УДК 519.6 + 517.983.54

ОСТАНОВ ПО СОСЕДНИМ ПРИБЛИЖЕНИЯМ В МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ ЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Наумовец С.Н.
УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест
Научный руководитель – Матысик О.В., канд. физ.-мат. наук, доцент

В гильбертовом пространстве *H* решается операторное уравнение $Ax = y_\delta$, где *A* – оператор положительный, ограниченный, несамосопряжённый и $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Предполагается, что $0 \in S_A$ (но не является собственным значением оператора *A*), поэтому рассматриваемая задача некорректна. Пусть $y \in R(A)$, т. е. при точной правой части *y* уравнение имеет единственное решение *x*. Будем искать его, используя явный итерационный метод

$$z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n,\ \ z_0 \in H, \tag{1}$$

где $C = \left(E - \alpha A^* A\right)^2$, $B = A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^* A\right)^2\right]$, $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\left\|A^* A\right\|}$, а u_n – ошибки вычисления итераций (причём $\|u_n\| \le \beta$).

Предложенный метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова *по соседним приближениям*: зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова *m* определим условиями

$$\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon,\ (n < m), \quad \|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon. \tag{2}$$

Для доказательства сходимости предложенного метода и получения оценки для момента останова необходимы следующие леммы.

Лемма 1. Пусть приближение w_n определяется равенством

$$w_0 = z_0,\quad w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n,\quad n \ge 0,$$

тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{n}\|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2.$$

Лемма 2. При $\forall w_0 \in H$ и произвольной последовательности ошибок $\{u_n\}$, удовлетворяющих условию $\|u_n\| \le \beta$, выполняется неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty}\|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta.$$

Справедлива

Теорема. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta,\beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) если $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова m определён при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta, \|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то тогда справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0,\ \delta,\beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1,\ p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta \to 0} \|z_m - x\| = 0$.

Для иллюстрации скоростных качеств метода (1) в гильбертовом пространстве $L_2(0,1)$ решаем модельную задачу в виде уравнения:

$$\int_0^1 K(t,s)x(s)ds = y(t)\,,\ t \in [0,1]$$

с симметричным положительным ядром $K(t,s) = \dfrac{1}{1+100(t-s)^2}$.

В качестве точного решения сформулированной задачи выберем функцию

$$x(s) = \begin{cases} s, & 0 \le s < 0.5, \\ 1-s, & 0.5 \le s \le 1. \end{cases}$$

Данная задача решалась методом (1) и хорошо известным в научной литературе методом простой итерации

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right), \quad x_{0,\delta} = 0\,. \tag{3}$$

Здесь воспользовались правилом останова (2), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1{,}5\delta$. Итак, при $\delta = 10^{-3}$, $\varepsilon = 1{,}5\cdot 10^{-3}$ для достижения оптимальной точности при счёте методом итераций (1) потребовалось 10 итераций, при счете методом простой итерации (3) – 21 итерация. При $\delta = 10^{-4}$, $\varepsilon = 1{,}5\cdot 10^{-4}$ соответственно потребовалось 17 и 48 итераций. Пример счёта показал, что для достижения оптимальной точности метод итераций (1) требует примерно в 2,5 раза меньше итераций, чем метод простой итерации (3).

УДК 519.6 + 517.983.54

К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ ЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Наумовец С.Н.
УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест
Научный руководитель – Матысик О. В., канд. физ.-мат. наук, доцент

Пусть в гильбертовом пространстве *H* требуется решить уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

где A – ограниченный, самосопряженный, положительный оператор $A: H \to H$, для которого нуль не является собственным значением. Причем $0 \in S_A$, т. е. задача некорректна. Предполагается существование единственного решения *x* при точной правой части *y*. Для его отыскания предлагается итерационный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^2 x_n + 2\alpha y - \alpha^2 Ay, \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Правую часть уравнения (1), как это обычно бывает на практике, считаем известной приближённо, т.е. вместо *y* известно δ– приближение $y_\delta, \|y - y_\delta\| \le \delta$. Тогда итерационный процесс (2) запишется в виде

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta - \alpha^2 Ay_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$