УДК 517.956

О ФУНДАМЕНТАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ОПЕРАТОРА Δ^2 В R^3

Савчук Л.А.
УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест
Научный руководитель – Басик А.И., преподаватель

Понятие фундаментального решения является одним из основных понятий теории уравнений с частными производными. В настоящей работе указывается фундаментальное решение оператора Δ^2 в R^3, где $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$ – оператор Лапласа, $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$. Далее, с его помощью, выводится интегральное представление функций класса $C^4(\overline{\Omega})$ и доказываются некоторые свойства бигармонических функций – решений уравнения $\Delta^2 u = 0$.

Пусть $\Omega \subset R^3$ ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Для функций $u = u(x)$ и $\upsilon = \upsilon(x)$ класса $C^2(\overline{\Omega})$ известна вторая формула Грина (см. [1], стр. 69)

$$\int_\Omega u\Delta\upsilon dx = \int_\Omega \upsilon\Delta u dx + \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial\upsilon}{\partial\nu} - \upsilon\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)dS, \tag{1}$$

где $\nu = \nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x))$ – единичное поле внешних нормалей на поверхности $\partial\Omega$.

Если $u, \upsilon \in C^4(\overline{\Omega})$, то заменяя в формуле (1) υ на $\Delta\upsilon$, получим

$$\int_\Omega u\Delta^2\upsilon dx = \int_\Omega \Delta\upsilon\Delta u dx + \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial\Delta\upsilon}{\partial\nu} - \Delta\upsilon\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)dS, \tag{2}$$

затем, заменяя в формуле (2) u на υ и υ на u ,получим

$$\int_\Omega \upsilon\Delta^2 u dx = \int_\Omega \Delta\upsilon\Delta u dx + \int_{\partial\Omega}\left(\upsilon\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu} - \Delta u\frac{\partial\upsilon}{\partial\nu}\right)dS. \tag{3}$$

Вычитая из (2) формулу (3), получим аналог второй формулы Грина для оператора Δ^2:

$$\int_\Omega u\Delta^2\upsilon dx = \int_\Omega \upsilon\Delta^2 u dx + \int_{\partial\Omega}\left(\left(u\frac{\partial\Delta\upsilon}{\partial\nu} + \Delta u\frac{\partial\upsilon}{\partial\nu}\right) - \left(\upsilon\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu} + \Delta\upsilon\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\right)dS. \tag{4}$$

Определение 1. *Функция $E(x,y)$ называется фундаментальным решением оператора Δ^2 в R^3, если при каждом $y \in \mathrm{R}^3$ $E(x,y)$ является обобщенной функцией из пространства $D'(\mathrm{R}^3)$ и удовлетворяет уравнению $\Delta^2 E = \delta(x-y)$, т.е. для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathrm{R}^3)$ выполняется равенство:*

$$\left\langle \Delta^2 E(x,y), \varphi(x)\right\rangle = \varphi(y). \tag{5}$$

Теорема 2. *Функция $E(x,y) = -\dfrac{1}{8\pi}r$ является фундаментальным решением оператора Δ^2, где $r = |x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $y \in \mathrm{R}^3$. Для каждой финитной бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ в R^3, выберем число $R > 0$ так, что носитель $\operatorname{supp}\varphi(x)$ функции $\varphi(x)$ лежит в шаре $B(y,R)$ с центром в точке y радиуса R.

Поскольку функция $E(x,y)$ непрерывна по x, то она локально интегрируема по x и, следовательно,

$$\left\langle \Delta^2 E, \varphi \right\rangle := \left\langle E, \Delta^2 \varphi \right\rangle = \int_{\mathrm{R}^3} E(x,y)\Delta^2\varphi(x)dx =$$

$$= \int_{|x-y|<R} E(x,y)\Delta^2\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\varepsilon<|x-y|<R} E(x,y)\Delta^2\varphi(x)dx .$$

Преобразуем последний интеграл с помощью аналога второй формулы Грина (4). Выбрав $u = E(x,y)$ и $\upsilon = \varphi(x)$, получим

$$\int_{\varepsilon<|x-y|<R} E(x,y)\Delta^2\varphi(x)dx = \int_{|x-y|=\varepsilon} E(x,y)\frac{\partial\Delta\varphi(x)}{\partial\nu_x}dS(x) + \int_{|x-y|=\varepsilon} \Delta E(x,y)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\nu_x}dS(x) -$$

$$- \int_{|x-y|=\varepsilon} \varphi(x)\frac{\partial\Delta E(x,y)}{\partial\nu_x}dS(x) - \int_{|x-y|=\varepsilon} \Delta\varphi(x)\frac{\partial E(x,y)}{\partial\nu_x}dS(x). \qquad (6)$$

Поскольку $\nu = \dfrac{y-x}{\varepsilon}$ – вектор единичной нормали к поверхности $|x-y| = \varepsilon$, внешней для области $\varepsilon < |x-y| < r$, то при $|x-y| = \varepsilon$ справедливы формулы

$$\frac{\partial E(x,y)}{\partial\nu_x} = \frac{1}{8\pi},\ \Delta E(x,y) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon},\ \frac{\partial\Delta E(x,y)}{\partial\nu_x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}.$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon \to +0$ первый, второй и четвёртый интегралы в формуле (6) стремятся к нулю. Для третьего интеграла в (6) имеем:

$$- \int_{|x-y|=\varepsilon} \varphi(x)\frac{\partial\Delta E(x,y)}{\partial\nu_x}dS(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{|x-y|=\varepsilon}\varphi(x)dS(x) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\cdot\varphi(x_\varepsilon)\cdot 4\pi\varepsilon^2 = \varphi(x_\varepsilon) \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} \varphi(y).$$

Здесь мы применили известную теорему о среднем для интеграла от непрерывной функции

$$\int_{|x-y|=\varepsilon}\varphi(x)dS(x) = 4\pi\varepsilon^2\varphi(x_\varepsilon),$$

где x_ε – некоторая точка на сфере с центром в точке y и радиуса ε.

Таким образом, соотношение (5) выполнено. Что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. *(Интегральное представление функций класса $C^4(\overline{\Omega})$) Пусть $\Omega \subset \mathrm{R}^3$– ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, функция $u \in C^4(\overline{\Omega})$, тогда в каждой точке $y \in \Omega$ справедливо равенство*

$$u(y) = \int_\Omega E(x,y)\Delta^2 u dx + \int_{\partial\Omega}\left(\left(u\frac{\partial\Delta E}{\partial\nu_x} + \Delta u\frac{\partial E}{\partial\nu_x}\right) - \left(E\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu_x} + \Delta E\frac{\partial u}{\partial\nu_x}\right)\right)dS(x). \qquad (7)$$

Следствие. *(Интегральное представление бигармонических функций) Пусть* $\Omega \subset \mathrm{R}^3$ *– ограниченная область с кусочно-гладкой границей, функция* $u \in C^4(\overline{\Omega})$ *и* $\Delta^2 u = 0$ *в* Ω. *Тогда*

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(\left(u \frac{\partial \Delta E}{\partial \nu} + \Delta u \frac{\partial E}{\partial \nu} \right) - \left(E \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + \Delta E \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \right) dS \qquad (8)$$

в каждой точке $y \in \Omega$; *если же* $\Delta^2 u = f(x)$ *в* Ω, *то*

$$u(y) = \int_{\Omega} E(x, y) f(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left(\left(u \frac{\partial \Delta E}{\partial \nu} + \Delta u \frac{\partial E}{\partial \nu} \right) - \left(E \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + \Delta E \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \right) dS.$$

Укажем теперь некоторые свойства бигармонических функций. Положив в формуле Грина (4) $\upsilon \equiv 1$, получим следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть функция* $u \in C^4(\overline{\Omega})$ *и* $\Delta^2 u = 0$ *в* Ω, *тогда имеет место равенство:*

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} dS(x) = 0. \qquad (9)$$

Теорема 5. *(О среднем арифметическом по сфере) Пусть функция* $u \in C^4(B(y, R)) \cap C^3(B[y, R])$ *и* $\Delta^2 u = 0$ *в* $B(y, R)$, *тогда имеет место равенство:*

$$u(y) = \frac{1}{4\pi \cdot R^2} \int_{|x-y|=R} u(x) dS + \frac{1}{4\pi \cdot R} \int_{|x-y|=R} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \frac{R^2}{2} \Delta u(y). \qquad (10)$$

Доказательство. Выберем произвольно число $r \in (0, R)$, тогда функция $u \in C^4(B[y, r])$. По следствию из теоремы 3 имеет место равенство

$$u(y) = \int_{|x-y|=r} \left(\left(u \frac{\partial \Delta E}{\partial \nu} + \Delta u \frac{\partial E}{\partial \nu} \right) - \left(E \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + \Delta E \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \right) dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi \cdot r^2} \int_{|x-y|=r} u(x) dS(x) - \frac{1}{8\pi} \int_{|x-y|=r} \Delta u dS(x) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi \cdot r} \int_{|x-y|=r} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} dS(x) + \frac{1}{8\pi} r \int_{|x-y|=r} \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} dS(x).$$

Учитывая (9) и перейдя в последнем равенстве к пределу при $r \to R$, получим:

$$u(y) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|x-y|=R} u(x) dS + \frac{1}{4\pi R} \int_{|x-y|=R} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \frac{1}{8\pi} \int_{|x-y|=R} \Delta u dS. \qquad (11)$$

Так как $\Delta(\Delta u) = 0$, то по теореме «О среднем значении по сфере» (см. [1], стр. 77) для оператора Δ имеет место равенство:

$$\Delta u(y) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|x-y|=R} \Delta u(x) dS(x).$$

Подставляя последний интеграл в (11), получим формулу (10).

Литература

1. Олейник, О.А. Лекции об уравнениях с частными производными / О.А. Олейник. – М.: БИНОМ, 2005.