УДК 551.492

СХОДИМОСТЬ И СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ОДНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Гетман В.А., Гладкий И.И., Ефимик С.В., Махнист Л.П.
УО «Брестский государственный технический университет», г.Брест

Рассмотрим дифференциальное уравнение для описания колебаний речного стока, используемое в стохастической гидрологии [1]:

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2}-\xi\frac{d\theta_1}{d\xi}=-1,\quad \frac{d\theta_1}{d\xi}(\infty)=0,\quad \theta_1(\xi)\big|_{\xi=\xi_*}=0 \tag{1}$$

Уравнение (1) при решении различных прикладных задач, например в [2], интегрировалось численными методами. Приведем решение этого уравнения [3].

Введем обозначение $\frac{d\theta_1}{d\xi}=f(\xi)$. Тогда, учитывая, что $\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2}=\frac{df}{d\xi}$, приходим к линейному дифференциальному уравнению первого порядка $\frac{df}{d\xi}-\xi f=-1$, с начальным условием $f(\xi)\big|_{\xi=\infty}=0$.

Решение последнего уравнения будем отыскивать в виде $f(\xi)=u(\xi)v(\xi)$. Тогда, учитывая, что $f'(\xi)=u'(\xi)v(\xi)+u(\xi)v'(\xi)$, получим уравнение
$u'v+uv'-\xi uv=-1$ или $u'v+u(v'-\xi v)=-1$ (*).

Найдем одно из ненулевых решений уравнения $v'-\xi v=0$. Разделяя переменные в уравнении $\frac{dv}{d\xi}=\xi v$, решением которого, очевидно, является $v=0$, получим $\frac{dv}{v}=\xi d\xi$.

Интегрируя последнее уравнение, имеем $\int\frac{dv}{v}=\int\xi d\xi+C_2$. Откуда $\ln|v|=\frac{\xi^2}{2}+\ln C_1$ или $v=\pm C_1 e^{\frac{\xi^2}{2}}$. Следовательно, $v=Ce^{\frac{\xi^2}{2}}$ – общее решение дифференциального уравнения $v'-\xi v=0$.

Выберем одно из ненулевых решений этого уравнения, например, $v=e^{\frac{\xi^2}{2}}$, при $C=1$. Подставляя его в уравнение (*), имеем $u'e^{\frac{\xi^2}{2}}=-1$ или $u'=-e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Откуда $u=-\int e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi+C$.

Следовательно, $f(\xi)=u(\xi)v(\xi)=(-\int e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi+C)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ или

$f(\xi)=(C-\int\limits_{-\infty}^{\xi}e^{-\frac{t^2}{2}}dt)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ – общее решение дифференциального уравнения

$\frac{df}{d\xi}-\xi f=-1$.

Заметим, что $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1$. Тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}$ и, учитывая начальное условие $f(\xi)\big|_{\xi=\infty} = 0$, имеем $f(\xi) = (\sqrt{2\pi} - \int\limits_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}}dt)e^{\frac{\xi^2}{2}}$.

Действительно, $f(\xi)\big|_{\xi=\infty} = \lim\limits_{\xi\to+\infty}(\sqrt{2\pi} - \int\limits_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}}dt)e^{\frac{\xi^2}{2}} = \lim\limits_{\xi\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2\pi} - \int\limits_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}}dt}{e^{-\frac{\xi^2}{2}}}$

и, учитывая $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}$, получаем, что последний предел имеет неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Тогда, используя правило Лопиталя, имеем

$$f(\xi)\big|_{\xi=\infty} = \lim_{\xi\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2\pi} - \int\limits_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)'}{\left(e^{-\frac{\xi^2}{2}}\right)'} = \lim_{\xi\to+\infty}\frac{0 - e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{e^{-\frac{\xi^2}{2}}\cdot(-\xi)} = \lim_{\xi\to+\infty}\frac{1}{\xi} = 0.$$

Таким образом $f(\xi) = (\sqrt{2\pi} - \int\limits_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}}dt)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ или, учитывая $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,

$$f(\xi) = \left(\sqrt{2\pi} - \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \int\limits_{0}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)e^{\frac{\xi^2}{2}} = \left(\sqrt{2\pi} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_{0}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)e^{\frac{\xi^2}{2}} =$$

$= \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_{0}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ – решение дифференциального уравнения $\frac{df}{d\xi} - \xi f = -1$, удовлетворяющее начальному условию $f(\xi)\big|_{\xi=\infty} = 0$.

Используя разложение функции e^z в ряд Тейлора $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$, имеем

$$e^{\frac{\xi^2}{2}} = 1 + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^4}{2^2 2!} + \frac{\xi^6}{2^3 3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!} \text{ и}$$

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2^2 2!} - \frac{t^6}{2^3 3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!}.$$

Тогда $\int\limits_{0}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \int\limits_{0}^{\xi}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!}\right)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}\Bigg|_0^{\xi} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n \xi^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}$.

Следовательно, решение $f(\xi)=\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ можно представить в виде

$$f(\xi)=\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\xi^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}\right) \text{ или}$$

$$f(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}-\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\xi^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}\right).$$

Тогда, используя правило Коши умножения рядов, получим

$$f(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k k!(2k+1)2^{n-k}(n-k)!}\right)\xi^{2n+1}=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(2k+1)(n-k)!}\right)\frac{\xi^{2n+1}}{2^n}=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{(2k+1)n!}\right)\frac{\xi^{2n+1}}{2^n}=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{(2k+1)}\right)\frac{\xi^{2n+1}}{2^n n!}.$$

Докажем, что $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

Используя бином Ньютона, $(1-x^2)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{2k}$ и интегрируя, имеем

$$\int\limits_0^1(1-x^2)^n dx=\int\limits_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{2k}dx=\sum_{k=0}^{n}\left.\frac{(-1)^k C_n^k x^{2k+1}}{2k+1}\right|_0^1=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}.$$

Заметим, что с другой стороны

$$I_{m,n}=\int\limits_0^1 x^m(1-x^2)^n dx=\int\limits_0^1\frac{(1-x^2)^n}{m+1}dx^{m+1}=\left.\frac{x^{m+1}(1-x^2)^n}{m+1}\right|_0^1-$$

$$-\int\limits_0^1\frac{x^{m+1}}{m+1}d(1-x^2)^n=2n\int\limits_0^1\frac{x^{m+2}}{m+1}(1-x^2)^{n-1}dx=\frac{2n}{m+1}I_{m+2,n-1}.$$

Тогда

$$I_{m,n}=\frac{(2n)!!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(m+2k-1)}I_{m+2n,0} \text{ и } I_{0,n}=\frac{(2n)!!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)}I_{2n,0}=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n,0}.$$

Учитывая, что $I_{2n,0}=\displaystyle\int\limits_0^1 x^{2n}dx=\left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1=\frac{1}{2n+1}$, имеем $I_{0,n}=\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n,0}=\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ и

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}=\int\limits_0^1(1-x^2)^n dx=I_{0,n}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Заметим также, что значения $I_{m,n}$ связаны с бета-функцией

$B(p,q)=\displaystyle\int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ соотношением:

$$I_{m,n}=\int\limits_0^1 x^m(1-x^2)^n\,dx=\begin{vmatrix}x^2=t, x=\sqrt{t}\\ 2xdx=dt\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^n\,dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},n+1\right).$$

Тогда, используя свойства бета-функции $B(p,q)$ и гамма-функции $\Gamma(z)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ – интегралы Эйлера первого и второго рода, получим

$$I_{0,n}=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},n+1\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}+n+1\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)n!}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\prod\limits_{j=1}^{n+1}\left(\frac{1}{2}+n+1-j\right)}=$$

$$=\frac{2^n n!}{2^{n+1}\prod\limits_{j=1}^{i+n+1}\left(\frac{1}{2}+n+1-j\right)}=\frac{(2n)!!}{\prod\limits_{j=1}^{n+1}(1+2n+2-2j)}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

Следовательно, $f(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!}$.

Так как $\frac{d\theta_1}{d\xi}=f(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!}$, то

$$\theta_1=\int\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!}\right)d\xi=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}+C\ -$$

решение уравнения $\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2}-\xi\frac{d\theta_1}{d\xi}=-1.$

Учитывая, начальное условие, $\theta_1(\xi)\big|_{\xi=\xi_*}=0$, получаем, что

$$\theta_1(\xi)=S_1(\xi)-S_1(\xi_*)\,, \tag{2}$$

где $S_1(\xi)=A(\xi)-B(\xi)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$.

Общие члены этих рядов $a_n=a_n(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$ и $b_n=b_n(\xi)=\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям $a_{n+1}=\frac{(2n+1)\xi^2}{(2n+2)(2n+3)}a_n$, $a_0=\xi\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и $b_{n+1}=\frac{(2n+2)\xi^2}{(2n+3)(2n+4)}b_n$, $b_0=\frac{\xi^2}{2}$. Эти соотношения можно использовать для вычисления значений частичных сумм рядов $A(\xi),\ B(\xi)$.

Отметим свойства рядов $A(\xi),\ B(\xi)$:

1. $a_n > 0$, $b_n > 0$, для любого $\xi > 0$.
2. $A(-\xi) = -A(\xi)$, $B(-\xi) = B(\xi)$
3. $S_1(\xi) + S_1(-\xi) = -2B(\xi)$, $S_1(\xi) - S_1(-\xi) = 2A(\xi)$.

Исследуем на сходимость ряды $A(\xi),\ B(\xi)$. Используя признак Д'Аламбера, имеем $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\xi^2(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)} < \frac{\xi^2}{2n+3} < q < 1$, если $n > \frac{\xi^2}{2q} - 1{,}5$ и $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(2n+2)\xi^2}{(2n+3)(2n+4)} < \frac{\xi^2}{2n+4} < q < 1$, если $n > \frac{\xi^2}{2q} - 2$.

Следовательно, для любого числа q, $0 < q < 1$, существует натуральное число, например, $n_0 = \left[\frac{\xi^2}{2q}\right]$, такое, что для любого $n > n_0$ выполняются неравенства $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$, $\frac{b_{n+1}}{b_n} < q$. Тогда остатки рядов $A(\xi),\ B(\xi)$ удовлетворяют неравенствам: $\left|\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\right| \le \frac{|a_n|}{1-q}$, $\sum_{k=n}^{+\infty} b_k \le \frac{b_n}{1-q}$ и сходятся со скоростью, не меньшей, чем скорость бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q.

Таким образом, значения рядов $A(\xi),\ B(\xi)$, с заданной точностью $\varepsilon > 0$, можно получить, вычисляя n-ые частичные суммы этих рядов $\sum_{k=0}^{n-1} a_k$, $\sum_{k=0}^{n-1} b_k$, если выполняются неравенства:

$$|a_n| \le \varepsilon(1-q),\ b_n \le \varepsilon(1-q),\ \text{и } n \ge n_0 = \left[\frac{\xi^2}{2q}\right]. \tag{3}$$

Так, например, для $q = 0{,}5$ неравенства принимают вид: $|a_n| \le \varepsilon$, $b_n \le \varepsilon$, и $n \ge n_0 = [\xi^2]$.

Таким образом, точность 2ε вычисления значений $S_1(\xi), S_1(\xi_*)$ обеспечивается вычислением n-ых частичных сумм рядов $\sum_{k=0}^{n-1} a_k(\xi)$, $\sum_{k=0}^{n-1} b_k(\xi)$ при выполнении условий (3), что гарантирует точность 4ε вычисления значения $\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*)$.

Учитывая следствие формулы Стирлинга: $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} < n! < n^n \sqrt{2\pi n}\, e^{-n+\frac{1}{12n}}$, имеем

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}(2n+1)!!(2n+2)}{|\xi|(2n)!!(2n+1)} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}(2n)!(2n+2)}{|\xi| 2^{2n}(n!)^2} >$$

$$> \frac{\sqrt{\pi}}{|\xi|\sqrt{2}} \frac{(2n+2)(2n)^{2n} e^{-2n} 2\sqrt{\pi n}}{2^{2n} n^{2n} 2\pi n e^{-2n+\frac{1}{6n}}} = \frac{(n+1)\sqrt{2n}}{n e^{\frac{1}{6n}}|\xi|} > \frac{\sqrt{2n}}{e^{\frac{1}{6}}|\xi|} \ge 1,$$

если $n \geq \frac{\sqrt[3]{e}\xi^2}{2}$. Следовательно, для $n \geq n_0 = [\xi^2]$ выполняется неравенство $|a_n| \geq b_n$. Это неравенство позволяет упростить проверку условий (3) при вычислении n-ых частичных сумм рядов $\sum_{k=0}^{n-1} a_k(\xi)$ и $\sum_{k=0}^{n-1} b_k(\xi)$.

Результаты вычисления значений функции $\theta_1(\xi)$ с использованием соотношений (2) и условий (3) приведены в табл. 1 и на рис.1.

Таблица 1

ξ_*	ξ					
	0	1	2	3	4	5
-1	2,09	3,00	3,52	3,88	4,14	4,35
0		0,90	1,43	1,78	2,05	2,26
1			0.52	0,88	1,15	1,36
2				0,36	0,62	0,84

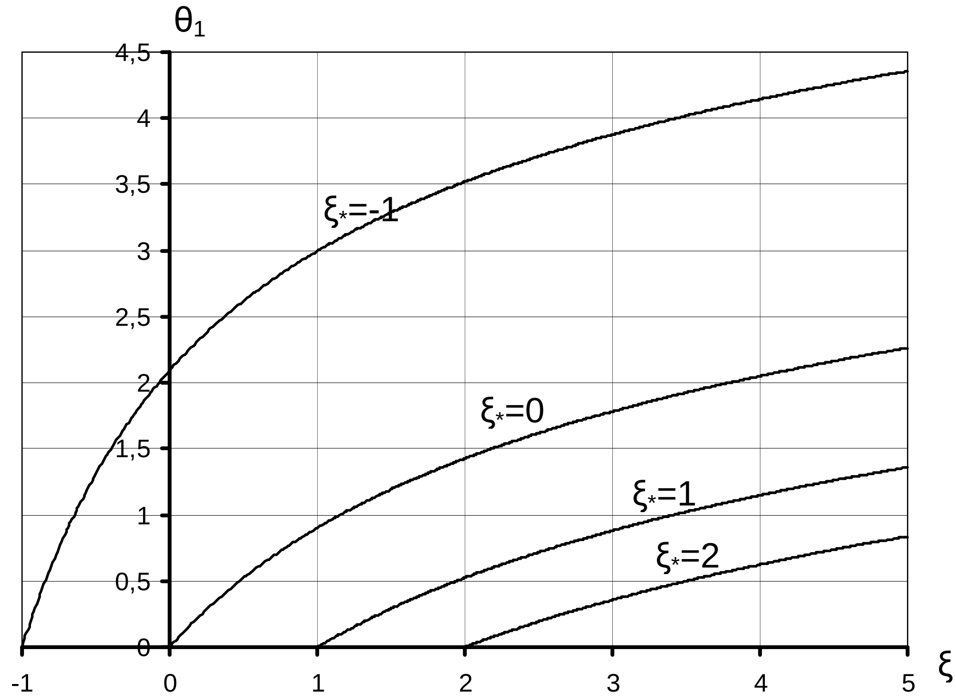

Рисунок 1

Литература

1. Найденов В.И., Швейкина В.И. Нелинейные модели колебаний речного стока / В.И. Найденов, В.И. Швейкина // Водные ресурсы. – Том 29, № 1. – М., 2002. – С. 62 – 67.

2. Волчек, А.А. Сравнительная оценка марковских и нелинейных моделей годового стока рек Беларуси / А.А. Волчек, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – Брест, 2006. – № 5 – С. 56-60.

3. Волчек, А.А. О решении одной стохастической модели многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, И.И. Гладкий, Л.П. Махнист, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – Брест, 2008. – № 5 – С. 83-87.