Замечание. *Из неравенства* (5) *вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра* α. *Но* $n_{опт}$ *зависит от* α *и, поэтому для уменьшения n и, значит, объема вычислительной работы следует брать* α *возможно большим, удовлетворяющим условию* $0<\alpha\le\frac{5}{4M}$, *и так, чтобы* $n_{опт}$ *было целым.*

УДК 517.512.2

АНАЛОГ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Онищук А.И.

УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест

В работе [1] указаны условия существования и единственности решения аналога задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y^{(\alpha)}=f(x,y), \tag{1}$$

где $0<\alpha<1$, найдена оценка приближения решения уравнения (1) решением специально построенного, с помощью линейных методов суммирования интегралов Фурье, операторного уравнения типа Абеля-Гаммерштейна.

Пусть Π параллелепипед в $\mathbf{R}^4$ вида:

$$\Pi:=\left\{(x,y^{(0)},y^{(1)},y^{(2)})\in\mathbf{R}^4\mid 0\le x\le l,\ y_0^{(j)}-h_j\le y^{(j)}\le y_0^{(j)}+h_j,\ j=\overline{0,2}\right\},$$

где $l,h_j\in\mathbf{R}_+ (j=\overline{0,2})$, $f:\Pi\mapsto\mathbf{R}$ заданная, абсолютно интегрируемая по параллелепипеду Π функция.

Через $L_f^{(2)}(0;l)$ обозначим класс дважды дифференцируемых на отрезке $[0;l]$ функций $y=y(x)$ с абсолютно непрерывной производной y'', и таких, что функция $f(x,y(x),y'(x),y''(x),,y'''(x))$ абсолютно непрерывна на отрезке [*0, l*]. Нетрудно видеть, что при задании нормы формулой

$$\|y\|:=\sum_{j=0}^{3}\int_0^l\left|y^{(j)}(x)\right|dx,$$

$L_f^{(2)}(0;l)$ является банаховым пространством.

Рассмотрим задачу нахождения функции $y=y(x)$ класса $L_f^{(2)}(0;l)$, удовлетворяющей нелинейному дифференциальному уравнению, с дробной старшей производной

$$y^{(\alpha)}=f(x,y,y',y'',y'''),\ 2<\alpha<3, \tag{2}$$

и начальным условиям

$$y^{(\alpha-1)}(0)=0,\ y^{(\alpha-2)}(0)=0,\ y^{(\alpha-2)}(0)=0. \tag{3}$$

Теорема. Пусть функция $f:\Pi\mapsto\mathbf{R}$ абсолютно интегрируема на параллелепипеде Π и существует $A>0$, что для любых двух точек $M_1(x,y_1^{(0)},y_1^{(1)},y_1^{(2)},y_1^{(3)})$ и $M_2(x,y_2^{(0)},y_2^{(1)},y_2^{(2)},y_2^{(3)})$ из Π выполняется неравенство

$$\left|f(M_1)-f(M_2)\right|\le A\sum_{j=0}^{3}\left|y_1^{(j)}-y_2^{(j)}\right|.$$

Если

$$A\left(l^{\alpha}/\alpha+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)l^{\alpha-2}\left(1+(\alpha-3)l^{\alpha-3}\right)+\alpha(\alpha-1)l^{\alpha-1}\right)/\Gamma(\alpha)<1,$$

то задача (2), (3) имеет в классе $L_f^{(2)}(0;l)$ единственное решение.

Литература

1. Семенчук, Н.П. Дифференциальные уравнения / Н.П. Семенчук 1982. – Т. 18. – № 10. – С. 1831–1833.

УДК 517

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ НЕЦЕЛОГО ПОРЯДКА

Охримчук А.В., Дацык В.Т.
УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест

Найдены условия существования и единственности задачи Коши и получена оценка приближения решения для дифференциального уравнения нецелого порядка.

$$y^{(\alpha)}=f\left(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}\right), \tag{1}$$

где $n-1<\alpha<n, n\in \mathrm{IN}$.

Пусть функция f - абсолютно интегрируема на параллелепипеде Π_{lhj}.

Решение уравнения (1) будем искать в классе дифференцируемых до порядка $n-1, n\in \mathrm{IN}$, функций $y=y(x)$ на отрезке $[0,l]$ с абсолютно непрерывной на этом отрезке производной $y^{(n-1)}(x)$. Причем, для любых указанных функций $y=y(x)$ функция $\mu(x):=f\left(x,y(x),y'(x),\dots,y^{(n-1)}(x)\right)$ должна быть также абсолютно непрерывной на отрезке $[0,l]$ (условие (*)). Норма для функций $y=y(x)$ вводится по формуле:

$$\|y(x)\|=\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^l\left|y^{(j)}(x)\right|dx \tag{2}$$

Указанный класс функций $y=y(x)$обозначим через $L^{(j)}(0,l)$.

Теорема 1. Если для уравнения (1) функция f — абсолютно интегрируема на параллелепипеде Π_{lhj} и для любых точек $M_1\left(x,y_1,y_1',\dots,y_1^{(n-1)}\right)$ и $M_2\left(x,y_2,y_2',\dots,y_2^{(n-1)}\right)$из Π_{lhj} будет

$$\left|f(M_1)-f(M_2)\right|\le A\sum_{j=0}^{n-1}\left|y_1^{(j)}-y_2^{(j)}\right|, \tag{3}$$

где A — некоторая положительная константа, а также выполняется условие (*), то уравнение (1) при выполнении неравенства

$$\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{l^{\alpha}}{\alpha}+\sum_{j=1}^{n-1}(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(j-1))l^{\alpha-j}\right)<1$$

имеет в классе $L^{(j)}(0,l)$ единственное решение $y=y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$Д^{-(1-\alpha)}y(0)=y_0^{(n-1)}=Д^{-(2-\alpha)}y(0)=y_0^{(n-2)}=\dots=Д^{-(n-\alpha)}y(0)=y_0=0, \tag{4}$$

где Г - гамма-функция, $Д^{-ß}$ - дробный интеграл порядка ß > 0, $Д^{ß}$ - дробная производная порядка ß > 0.