б) точка $b(\bar{x}_b, \quad \bar{y}_b)$ существует лишь при $\sigma < \sigma_{кр} = \dfrac{1}{K+1}$ и является устойчивым узлом.

Выводы: а) процессы установления в соответствующей системе всегда носят апериодический характер.

б) качественное исследование системы (9) на фазовой плоскости позволяет определить положение и характер устойчивости особых точек, найти критические значения, а также и условия сосуществования.

Литература

1. Чернавский, Д.С. Колебательные процессы в биологических и химических системах / Д.С. Чернавский, Л. Н. Григоров, М.С. Полякова. – М.: Наука,1967.
2. Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Физматгиз,1959.

УДК 517.928.4.

МЕТОД МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ АМПЛИТУД В ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Кожух И.Г., Касперович Ю.А.

УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест

Рассмотрим один из приближенных методов исследования некоторого класса динамических систем, имеющих предельный цикл, т.е. автоколебательных систем.

Пусть дана динамическая система

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y), \tag{1}$$

где $P(x, y)$, и $Q(x, y)$ – заданные аналитические функции. Поместим начало координат в особую точку (0,0) системы (1) , тогда она примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + \mu f_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + \mu f_2(x, y). \end{aligned} \tag{2}$$

Система (2) получается из системы (1) в результате разложения функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в ряд Тейлора.

Известный французский ученый А.Пуанкаре в начале прошлого века показал, что в одном важном частном случае можно получить приближенное решение $x(t), y(t)$ такой системы. Этот случай относится к автоколебательным системам, имеющим предельный цикл.

Сформулированная выше задача может быть решена при выполнении двух условий.

1. Нелинейные функции $\mu f_1(x, y)$ и $\mu f_2(x, y)$ малы по сравнению с коэффициентами a_{ij}. Число μ в этом случае называют малым параметром $\mu << 1$, a_{ij} и f – одного порядка.

2. Если $\mu = 0$, то система (2) переходит в консервативную колебательную систему с особой точкой типа “центр”.

Рассмотрим динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x + \mu f(x, y), \tag{3}$$

с помощью которой проиллюстрируем метод медленно меняющихся амплитуд. Система (3) является частным случаем системы (2) и в ряде случаев может быть получена из нее заменой переменных. Очевидно, система (3) эквивалентна одному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \mu f\left(x, \quad \frac{dx}{dt}\right) \tag{4}$$

При $\mu = 0$ траектории системы (3) на фазовой плоскости становятся концентрическими эллипсами, а особая точка (0,0) превращается в центр. А тогда решением уравнения (4) является гармоническая функция

$$x = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \tag{5}$$

в которой постоянные A_0 и φ_0 определяются начальными условиями.

При $\mu \neq 0$, но $\mu << \omega$ система (3) или равносильное ей уравнение (4) описывают колебательные системы, близкие к гармоническим, а при $\mu >> \omega$ колебательная система будет далека от гармонической.

Рассмотрим подробнее метод меняющихся амплитуд, идея которого была предложена физиком Ван-дер-Полем . Метод основан на следующих рассуждениях. Если автоколебания близки к синусоидальным, а при отклонении от устойчивого предельного цикла изображающая точка снова приближается к нему достаточно медленно, то решение (5) можно представить в виде

$$x = A(t)\cos(\omega t + \varphi(t)), \tag{6}$$

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ медленно меняющиеся функции времени. Это значит, что амплитуда колебаний мало изменяется за период и отставание или опережение по фазе за период мало по сравнению с 2π.

Продифференцируем выражение (6) по времени как сложную функцию:

$$\dot{x} = \dot{A}\cos(\omega t + \varphi) - A\dot{\varphi}\sin(\omega t + \varphi) - \omega A\sin(\omega t + \varphi). \tag{7}$$

Видно, что первые два слагаемые в правой части (7) содержат производные от медленно меняющихся функций $A(t)$ и $\varphi(t)$, имеющих порядок малости μ. Если бы $\mu = 0$, то A и φ не зависели бы от времени и

$$\dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi(t)), \tag{8}$$

Потребуем, чтобы равенство (8) выполнялось всегда, т.е. чтобы

$$\dot{A}\cos(\omega t + \varphi) - A\dot{\varphi}\sin(\omega t + \varphi) = 0 \tag{9}$$

Вторая производная $\ddot{x}$ находится после дифференцирования (8) по времени

$$\ddot{x} = -\omega\dot{A}\sin(\omega t + \varphi) - \omega A\dot{\varphi}\cos(\omega t + \varphi) - \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) \tag{10}$$

Подставим теперь (6), (8), (10) в исходное уравнение (4), получим

$$\begin{aligned} &-\omega\dot{A}\sin(\omega t + \varphi) - \omega A\dot{\varphi}\cos(\omega t + \varphi) = \\ &= \mu f[A\cos(\omega t + \varphi), -\omega A\sin(\omega t + \varphi)] \end{aligned} \tag{11}$$

Уравнение (9) и (11) представляют собой пока точную систему относительно переменных A и φ. Может показаться, что на вид система (9) и (11) сложнее, что исходное уравнение (4) или система (3). Однако, как будет показано дальше, уравнения для A и φ можно упростить, что невозможно для исходной системы.

Разрешим (9) и (11) относительно $\dot{A}$ и $\dot{\varphi}$. Из (9) имеем

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{A}}{A} \cdot \frac{\cos(\omega t + \varphi)}{\sin(\omega t + \varphi)} \tag{12}$$

Подставим (12) в (11) и умножим правую и левую части на $-\frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)$. Получим

$$\dot{A} = -\frac{\mu}{\omega} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \cdot f[A\cos(\omega t + \varphi), -\omega A\sin(\omega t + \varphi)]. \tag{13}$$

Подставив далее (13) в (12), будем иметь:

$$\dot{\varphi} = -\frac{\mu}{\omega} \cdot \frac{1}{A}\cos(\omega t + \varphi) \cdot f[A\cos(\omega t + \varphi), -\omega A\sin(\omega t + \varphi)]. \tag{14}$$

Воспользуемся медленностью функций $\mathrm{A(t)}$ и $\varphi(t)$. Справа в уравнения (13), (14) входят быстроменяющиеся функции времени $\sin(\omega t + \varphi)$ и $\cos(\omega t + \varphi)$. Усредним их за период $\frac{2\pi}{\omega} = T$, а медленные функции $A, \varphi, \dot{A}, \dot{\varphi}$ приближенно заменим их средними за период значениями:

$$\dot{A} = \psi(A), \quad \dot{\varphi} = \Phi(A), \tag{15}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \psi(A) &= -\frac{\mu}{\omega} \cdot \frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega t + \varphi) \cdot f[A\cos(\omega t + \varphi), -\omega A\sin(\omega t + \varphi)]dt, \\ \Phi(A) &= -\frac{\mu}{\omega} \cdot \frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega t + \varphi) \cdot f[A\cos(\omega t + \varphi), -\omega A\sin(\omega t + \varphi)]dt. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что усредненные по периоду функции $\psi(A)$ и $\Phi(A)$ не зависят от медленной фазы $\varphi(t)$, а являются только функциями амплитуды. В самом деле, в (16) вместо переменной интегрирования t можно ввести новую переменную $z = \omega t + \varphi$, тогда $dz = \omega dt + d\varphi \approx \omega dt$ и функция $\psi(A)$ запишется в виде

$$\psi(A) = \frac{\mu}{\omega} \cdot \frac{1}{\omega \cdot t} \int_0^{\omega T} \sin z \cdot f[A\cos z, -A\sin z]dz,$$

где φ уже явно не входит. Аналогичные рассуждения можно провести относительно функции $\Phi(A)$.

И в заключение отметим, что кажущиеся на первый взгляд свойства амплитуды и фазы конкретной системы носят частный характер, однако практика и развивающаяся теория показывают, что все квазигармонические колебательные системы, имеющие один предельный цикл, мало чем качественно отличаются от задачи о ламповом генераторе, разрешенной Ван-дер-Полем.

Литература

1. Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Физматгиз,1959.
2. Андронов, А.А. Качественная теория динамических систем / А.А. Андронов [и др.] – М.: Наука,1966.
3. Андронов, А.А. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов [и др.] – М.: Наука,1967.
4. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
5. Стрелков, С.П. Введение в теорию колебаний / С.П. Стрелков. – М.: Наука. 1964.

УДК 517

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЕТИ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ В ОБОБЩЕННОЙ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ФОРМЕ

Коробейникова Е.В.
УО «Гомельский государственный технический университет имени П.О.Сухого», г. Гомель

Введение. В большинстве задач массового обслуживания стационарное распределение в мультипликативной форме находится для сети, узлы в которой квазиобратимы. Т.е. происходит стандартная процедура склеивания узлов по теореме Келли, если узлы в сети будут квазиобратимыми, то стационарное распределение будет иметь форму произведения. В данной работе автору удалось выявить условия существования стационарного распределения в сети, состоящей из двух узлов, в форме смещенного геометрического произведения для неквазиобратимых узлов. Это несколько иная форма произведения, чем та, что получается при склеивании в сеть квазиобратимых узлов, при