Нетрудно видеть, что усредненные по периоду функции $\psi(A)$ и $\Phi(A)$ не зависят от медленной фазы $\varphi(t)$, а являются только функциями амплитуды. В самом деле, в (16) вместо переменной интегрирования t можно ввести новую переменную $z = \omega t + \varphi$, тогда $dz = \omega dt + d\varphi \approx \omega dt$ и функция $\psi(A)$ запишется в виде

$$\psi(A) = \frac{\mu}{\omega} \cdot \frac{1}{\omega \cdot t} \int\limits_0^{\omega T} \sin z \cdot f[A\cos z, -A\sin z]dz,$$

где φ уже явно не входит. Аналогичные рассуждения можно провести относительно функции $\Phi(A)$.

И в заключение отметим, что кажущиеся на первый взгляд свойства амплитуды и фазы конкретной системы носят частный характер, однако практика и развивающаяся теория показывают, что все квазигармонические колебательные системы, имеющие один предельный цикл, мало чем качественно отличаются от задачи о ламповом генераторе, разрешенной Ван-дер-Полем.

Литература

1. Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Физматгиз,1959.
2. Андронов, А.А. Качественная теория динамических систем / А.А. Андронов [и др.] – М.: Наука,1966.
3. Андронов, А.А. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов [и др.] – М.: Наука,1967.
4. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
5. Стрелков, С.П. Введение в теорию колебаний / С.П. Стрелков. – М.: Наука. 1964.

УДК 517

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЕТИ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ В ОБОБЩЕННОЙ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ФОРМЕ

Коробейникова Е.В.
УО «Гомельский государственный технический университет имени П.О.Сухого», г. Гомель

Введение. В большинстве задач массового обслуживания стационарное распределение в мультипликативной форме находится для сети, узлы в которой квазиобратимы. Т.е. происходит стандартная процедура склеивания узлов по теореме Келли, если узлы в сети будут квазиобратимыми, то стационарное распределение будет иметь форму произведения. В данной работе автору удалось выявить условия существования стационарного распределения в сети, состоящей из двух узлов, в форме смещенного геометрического произведения для неквазиобратимых узлов. Это несколько иная форма произведения, чем та, что получается при склеивании в сеть квазиобратимых узлов, при которой множители в форме произведения не зависят от состояния других узлов. В полученном случае, множители в форме произведения зависят от состояния других узлов. Такую форму произведения назовем обобщенной мультипликативной формой.

1. Модель однолинейного узла. Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания с групповым поступлением и групповым обслуживанием. В систему поступает стационарный пуассоновский поток сообщений с интенсивностью λ. В момент поступления сообщения мгновенно формируется группа заявок случайного размера X_n (n-номер $n-$го по счету поступившего сообщения). Эта группа заявок присоединяется к очереди, если в системе есть другие заявки, в противном случае из заявок этой группы формируется группа заявок, которая сразу начинает обслуживаться. Механизм формирования требуемой для обслуживания группы точно такой, как описанный ниже механизм формирования группы на обслуживание после окончания обслуживания очередной группы. Предполагается, что $\{X_n, n=1,2,...\}$ - последовательность независимых неотрицательных одинаково распределенных целочисленных случайных величин с конечным математическим ожиданием m_A и вероятностными значениями $a(k)=P\{\ X_n=k\ \},\quad k=1,2,...$. Пусть $\breve{A}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a(k)z^k$ – производящая функция X_n. В момент окончания обслуживания очередной группы на обслуживание выбирается группа заявок случайного размера Y_n, которая обслуживается целиком, при этом обслуживание – экспоненциальное с интенсивностью μ ($n-$ номер $n-$й по счету обслуженной группы). Если в момент окончания обслуживания очередной группы размер требуемой для обслуживания группы строго больше числа оставшихся заявок в системе, то на обслуживание выбирается некомплектная группа из всех оставшихся в системе заявок. Предполагается, что $\{Y_n, n=1,2,......\}$ – последовательность независимых неотрицательных одинаково распределенных целочисленных случайных величин с конечным математическим ожиданием m_B и вероятностями значений $b(k)=P\{Y_n=k\},\quad k=1,2,...$. Пусть также $\breve{B}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}b(k)z^k$ – производящая функция Y_n. Процессы поступления и обслуживания предполагаются независимыми. Размеры поступающих групп и размеры выбираемых на обслуживание групп также независимы.

Пусть $n(t)$ - число заявок в системе в момент t. Семейство случайных величин $\{n(t)\}$ есть цепь Маркова с непрерывным временем в пространстве состояний $Z_+=\{0,1,...\}$. Интенсивности ее перехода есть

$$\begin{aligned} &q(n,n+k)=\lambda a(k), \quad k\ge 1, n\ge 0,\\ &q(n,n-k)=\mu b(k), \quad n>k\ge 1,\\ &q(n,0)=\mu\overline{B}(n)=\mu(1-b(1)-b(2)-...-b(n-1)), \quad n\ge 1. \end{aligned} \tag{1.1}$$

В [1-3] установлено, что необходимым и достаточным условием эргодичности процесса $n(t)$ является условие

$$\lambda\cdot m_A<\mu\cdot m_B, \tag{1.2}$$

которое будет предполагаться всюду далее выполненным.

Уравнения равновесия для стационарных вероятностей процесса $X(t)$ можно записать в виде

$$\rho P(0)=\sum_{k=1}^{\infty}P(k)\overline{B}(k), \tag{1.3}$$

$$(1+\rho)P(n)=\sum_{k=1}^{\infty}P(n+k)b(k)+\rho\sum_{k=1}^{n}P(n-k)a(k), \quad n\geq 1, \text{ где } \rho=\frac{\lambda}{\mu} \tag{1.4}$$

Решение (1.3), (1.4) будем искать в виде смещенного геометрического распределения $\{P(n), \quad n=0,1,\ldots\}$, где

$$P(0)=P_0, \quad P(n)=(1-P_0)(1-c)c^{n-1}, \quad n=1,2,\ldots, \quad P_0, c\in(0,1). \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.3), получим $\rho P_0 = (1-P_0)(1-\breve{B}(c))$, откуда

$$\breve{B}(c)=\frac{1-(1+\rho)P_0}{1-P_0}. \tag{1.6}$$

Известно [4], что для того, чтобы функция $\breve{B}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b(n)z^n$ являлась производящей функцией вероятностного распределения на $\mathrm{N}=\{1,2,\ldots\}$, необходимо и достаточно, чтобы она была абсолютно монотонной на $(0,1)$ (т.е. в любой точке $(0,1)$ ее производные любых порядков были неотрицательными) и $\breve{B}(0)=0, \quad \breve{B}(1)=1$. В частности, тогда она строго возрастает на [0,1] и нестрого выпукла вниз.

Рассмотрим уравнение

$$\breve{B}(c)=\alpha. \tag{1.7}$$

В силу вышесказанного $\alpha\in(0,1)$, если и только если $c\in(0,1)$. В силу строгого возрастания и нестрогой выпуклости $\breve{B}(c)$, очевидно, $c\geq\alpha$. Таким образом, имеет место

Лемма 1. *Если* $\alpha\in(0,1)$, *то уравнение* (1.7) *имеет единственный корень* c. *Этот корень находится в промежутке* $[\alpha,1)$.

По лемме 1, если решение уравнений равновесия (1.3), (1.4) в форме (1.5) существует, то необходимо выполняется $P_0<\frac{1}{1+\rho}$. Согласно (1.5) $P(n+k)=P(n)c^k$. Умножая (1.4) на $(z)^n$ и складывая по всем $n=1,2,\ldots$, имеем

$$(\lambda+\mu)(\breve{P}(z)-P_0)=\mu(\breve{P}(z)-P_0)\breve{B}(c)+\lambda\breve{A}(z)\breve{P}(z). \tag{1.8}$$

Подставляя в (1.8) выражения для производящей функции $\breve{P}(z)=\frac{P_0+(1-P_0-c)\cdot z}{1-c\cdot z}$, получим

$$\breve{A}(z)=\frac{(1-c)z}{P_0+(1-P_0-c)z}. \tag{1.9}$$

Откуда следует, что $a(n)$ распределено по геометрическому закону

$$a(n)=(1-a)a^{n-1}, \text{ где } a=\frac{P_0+c-1}{P_0}. \tag{1.10}$$

Из проведенных рассуждений вытекает

Теорема 1. *Пусть выполнено* (1.2). *Для того чтобы стационарное распределение* $X(t)$ *имело форму смещенного геометрического распределения* (1.5), *необходимо и достаточно, чтобы* $P_0 < \frac{1}{1+\rho}$ *и существовала абсолютно монотонная функция* $\breve{A}(z)$, *удовлетворяющая* $\breve{A}(1)=1$ *и равенству* (1.9). *Тогда* $\breve{A}(z)$ *будет задавать производящую функцию размеров поступающих групп.*

2. Модель сети с групповыми перемещениями. Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания, состоящую из двух узлов того же типа что и система, рассмотренная в разделе 1. Обслуженная в i-м узле группа заявок мгновенно покидает сеть, посылая сообщение в j-й узел с вероятностью π_{ij}, а с вероятностью π_{i0} не посылая никаких сообщений ($i, j = 1{,}2 \quad \sum_{j=0}^{2} \pi_{ij} = 1, \quad p_{ii} = 0$).

Предположим, что расширенная матрица маршрутов неприводима. Тогда система линейных уравнений трафика

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1 &= \lambda_1 + \gamma_2 \pi_{2,1} \\ \tilde{\gamma}_2 &= \lambda_2 + \gamma_1 \pi_{1,2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

имеет единственное строго положительное решение. Где γ_i – интенсивность потока сообщений, выходящих из $i - \tilde{a}\hat{\imath}$ узла, а $\tilde{\gamma}_i$ - интенсивность потока сообщений, поступающих на $i - \hat{u}\acute{e}$ узел.

Предположим, что выполнено условие эргодичности

$$\gamma_i m_{A_I} < \mu_i m_{B_I}, \qquad i = 1{,}2. \tag{2.2}$$

Покажем, что для сети, состоящей из двух узлов, стационарное распределение будет иметь форму

$$P(n) = P_1(n_1) P_2(n_2), \tag{2.3}$$

где $\{P_i(n_i)\}$ - вычисляются по формуле $P_i(n_i) = (1 - P_{i,0})(1 - c_i) c_i^{n_i}$.

Запишем уравнения равновесия для двух узлов сети

$$P(0,0)[\lambda_1 + \lambda_2] = \sum_{k=1}^{\infty} P(k,0) \overline{B}_1(k) \mu_1 \pi_{10} + \sum_{k=1}^{\infty} P(0,k) \overline{B}_2(k) \mu_2 \pi_{20}, \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} P(n_1,0)[\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1] &= \sum_{k=1}^{n_1} P(n_1 - k, 0) \lambda_1 a_1(k) + \sum_{k=1}^{\infty} P(n_1 + k, 0) b_1(k) \mu_1 \pi_{10} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} P(n_1, k) \overline{B}_2(k) \mu_2 \pi_{20} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n_1} P(n_1 - l, k) \mu_2 \overline{B}_2(k) \pi_{21} a_1(l), \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} P(0,n_2)[\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2] &= \sum_{k=1}^{n_2} P(0, n_2 - k) \lambda_2 a_2(k) + \sum_{k=1}^{\infty} P(0, n_2 + k) b_2(k) \mu_2 \pi_{20} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} P(k, n_2) \overline{B}_1(k) \mu_1 \pi_{10} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n_2} P(k, n_2 - l) \mu_1 \overline{B}_1(k) \pi_{12} a_2(l), \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} P(n_1,n_2)[\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2] &= \sum_{k=1}^{\infty} P(n_1 - k, n_2) \lambda_1 a_1(k) + \sum_{k=1}^{n_2} P(n_1, n_2 - k) \lambda_2 a_2(k) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} P(n_1 + k, n_2) b_1(k) \mu_1 \pi_{10} + \sum_{k=1}^{\infty} P(n_1, n_2 + k) b_2(k) \mu_2 \pi_{20} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n_2} P(n_1 + k, n_2 - l) \mu_1 b_1(k) \pi_{12} a_2(l) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n_1} P(n_1 - l, n_2 + k) \mu_2 b_2(k) \pi_{21} a_1(l). \end{aligned} \tag{2.7}$$

С учетом (2.3), (2.4) примет вид

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \pi_{10}\tilde{\gamma}_1 + \pi_{20}\tilde{\gamma}_2, \tag{2.8}$$

а при подстановке (2.3) в (2.5), (2.6), (2.7) равенства превратятся в тождества.

Из всего вышеизложенного вытекает

Теорема 2. *При выполнении условий (2.2) процесс n(t) эргодичен. Для того, что бы его стационарное распределение представлялось в обобщенной форме произведения (2.3), необходимо выполнения равенства (2.8) и условий теоремы 1 для каждого из узлов.*

Литература

1. Miyazawa M., Taylor P.G. A Geometric Pro duct-form Distribution for a Queueing Network with Non-standard Batch Arrivals and Batch Transfers // Adv.Appl.Prob. 1997. V.29. No. 2. P.1-22.

2. Chao X. and Pinedo M. On Generalized Networks of Queues with Positive and Negative Arrivals // Prob. Eng. Inf. Sci. 1993. V.7. P.301-304.

3. Chao X., Pinedo M. and Shaw D. A Network of Assembly Queues with Product-form Solution // J. Appl. Prob. 1996. V.33. P.858-869.

УДК 519.6

МЕТОД СЕКУЩИХ ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Костюк А.Ю.

УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест

Научный руководитель В.М.Ракецкий, к.ф.-м.н, доцент

Введение. Методы минимизации функций одной переменной занимают важное место в теории и практике численных методов оптимизации, поскольку они часто используются при разработке методов минимизации функций n переменных. Наиболее популярными из них являются прямые методы (или нулевого порядка), не требующие вычисления производных.

Главное требование, которое предъявляется к прямым методам, можно сформулировать так: достичь заданную точность отыскания точки экстремума при минимальном количестве вычислений функции. Именно эта идея лежит в основе широко известных методов Фибоначчи, “золотого” сечения и квадратичной интерполяции [1,2]. Методы Фибоначчи и “золотого” сечения не предполагают и не требуют от функции никаких дополнительных свойств, кроме свойства унимодальности на заданном отрезке. Они одинаково хороши как для дифференцируемых, так и не дифференцируемых функций. Метод квадратичной интерполяции разработан из предположения, что минимизируемая функция является гладкой, хотя бы один раз дифференцируемой, однако его применение во многих случаях дает хорошие результаты и для недифференцируемых функций.

Ниже приводится описание прямого метода минимизации функции одной переменной, который получил условное название метода секущих, и результаты численного эксперимента по его сравнению с другими аналогичными методами.

Идея метода. Если функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a,b]$, то, зная внутри этого отрезка две точки x_1, x_2 и значения функции в них, можно уменьшить отрезок локализации экстремума, отбросив его часть, заведомо не содержащую точку минимума: