УДК 517.977

НОРМАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Будько Д.А.
УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест

1 Введение. Хорошо известно, что анализ систем нелинейных дифференциальных уравнений начинают с исследования соответствующей линеаризованной системы уравнений. Рассмотрим автономную систему линейных гамильтоновых уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = J\,H\,x, \tag{1}$$

где $x = (x_1, ..., x_n, Px_1, ..., Px_n)$, x_k, Px_k – канонически сопряжённые координаты и импульсы. Матрица H является вещественной, порядка $2n$. Через J обозначена матрица $\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$, где E_n единичная матрица порядка n.

Известно [1], что если функция Гамильтона H является знакоопределённой, то на основании теорем Ляпунова об устойчивости [1], вопрос об устойчивости будет решён в строгой нелинейной постановке. Таким образом, не требуется анализировать члены более высоких порядков в нелинейных уравнениях возмущённого движения, а знакоопределённость функции можно определить после приведения её к нормальной форме. Рассмотрим один из алгоритмов нормализации системы, предложенный в [2]. Хотя идея алгоритма достаточно проста, при реализации возникает немало трудностей и нюансов, которым и посвящена данная работа. Приведена реализация алгоритма нормализации системы линейных гамильтоновых уравнений в случае $n = 2$ в кодах системы компьютерной алгебры *Mathematica* [3].

В качестве примера рассмотрим функцию Гамильтона, которая описывает следующую модель космической динамики. Три тела движутся по круговым орбитам вокруг общего центра масс системы, образуя правильный треугольник в любой момент времени. Четвёртое тело, пренебрежимо малой массы, движется в гравитационном поле, генерируемое тремя массивными телами, оставаясь в их орбитальной плоскости. Такая задача известна под названием плоской ограниченной задачи четырёх тел, сформулированной на основе треугольных решений Лагранжа [4] и обладает двумя степенями свободы $(n = 2)$. При разложении функции Гамильтона в ряд Тейлора в окрестности равновесного решения первым (линейным) приближением будет квадратичная часть H_2 функции Гамильтона:

$$H_2 = \frac{Px_1^2 + Px_2^2}{2} - Px_2\,x_1 + Px_1\,x_2 + h_{11}\,x_1^2 + h_{12}\,x_1\,x_2 + h_{22}\,x_2^2 \tag{2}$$

где коэффициенты h_{11}, h_{12}, h_{22} являются константами при фиксированных значениях параметров модели. Функции (2) соответствует матрица H линейной системы уравнений (1):

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2h_{11} & -h_{12} & 0 & 1 \\ -h_{12} & -2h_{22} & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

2 Приведение линейной системы к нормальной форме. Предположим, что характеристические показатели системы являются чисто мнимыми числами, и для матрицы (3) они равны

$$\lambda = \pm i\,\sigma_{1,2}\,,\ \sigma_{1,2} = \sqrt{1 + h_{11} + h_{22} \pm \sqrt{4h_{11} + h_{11}^2 + h_{12}^2 + 4h_{22} - 2h_{11}\,h_{22} + h_{22}^2}} \qquad (4)$$

Как известно, нормальной формой системы уравнений (1) является такая система, которой соответствует функция Гамильтона, равная алгебраической сумме n линейных, не связанных между собой осцилляторов. Следовательно, нормальная форма системы уравнений (1) запишется в виде:

$$\frac{dy}{dt} = J\,\hat{I}\ y\,, \qquad (5)$$

где $\hat{H}$ – вещественная, диагональная матрица, элементы которой $\hat{h}_{kk} = \hat{h}_{k+n,k+n} = \sigma_k$. Переход от старых переменных x к новым y определим с помощью матрицы A в виде равенства

$$x = A\,y\,,\quad y = (\,p_1,...,\,p_n\,,q_1,...,q_n) \qquad (6)$$

Согласно предложенному алгоритму, k-столбцом матрицы преобразования A являются вектор $-2s_k$, а $(k+n)$-столбцом – вектор $2r_k$. При этом r_k и s_k являются вещественной и мнимой частями k-го собственного вектора матрицы $J\,H$. Так как собственные вектора определяются с точностью до константы c_k, то в алгоритме предусмотрено условие выбора этих констант, при котором преобразование сохранялось бы вещественным:

$$4(r_k\,,\ J\,s_k) = 1, \quad k = 1,\ 2,...,n. \qquad (7)$$

Приведём программу для нахождения матрицы преобразования A при $n = 2$, написанную в кодах системы *Mathematica*:

$$rul\sigma = \{\sigma_1,\sigma_2\} \to (Eigenvalues[J.H][[2,4\}]])/i//Thread//Simplify\});$$

$$X = \{x_1,x_2,x_3,x_4\};$$

$$eqEigen = J.H.X == \lambda\,X//Thread;$$

$$solEigen = Solve[eqEigen[[\{1,2,3\}]],X[[\{2,3,4\}]]][[1]]//Simplify;$$

$$vectors = c_k\,X\,/.solEigen/.x_1 \to 1/.\lambda \to i\,\sigma_k;$$

$$s_{t\_}:= ComplexExpand[\ Im[vectors/.k \to t]]//Simplify;$$

$$r_{t\_}:= ComplexExpand[\ Re[vectors/.k \to t]]//Simplify;$$

$$rulc_{k\_}:=\{c_k \to \sqrt{Solve[(4r_k.(J.s_k)==1)/.c_k^2 \to t,t][[1,1,2]]}\}/.\sigma_2 \to -\sigma_2//$$
$$Simplify//Flatten;$$

$$A = Transpose[\{\,-2s_1,-2s_2,2r_1,2r_2\}]/.rulc_1/.rulc_2/.\sigma_2 \to -\sigma_2\,/\,.rul\sigma$$

С помощью встроенной функции $Eigenvalues$ находим собственные значения матрицы $J\,H$, выбираем σ_k положительными. Далее находим собственные вектора матрицы $J\,H$ из уравнения $eqEigen$. Выделяем вещественную и мнимую части собственного вектора в переменные r_t и s_t. Потом записываем в правило $rulc_k$ найденные константы c_k из условия нормировки (7) и в итоге записываем матрицу нормализующего преобразования A.

Часто при анализе гамильтоновых систем оказывается, что при выборе всех $\sigma_k > 0$ хотя бы одно из чисел c_k^2 является отрицательным, что противоречит вещественности преобразования (6). Однако можно заметить, что знак c_k^2 прямо пропорционально зависит от знака σ_k, поэтому если изменить собственное значение $i\sigma_k$ на $-i\sigma_k$, то c_k^2 будет положителен. Естественно, надо выбирать и собственный вектор, соответствующий собственному числу $-i\sigma_k$.

В нашем случае следует выбирать собственное значение $-i\sigma_2$ и соответствующий собственный вектор, тогда c_2^2 будет положительным. Поэтому в правиле $rulc_k$ и матрице A мы заменяем $\sigma_2 \to -\sigma_2$. В результате получаем матрицу нормализующего преобразования переменных A, которая является невырожденной, вещественной и симплектичной.

Функция Гамильтона, соответствующая нормальной форме линейной системы уравнений (1), при $n = 2$ принимает вид

$$H_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1(p_1^2 + q_1^2) - \sigma_2(p_2^2 + q_2^2)). \tag{8}$$

Матрица A для функции Гамильтона (2) принимает вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2c_1 & 2c_2 \\ -2\sigma_1 u_1 & 2\sigma_2 u_2 & h_{12}u_1 & h_{12}u_2 \\ -f_1 & f_2 & -h_{12}u_1 & -h_{12}u_2 \\ -h_{12}\sigma_1 u_1 & h_{12}\sigma_2 u_2 & g_1 & g_2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Коэффициенты u_k, f_k, g_k, d_k в матрице (9) определены формулами:

$$u_k = \frac{2c_k(1 - 2h_{11} + \sigma_k^2)}{d_k},\quad f_k = \frac{2c_k\sigma_k(-2 + 4h_{11} + h_{12}^2 + 2\sigma_k^2)}{d_k},$$

$$g_k = \frac{2c_k(h_{12}^2 + (2 + 4h_{11})\sigma_k^2 - 2\sigma_k^4)}{d_k},\quad d_k = h_{12}^2 + 4\sigma_k^2.$$

Заключение. В данной работе приведена практическая реализация алгоритма для нахождения нормальной формы системы линейных гамильтоновых уравнений. В качестве примера рассмотрена нормализация квадратичной части функции Гамильтона (2). Данной функцией Гамильтона описывается плоская ограниченная задача четырёх тел, сформулированная на основе треугольных решений Лагранжа. Построена матрица преобразования (9) для функции (2), которая приводит её к нормальной форме (8).

Легко видеть, что (8) не является знакоопределенной функцией, поэтому вопрос об устойчивости по Ляпунову не может быть решён в первом приближении. Поэтому в данном случае для исследования устойчивости решений в строгой нелинейной постановке необходимо анализировать члены более высоких порядков в разложении функции Гамильтона.

Все символьные и численные вычисления выполнены с помощью системы компьютерной алгебры *Mathematica*.

Литература

1. Ляпунов, А.М. Общая задача об устойчивости движения / Под ред. Мюнтц Г. – Череповец: Меркурий-Пресс, 2000. – 386 с.
2. Маркеев, А.П. Точки либрации небесной механике и космодинамике / А. П. Маркеев – М.: Наука, 1978. – 312 с.
3. Прокопеня, А.Н. Применение системы Mathematica к решению обыкновенных дифференциальных уравнений / А.Н. Прокопеня, А.В. Чичурин. – Минск: БГУ, 1999. – 265 с.
4. Budzko, D.A. Linear stability analysis of equilibrium solutions of restricted planar four-body problem/ D.A. Budzko // Computer Algebra Systems in Teaching and Research: proc. of the 5th International Workshop CASTR'2009, Siedlce, Poland, 28 – 31 Jan., 2009 / University of Podlasie; Eds.: L. Gadomski [and others]. – Siedlce, 2009. – P. 28–36.

УДК 517

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ СИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ТОЧКАХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ИХ ЛИНИЙ РАЗРЫВА

Велесевич А.И., Дацык В.Т.

УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест

В работе рассматриваются сингулярные интегралы

$$f_{m,n}{}^{(x,y)} = \int_b^a \int_c^d f(t,v)\Phi_m(t-x)\Phi_n(v-y)dtdv, \tag{1}$$

у которых ядро Φ_m(t-x)ф(v-y) ограничено. Тогда двойной интеграл существует для любой суммируемой функции двух переменных.

Выделяются классы функций, для которых вычисляется $\lim\limits_{m,n\to\infty} f_{mn}(x,y)$, где *(x,y)* — точка пересечения линий разрыва функции *f(t,v).*

Теорема. Пусть *(x,y)* — точка пересечения линий, разрыва функций *f (t,v),* определяемых монотонными гладкими функциями *v* = μ*(t)* и *y* = ψ*(t),* причем:

$$\begin{gathered} a \le t \le b \\ a < x < b \\ c \le v \le d \\ c < y < L \end{gathered} \tag{2}$$

Если выполнимы условия:

$$\lim_{u,z\to 0} \frac{f\left[L(u,z);b(u,z)\right] + f\left[L(u,-z);b(u,-z)\right] + f\left[L(-u,-z);b(-u,-z)\right] + f\left[L(-u,z);b(-u,z)\right]}{4} = A, \tag{3}$$

где A $\in$ (- ∞,+ ∞).