$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{1-e^{-\pi p}}{p(p^2+1)} + \dfrac{1}{p^2(p^2+1)}(1-2e^{-\frac{\pi}{2}p} + e^{-\pi p}), \\ Y(p) = \dfrac{1-2e^{-\frac{\pi}{2}p} + e^{-\pi p}}{p(p^2+1)} - \dfrac{1-e^{-\pi p}}{p^2(p^2+1)}. \end{cases}$$

Применяя теорему запаздывания, находим решение системы ДУ:

$$\begin{cases} x(t) = 1 - \cos t - (1-\cos(t-\pi))\eta(t-\pi) + t - \sin t - 2((t-\frac{\pi}{2}) - \sin(t-\frac{\pi}{2}))\eta(t-\frac{\pi}{2}) + \\ \quad + ((t-\pi) - \sin(t-\pi))\eta(t-\pi), \\ y(t) = 1 - \cos t - t + \sin t - 2((t-\frac{\pi}{2}) - \cos(t-\frac{\pi}{2}))\eta(t-\frac{\pi}{2}) + (1-\cos(t-\pi))\eta(t-\pi) + \\ \quad + ((t-\pi) - \sin(t-\pi))\eta(t-\pi). \end{cases}$$

Литература

1. Краснов, М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И., Макаренко – М.: Наука, 1981.

2. Сборник задач по математике для втузов специальные разделы математического анализа – М.: Наука, 1981

УДК 519.216.74

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ УСТОЙЧИВОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ НА СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ РЁССЛЕРА

Черноокий А.Л.

УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест

Научный руководитель Труш Н.Н – доктор физико-математических наук, профессор

В динамике химических реакций с перемешиванием известна довольно простая модель Рёслера [1], задаваемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - z, \\ \frac{dy}{dt} &= x + ey, \\ \frac{dz}{dt} &= f + xz - mz, \end{aligned} \qquad (1)$$

где x, y, z – компоненты решения, e, f, m – параметры модели.

Будем рассматривать модель (1) со стохастическими возмущениями в виде системы стохастических дифференциальных уравнений с устойчивыми приращениями:

$$
\begin{aligned}
&dx = (-y - z)dt,\\
&dy = (x + ey),\\
&dz = (f + xz - mz)dt + cdL_{\alpha,\beta}(t),
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

где c – параметр возмущения, $dL_{\alpha,\beta}(t)$ – б-устойчивый процесс Леви, имеющий фрактальную структуру и неограниченную дисперсию. Алгоритм моделирования процесса $dL_{\alpha,\beta}(t)$ можно взять из [2].

Для моделирования системы (2) на отрезке $[0;T]$ воспользуемся неявным методом Эйлера-Маруями для стохастических дифференциальных уравнений с устойчивыми приращениями[3]. Для этого разобьем отрезок интегрирования на N равных отрезков точками $t_i = i\dfrac{T}{N}, i = \overline{0,N}$ с шагом $h = \dfrac{T}{N}$, при заданных начальных условиях x_0, y_0, z_0. В результате получим следующие выражения для дискретного численного метода, моделирующего значения траектории уравнения (2) в узлах сетки:

$$
\begin{aligned}
&x_{i+1} = x_i + h(-y_{i+1} - z_{i+1}),\\
&y_{i+1} = y_i + h(x_{i+1} + ey_{i+1}),\\
&z_{i+1} = z_i + h(f + x_{i+1}z_{i+1} - mz_{i+1})dt + c(L_{\alpha,\beta}(t_{i+1}) - L_{\alpha,\beta}(t_i)).
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

где $L_{\alpha,\beta}(t_{i+1}) - L_{\alpha,\beta}(t_i)$ – независимые приращения процесса Леви, имеющие устойчивое распределение.

Для решения системы нелинейных уравнений (3) воспользуемся методом Ньютона.

Возьмем $e = 0.19,\ f = 0.4, m = 8.5,\ x_0 = 15, y_0 = 10, z_0 = 10$. Результат моделирования траектории системы (1) на фазовой плоскости (x, y) представлен на рисунке 1.

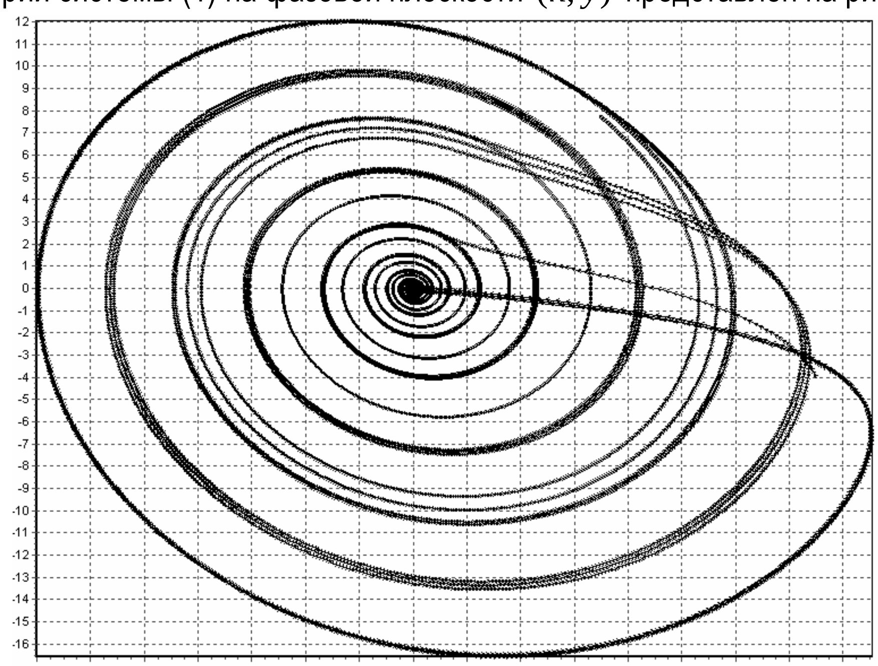

Рисунок 1 – «Слоистый» аттрактор Рёслера без возмущений

Аттрактор Рёслера возникает как результат последовательных бифуркаций удвоения периода, которые начинаются при $m = 3.5$ и приводят при $m = 4.2$ к появлению аттрактора [4]. Это приводит к появлению «полос» с наиболее плотным прохождения траекторий, сам Рёсслер назвал этот аттрактор «слоистым».

Теперь будем последовательно увеличивать параметр возмущения, пока траектория не выйдет из области притяжения аттрактора. Траектория системы (2) на фазовой плоскости (x, y) при $c = 3.5$ представлена на рисунке 2.

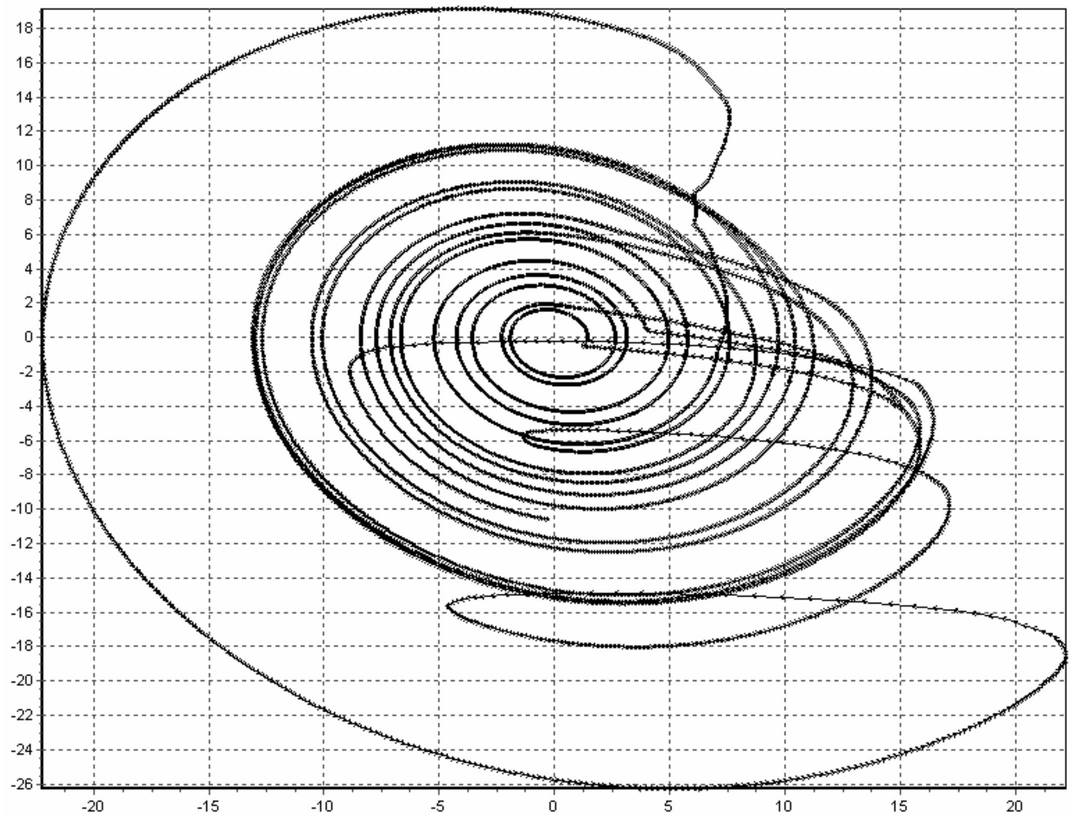

Рисунок 2 – Траектория системы Рёсслера в плоскости (x, y) со стохастическими устойчивыми возмущениями при c=3.5

Как видно из рисунка, «слоистость» аттрактора сохраняется, что свидетельствует об устойчивости неявного метода Эйлера-Маруями.

Литература

1. Ressler, O.E. "Chemical Turbulence: Chaos in a Small Reaction-Diffusion System", Z. Naturforsch. a 31,1168-1172.

2. Janicki, A., Izydorczyk A. Komputerowe metody w modelowaniu stochastycznym. Warszawa. Wydawnictwa Naukowe-Tehniczne. 2001.

3. Труш, Н.Н., Черноокий, А.Л. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений с устойчивыми возмущениями. // Известия Нац. академии наук Беларуси. Сер. физ.-матем. наук, 2009. – No.2 – С. 5–10.

4. Неймарк Ю.И., Ланда, П.С. — Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987. – 422 с.

УДК 517.925

ПОДВИЖНЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ