, например, как изменяются усилия в стержнях при изменении угла установки стержневой опоры.





Построение диаграммы носит чисто геометрический характер. Изменение размеров сторон замкнутых полей диаграммы, соответствующих ненагруженным узлам, при варьировании угла установки опоры происходит при сохранении подобия полей, поскольку их форма определяется углами наклона стержней в ферме. Поэтому можно, построив диаграмму для одного положения опоры, перейти к ее перестроению, смещая точку пересечения реакций в силовом треугольнике (многоугольнике) внешних сил. Траекторией этой ведущей точки является прямая, параллельная оси AB, проведенной через узлы крепления фермы к опорам, и делящая равнодействующую активной нагрузки на отрезки *R*<sub>A</sub> и *R*<sub>B</sub> для случая, когда реакции ей параллельны (на рис. 1 траектория показана пунктиром). При совпадении угла установки подвижной опоры с осью AB реакции становятся равными бесконечности, что говорит о невозможности уравновешивания силы *P*, какой бы малой при этом она ни была, т.е. направление AB является недопустимым углом установки стержневой опоры.

Построение диаграммы Максвелла-Кремоны используют, в частности, при решении задачи об определении перемещений узлов фермы с применением принципа Кастильяно. В соответствии с этим принципом перемещение *и* точки приложения силы *P* вдоль линии дей-

ствия этой силы равно  $u = \frac{\partial \Pi}{\partial P}$ , где  $\Pi$  – потенциальная энергия деформаций линейно-упругой системы. В данном случае  $\Pi = \sum_{i} \Pi_{i} = \frac{1}{2E} \sum_{i} \frac{L_{i}}{A_{i}} (\sum_{j} \alpha_{ij} P_{j})^{2}$ , где  $L_{i}$  и  $A_{i}$  – соответственно длина и площадь поперечного сечения  $\dot{F}$ го стержня,  $\alpha_{ij}$  – усилие в

стержне с индексом *i* от единичной силы с индексом *j*, *E* – модуль упругости материала стержней (предполагается одинаковым). Для узла с приложенной в нем силой *P<sub>k</sub>* результат дается выражением

$$U_{k} = \frac{1}{E} \sum_{i} \frac{L_{i}}{A_{i}} (\sum_{j} \alpha_{ij} P_{j}) \alpha_{ik} .$$
 (1)

Коэффициенты α<sub>*ij*</sub> зависят от геометрии фермы, устройства связей и приложенной активной нагрузки.

Разложив векторы сил на компоненты

 $\overline{P}_m = P_m \cdot (\cos \varphi_m \overline{i} + \sin \varphi_m \overline{j}),$ 

где сомножители COS  $\phi_m$  и Sin  $\phi_m$  будут соответствовать нагрузкам вдоль осей координат от единичной силы, приложенной в узле *m* под углом  $\phi_m$ , получим выражения для перемещения *k*-го узла вдоль осей X и Y при действии приложенных сил в виде

$$U_{kx} = \frac{1}{E} \sum_{j} P_{j} \sum_{i} (\alpha_{ijx} \cos \varphi_{j} + \alpha_{ijy} \sin \varphi_{j}) \alpha_{ikx} \cos \varphi_{k} \frac{L_{i}}{A_{i}};$$
  

$$U_{ky} = \frac{1}{E} \sum_{j} P_{j} \sum_{i} (\alpha_{ijx} \cos \varphi_{j} + \alpha_{ijy} \sin \varphi_{j}) \alpha_{iky} \sin \varphi_{k} \frac{L_{i}}{A_{i}}.$$
(2)

Дополнительные индексы "х" и "у" у коэффициентов  $lpha_{ii}$  в (2)

соответствуют силам в узлах, направленным вдоль осей X или Y. Выражения (2) позволяют построить перемещения всех узловых точек от действия силы, приложенной в любом узле. Выражение (1) можно записать как

$$U_{k}=\frac{1}{E}\sum_{j}P_{j}\beta_{jk},$$

где  $\beta_{jk} = \sum_{i} \alpha_{ij} \alpha_{ik} \frac{L_i}{A_i}$  является коэффициентом влияния *j*-й силы

на перемещение точки приложения силы Р<sub>к</sub> в ее направлении.

Холодарь Борис Григорьевич, доцент кафедры сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Строительство и архитектура

#### Вестник Брестского государственного технического университета. 2016. №1

Представление в виде спектра на экране ЭВМ величин усилий

 $S_i$  в стержнях и слагаемых  $\omega_{ijk} = \alpha_{ij} \alpha_{ik} \frac{L_i}{A_i}$ , характеризующих

вклад каждого стержня в полное перемещение точки приложения силы, позволяет конструктору принять эффективное решение о необходимости изменения геометрических параметров элементов конструкции или условий ее крепления. В качестве примера на рис. 2 приведены такие спектры для рассматриваемой фермы при угле  $\alpha = 30^{\circ}$ . Видно, что наиболее сильно податливость рассматриваемой системы зависит от стержня с номером 3.



**Рис. 2.** Спектр усилий  $S_i$  (а) и спектр влияния  $\omega_{ijk}$  (б). Номера стержней 1–9 слева направо

Учитывая, что нагрузки в стержнях фермы ограничиваются условиями прочности и устойчивости, можем, используя такие спектры, сразу обнаружить и исключить недопустимые условия нагружения конструкции и тем самым понизить ее материалоемкость.

В определенных случаях конструкция может выйти за рамки линейно-упругой работы, и поэтому представляет интерес расчет перемещений при напряжениях в стержнях, превышающих предел пропорциональности.

Достаточно общую форму зависимости напряжений от деформаций σ(ε) можно описать с использованием степенной или экспоненциальной функции на участке упрочнения:

$$\sigma = E\varepsilon \qquad \varepsilon \leq \varepsilon_{\tau}$$
  
$$\sigma = \sigma_{\tau} + \sigma_{y} \left(1 - \frac{(\varepsilon_{B} - \varepsilon)^{n}}{(\varepsilon_{B} - \varepsilon_{\tau})^{n}}\right) \qquad \varepsilon_{\tau} < \varepsilon < \varepsilon_{B}$$

или

 $\sigma = \sigma_{\tau} + \sigma_{y} (1 - \exp(-\gamma(\varepsilon - \varepsilon_{\tau})))$   $\varepsilon_{\tau} < \varepsilon < \varepsilon_{B}$ , (3) где принято, что пределы текучести и пропорциональности материала совпадают, и обозначено: E – модуль упругости,  $\sigma_{B}$  и  $\sigma_{\tau}$  – пределы прочности и текучести материалов,  $\sigma_{y} = \sigma_{B} - \sigma_{\tau}$  – перепад напряжений на участке упрочнения,  $\varepsilon_{B}$  и  $\varepsilon_{\tau}$  – деформации, соответствующие  $\sigma_{B}$  и  $\sigma_{\tau}$  материалов, n и  $\gamma$  – параметры, подбираемые для описания диаграммы деформирования конкретного материала. В зависимости от выбранных параметров функции (3) представляют диаграммы от идеально-пластических до билинейных (с линейным упрочнением). Несколько таких диаграмм приведено на рис. 3.



 $\gamma$ =5000.0 (принято  $\sigma_B / \sigma_T$  =4/3)

Рис. 3. Диаграммы деформирования (в относительной форме)

Здесь и далее деформации рассматриваются как линейные, однако аппроксимацию диаграмм с помощью зависимостей (3) можно провести и для других определений деформаций (например, натуральных) после соответствующей обработки экспериментальных данных.

Так как при выходе материала за предел текучести статическая определимость системы сохраняется, построение диаграммы Максвелла-Кремоны позволяет и в этом случае найти усилия в стержнях, в том числе и для деформированной схемы.

Выражения для перемещений узловых точек фермы для нелинейно-упругого или склерономного упруго-пластического материала можно получить с использованием представлений о дополнительной

работе материала 
$$w = \int_{0}^{\sigma} \varepsilon d\sigma$$
 в объеме конструкции  $W_{p} = \int_{V} w dV$   
[2]. В этом случае перемещение точки приложения силы в ее направлении может быть определено по формуле  $u = \frac{\partial W_{p}}{\partial R}$ .

Для *і*-го стержня, материал которого находится в пределах пропорциональности, имеем  $dW_i = \frac{\sigma_i}{E} d\sigma_i L_i A_i$ , а при выходе на

нелинейный участок 
$$dW_{i} = \left(\varepsilon_{B} - (\varepsilon_{B} - \varepsilon_{T}) \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{B} - \sigma_{i}}{\sigma_{y}}}\right) d\sigma_{i}L_{i}A_{i}$$
 либо

 $dW = \left(\varepsilon_{\tau} - \frac{1}{\gamma} ln \frac{\sigma_{B} - \sigma_{i}}{\sigma_{y}}\right) d\sigma_{i} \cdot LA$  соответственно с выбором функции (3)

для описания упрочнения материала стержня (записаны для  $\sigma > 0$ ). Приложенные нагрузки удобно представить в виде

$$P_{j=}P_{j0}\cdot\eta T\cdot Q, \qquad (4)$$

где  $P_{j0}$  – исходный уровень силы,  $\eta_{\tau} = \frac{\sigma_{\tau}}{\sigma_{max}}$  – отношение предела

текучести материала к максимальному напряжению, возникшему в ферме при исходном уровне нагружения ( $\sigma_{\max} \leq \sigma_T$ ), безразмерный параметр нагружения принимает значения  $0 < Q \leq 1$  на упругой стадии работы конструкции,  $Q = Q_T = 1$  при  $\sigma = \sigma_T$  и Q > 1 за ее пределами,  $Q_{\max} = Q_B = \sigma_B / \sigma_T$ . При этом сила в стержне запишется как  $S_i = \sum_j \alpha_{ij} P_{j0} \cdot \eta_T Q$ . Использованная форма записи усилий

соответствует случаю пропорционального нагружения конструкции. Приращение дополнительной работы для всей конструкции со-

ставит  $dW_P = q_P dQ$ , где согласно (3) через  $q_p = \frac{dW_P}{dQ}$  обозначе-

ны выражения (записано для σ > 0)

$$q_{P} = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^{l_{T}} \frac{L_{i}}{A_{i}} (\sum_{j} \alpha_{ij} P_{j0})^{2} \eta_{T}^{2} Q +$$
$$+ \sum_{i=l_{T}+1}^{N} L_{i} \left( \epsilon_{B} - (\epsilon_{B} - \epsilon_{T}) \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{B} - \sum_{j} \frac{\alpha_{ij}}{A_{i}} P_{j0} \eta_{T} Q}{\sigma_{Y}}} \right) \sum_{j} \alpha_{ij} P_{j0} \eta_{T}$$

или

$$\begin{split} q_{P} &= \frac{1}{E} \sum_{i=1}^{i_{T}} \frac{L_{i}}{A_{i}} (\sum_{j} \alpha_{ij} P_{j0})^{2} \eta_{T}^{2} Q + \\ &+ \sum_{i=i_{T}+1}^{N} L_{i} \left( \epsilon_{T} - \frac{1}{\gamma} ln \frac{\sigma_{B} - \sum_{j} \frac{\alpha_{ij}}{A_{i}} P_{j0} \eta_{T} Q}{\sigma_{y}} \right) \sum_{j} \alpha_{ij} P_{j0} \eta_{T}. \end{split}$$

Строительство и архитектура



Рис. 4. Спектры усилий в стержнях 1,2,...,13 (слева направо) от заданной нагрузки при углах установки стержневой опоры α =30<sup>0</sup> (а) и α =120<sup>0</sup> (б)

Предел суммирования *i<sub>T</sub>* указывает число стержней, материал которых при заданном уровне нагружения *Q* не вышел за предел упругости, *N* – общее число стержней фермы.

Величина  $q_P$  характеризует скорость совершения дополнительной работы деформирования конструкции при возрастании приложенных к ней нагрузок. Делением  $q_P$  на его значение при выходе материала на уровень предела текучести  $q_T$ , а дополнительной работы  $W_P$  на произведение  $Q_T q_T$ , задача приводится к удобным безразмерным переменным  $q=q_P/q_T$  и Q. Параметры Q и q можно рассматривать как обобщенные (обобщенная сила и обобщенное перемещение), которые характеризуют поведение всей системы при данной конфигурации приложенных активных и реактивных сил.

Учитывая, что 
$$\frac{\partial S_i}{\partial P_k} = \frac{\sum_j \alpha_{ij} P_{j0} \eta_T dQ}{P_{k0} \eta_T dQ} = \alpha_{ik}$$
, определяем

перемещение узла в направлении приложенной силы (здесь, как и выше, записано для  $\sigma > 0$ ):

$$\begin{split} U_{\mathbf{k}} &= dW_{\mathbf{p}} / dP = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^{i_{T}} \frac{L_{i}}{A_{i}} (\sum_{j} \alpha_{ij} P_{j0} \eta_{T} Q) \alpha_{ik} + \\ &+ \sum_{i=i_{T}+1}^{N} L_{i} \left( \epsilon_{B} - (\epsilon_{B} - \epsilon_{T}) \cdot \sqrt{n} \frac{\sigma_{B} - \sum_{j} \frac{\alpha_{ij}}{A_{i}} P_{j0} \eta_{T} Q}{\sigma_{Y}} \right) \alpha_{ik} \\ \\ \mathbf{MIN} \\ U_{k} &= \frac{1}{E} \sum_{i=1}^{i_{T}} \frac{L_{i}}{A_{i}} (\sum_{j} \alpha_{ij} P_{j0} \eta_{T} Q) \alpha_{ik} + \\ &+ \sum_{i=i_{T}+1}^{N} L_{i} \left( \epsilon_{T} - \frac{1}{\gamma} ln \frac{\sigma_{B} - \sum_{j} \frac{\alpha_{ij}}{A_{j}} P_{j0} \eta_{T} Q}{\sigma_{Y}} \right) \alpha_{ik}. \end{split}$$

В качестве примера далее рассматривается поведение фермы, показанной на рис. 4. Исходные величины нагрузок  $P_{0}$  приняты равными:  $P_{2X}$ =10,  $P_{2Y}$ =20,  $P_{3X}$ =15,  $P_{3Y}$ =15,  $P_{5X}$ =20,  $P_{5Y}$ =10 (*KH*),

Строительство и архитектура

площади поперечных сечений стержней  $A_{i}=4\cdot 10^{4}$ м<sup>2</sup>,  $\sigma_{\tau}=300$ ,  $\sigma_{B}=400$ ,  $E=2\cdot 10^{5}$  (*МПа*),  $\varepsilon_{B}=0.125$ , координаты точек A и B –  $x_{A}=1$ ,  $y_{A}=1$ ,  $x_{B}=7$ ,  $y_{B}=2$  (м).

Из приведенных на рис. 4 спектров усилий и соответствующих расчетных данных находим, что в случае "а" текучесть наступит последовательно в стержнях 3, 2, 7, 6, 1, 11, а в случае "б" – в стержнях 11 и 7 (остальные стержни останутся упругими).

Зависимость Q(q) показана на рис. 5 для диаграмм деформирования  $\sigma(\varepsilon)$ , приведеных на рис. 2 (при соответствии индексов материалов). На этом же рисунке также в безразмерной форме  $u = \frac{u_p}{u_r}$  приведено смещение точки приложения силы  $P_{5Y}$  в

направлении ее действия. На графике перемещений для билинейного материала момент наступления текучести в очередном (7-м) стержне достаточно хорошо заметен.





#### Вестник Брестского государственного технического университета. 2016. №1

Как видим из рис. 5, графики U(Q) близки по форме графикам q(Q).

В случае, когда компоненты нагрузки возрастают непропорционально, выражения для  $W_P$ ,  $dW_P$  могут быть записаны в форме, аналогичной приведенной выше. Например, если при некотором уровне нагрузки  $Q=Q_0$  происходит догружение системы несколькими силами и они нарастают пропорционально одному параметру  $Q_1$ , то выражения для  $U_k$  с учетом  $P_m=P_{m0}+\Delta P_m$  и определения (4) примут вид:

$$U_{k} = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^{T} \frac{L_{i} \alpha_{ik}}{A} \left[ \sum_{j} \alpha_{ij} P_{j0} \cdot Q_{0} + \sum_{m} \alpha_{im} \Delta P_{m} \cdot Q_{i} \right] \eta_{T} + \frac{1}{E} \sum_{i=i_{T}+1}^{N} L_{i} \alpha_{ik} \left[ \epsilon_{B} - (\epsilon_{B} - \epsilon_{T}) \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{B} - \frac{1}{A} \left[ \sum_{j} \alpha_{ij} P_{j0} \cdot Q_{0} + \sum_{m} \alpha_{im} \Delta P_{m} \cdot Q_{i} \right] \eta_{T}}{\sigma_{Y}} \right]}$$

или

$$U_{k} = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^{i_{T}} \frac{L_{i} \alpha_{ik}}{A_{i}} \left[ \sum_{j} \alpha_{ij} P_{j0} \cdot Q_{0} + \sum_{m} \alpha_{im} \Delta P_{m} \cdot Q_{i} \right] \eta_{T} + \frac{1}{E} \sum_{i=i_{T}+1}^{N} L_{i} \alpha_{ik} \left[ \epsilon_{T} - \frac{1}{\gamma} ln \frac{\sigma_{B} - \frac{1}{A_{i}} \left[ \sum_{j} \alpha_{ij} P_{j0} \cdot Q_{0} + \sum_{m} \alpha_{im} \Delta P_{m} \cdot Q_{i} \right] \eta_{T}}{\sigma_{Y}} \right]$$

Критерием разрушения является достижение в одном из стержней установленной предельной деформации либо потеря устойчивости в каком-либо сжатом стержне.

После перехода материала за предел текучести при увеличении нагрузки перемещения нарастают очень быстро и достигают величин, при которых изменения геометрии фермы должны учитываться при определении действующих усилий в стержнях. Учет этого обстоятельства, как и учет больших деформаций материала, принципиальных осложнений не встречает. Более существенным моментом в проведенных расчетах является тот факт, что деформация стержня принята однородной по длине и локализация течения материала в местах возможного образования "шейки" игнорируется. Характер такого вида течения зависит от формы сечения и для своего описания требует использования дополнительных данных. В связи с этим проведенные расчеты в области неупругого поведения материала конструкции носят оценочный характер.

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: в 2 томах / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб.: Издательство «Лань», 1998. – 736 с.
- Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. – 744 с.

Материал поступил в редакцию 09.04.15

### KHOLODAR B.G. Determination of truss stress-strain state with Cremona-Maxwell diagram

Force spectra are constructed in truss members. Also computed is the spectra characterizing the contribution of each member in compliance of the truss under a given load. The stress- strain relationship is approximated by either of the two considered functions. Determined are the nodal displacements and the power of additional work expended on the deformation of the structure. Calculation formulas are presented for proportional and non-proportional loading cases.

### УДК 531.2+624.0

Холодарь Б.Г.

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ФЕРМЫ ИЗ РЕОНОМНОГО УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Введение. Уравнения типа Максвелла с нелинейной вязкостью позволяют описывать поведение реономных материалов в различных режимах – при ползучести, релаксации, деформировании или нагружении с постоянной скоростью, ударных и переменных нагрузках и др. [1–3]. Уравнения течения могут быть дополнены уравнением развития поврежденности, что позволяет оценивать долговечность материала при заданных воздействиях [4].

Далее рассматривается упругопластический материал, деформация которого включает только мгновенно-обратимую и остаточную компоненты, а запаздывающе-обратимая часть деформации отсутствует.

Поведение фермы под действием силовой и тепловой нагрузки. В соответствии с кинетическими представлениями о процессах течения и развития поврежденности скорости структурных превращений в материале в зависимости от температуры и внешних силовых воздействий, выраженных через макронапряжения в точке тела, в целом подчиняется экспоненциальному закону exp((U<sub>0</sub> - $\alpha \cdot \sigma / k \theta$ ), где  $k, \theta$  – постоянная Больцмана и абсолютная температура, а  $U_0$  и  $\alpha \cdot \sigma$  трактуются как исходный уровень энергии активации и ее снижение при наличии упругих деформаций решетки. Однако результаты обработки экспериментальных данных показывают, что для адекватного описания особенностей поведения реальных микронеоднородных материалов структурные параметры U<sub>0</sub> и α следует принимать зависящими от вида напряженного состояния и температуры, что связано со сложным характером процессов перестройки структуры, сопутствующей нагружению [2-4]. Наличие участка упрочнения материала на диаграмме растяжения (ДР) требует введения зависимости энергии активации от достигнутой деформации.

Уравнение течения для случая одноосного нагружения имеет вид

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{Edt} + \frac{\sigma}{\eta}, \quad \eta = 3GT, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$ ,  $\sigma$ , E, G –деформация, напряжение, модули упругости первого и второго рода;  $\eta$  – вязкость материала,  $T = T_O \cdot exp(U/k\theta)$  – время релаксации процессов формоизменения структурных элементов среды; U – энергия активации,  $T_O$  – временная константа, с использованием которой определяется начальный уровень энергии активации  $U_0$ . Далее аргумент  $U/k\theta$  представлен как  $U_0 - \alpha \cdot \sigma + F(\varepsilon, \sigma)$ , а для функции  $F(\varepsilon, \sigma)$ , служащей для описания формы достигаемого упрочнения на разных скоростях и температурах, использована зависимость

$$F(\varepsilon,\sigma) = \beta(1 - (1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon_{\Pi T}}{\varepsilon_{B}})^{m})\sigma, \quad \varepsilon > \varepsilon_{\Pi T}$$

Структурные параметры  $U_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  зависят от температуры и определены с учетом данных таблицы 1, а m=4 – константа, отражающая форму участка упрочнения. Использовано также условие, что на диаграмме растяжения производная  $d\sigma/d\varepsilon = E/2$  при  $\sigma = 0.75 \sigma_{\tau}$ , что соответствует методике определения предела пропорциональности материала.