УДК 517.9

Е.Н. Швычкина

О ПОСТРОЕНИИ СИСТЕМЫ, ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ДИФИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ШАЗИ С ШЕСТЬЮ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

В данной работе построена эквивалентная система для дифференциального уравнения Шази с шестью особыми точками, при условии, что все коэффициенты данного уравнения являются постоянными. Рассмотрен метод нахождения функций, являющихся коэффициентами искомой эквивалентной системы, а также получены условия на параметры, при которых система дифференциальных уравнений является эквивалентной уравнению Шази с шестью особыми точками. Также приведен пример построения таких систем для конкретных коэффициентов. Все вычисления, преобразования и построения выполнены с помощью системы компьютерной алгебры *Mathematica.*

Введение

При исследовании характера подвижных особых точек решений дифференциальных уравнений и во многих других вопросах общей и аналитической теорий обыкновенных дифференциальных уравнений удобнее рассматривать вместо самого дифференциального уравнения эквивалентные ему системы. Например, для уравнений Пенлеве типа второго порядка возможность представления их в виде эквивалентной системы позволили построить преобразования Бэклунда и, в частности, автопреобразования, которые дают возможность находить рациональные и специальные решения этих уравнений [1; 2].

Дифференциальные уравнения третьего порядка с шестью различными полюсами относительно искомой функции классифицировал и изучил Ж. Шази в работе [3]. Результаты его исследований сводятся к следующему:

1. Если решения рассматриваемых уравнений третьего порядка не имеют подвижных критических особых точек, то последние, по необходимости, должны иметь вид:

$$w''' = \sum_{k=1}^{6} \frac{(w'-a_k')(w''-a_k'') + A_k(w'-a_k')^3 + B_k(w'-a_k')^2 + C_k(w'-a_k')}{w-a_k} + D\,w'' +$$
$$+ E\,w' + \prod_{i=1}^{6}(w-a_i)\sum_{k=1}^{6}\frac{F_k}{w-a_k}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) содержит 32 функции по $z: a_k, A_k, B_k, C_k, F_k \ (k=\overline{1,6}),\ D, E$.

2. Кроме того, эти функции должны удовлетворять специальной системе (S), состоящей из 31 алгебраического и дифференциального уравнений.

Для исследования дифференциального уравнения (1), коэффициенты которого удовлетворяют системе (S) на предмет наличия у его решений Пенлеве свойства [3], Шази построил эквивалентные системы. Так, например, в окрестности точки голоморфности функции $w(z)$ решения уравнения (1) им была построена система вида:

$$\begin{cases} \dfrac{w'}{2} + P_3 w' + Q_3 + Pv - Qu = 0, \\ w'' + P_2 w' + Q_2 + \dfrac{\partial P}{\partial w} v - \dfrac{\partial Q}{\partial w} u = 0, \end{cases}$$

где P_3, Q_3, P_2, Q_2 – полиномы от w, степень которых равна нижнему индексу, и коэффициенты которых голоморфны в каждой точке, где голоморфны коэффициенты уравнения (1).

Исследование уравнения (1) было продолжено Н. А. Лукашевичем в работе [2]. Им было доказано, что решение шести неприводимых уравнений Пенлеве выражается через решения частных классов систем вида

$$\begin{cases} uu''-u'^2 = a_0uu'+a_1uv'+a_2u'v+a_3vv'+a_4u^2+a_5uv+a_6v^2, \\ vv''-v'^2 = b_0uu'+b_1uv'+b_2u'v+b_3vv'+b_4u^2+b_5uv+b_6v^2 \end{cases} \tag{2}$$

с аналитическими коэффициентами a_i, b_i $(i=\overline{0,6})$ по z. Им доказано, что если $w(z)$ – решение уравнения Пенлеве, то это решение можно представить в виде

$$w(z) = \frac{u(z)}{v(z)}, \tag{3}$$

где $u(z)$ и $v(z)$ целые функции, удовлетворяющие системе (2). Подстановка (3) сводит систему (2) к уравнению

$$wR\, w''' = L\, w'w'' - R_w'\, w'^3 + M\, w'' + N\, w'^2 + S\, w' + T, \tag{4}$$

которое можно записать в виде (1).

Конкретные значения коэффициентов a_i, b_i $(i=\overline{0,6})$, при которых общее решение (P_6) является частным решением уравнения (4), приведены в [4].

Необходимые и достаточные условия того, чтобы уравнение (4) принадлежало к P – типу, были получены Н.А. Лукашевичем в [5].

Построение эквивалентной системы

В данной работе решается задача о построении новых систем, эквивалентных дифференциальному уравнению Шази (1). Имеет место

Теорема 1. Дифференциальное уравнение Шази вида (1), коэффициенты a_k, A_k, B_k, C_k, F_k $(k=\overline{1,6})$, D, E которого являются постоянными величинами, а $B_k = 0$ $(k=\overline{1,6})$), $\sum_{k=1}^{6} a_k = 0$ и удовлетворяют системе (S), эквивалентно системе вида

$$\begin{cases} w'' = -f_1(z,w)w'^2 + f_2(z,w)v + f_3(w), \\ v' = -2f_1(z,w)w'v, \end{cases} \tag{5}$$

где f_i $(i=\overline{1,4})$ функции по z и w.

Доказательство:

При сделанных в условиях теоремы предположениях из системы (S) следует, что $D=0$, $F_k = 0$ $(k=\overline{1,6})$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$w''' = \sum_{k=1}^{6} \frac{w'w'' + A_k(w')^3 + C_k(w'-a_k')}{w-a_k} + Ew' \tag{6}$$

Продифференцируем первое уравнение системы (5) по z и, подставляя (6) в уравнение Шази (6), сравним коэффициенты при одинаковых степенях w и v. В результате получим систему дифференциальных уравнений для отыскания функций f_i $(i=\overline{1,4})$. Эта система имеет следующий вид:

$$f_2\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{w-a_k} - \frac{\partial f_2}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0, \tag{7}$$

$$-2f_1^2+f_1\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{w-a_k}+\sum_{k=1}^{6}\frac{A_k}{w-a_k}-\frac{\partial f_1}{\partial w}=0, \tag{8}$$

$$E-2f_3f_1+f_3\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{w-a_k}+\sum_{k=1}^{6}\frac{C_k}{w-a_k}+\frac{\partial f_3}{\partial w}=0. \tag{9}$$

Из первых двух уравнений системы (7) находим функцию

$$f_2\,(z,w)=\prod_{k=1}^{6}(w-a_k)\cdot C_2, \tag{10}$$

где C_2 – произвольная постоянная.

Чтобы решить систему (7)–(8) применим метод, который рассматривается в работе [6] для решения линейного уравнения второго порядка класса Фукса с шестью особыми точками. Рассмотрим подробнее процедуру нахождения функции $f_1(z,w)$. Из третьего уравнения системы (7) найдем

$$f_1(z,w)=C_1\cdot G(w),$$

где C_1 – произвольная постоянная, $G(w)$ – некоторая аналитическая функция от w.

Подставим в уравнение (8) функцию $f_1(z,w)$ из последнего соотношения. В результате это уравнение станет уравнением Риккати относительно неизвестной функции $G(w)$. Очевидно, что для построения общего решения уравнения Риккати достаточно знать частное решение этого уравнения. Такое частное решение будем искать в виде:

$$G(w)=\frac{b_0w^5+b_1w^4+b_2w^3+b_3w^2+b_4w+b_5}{w^6-w^5\sigma_1+w^4\sigma_2-w^3\sigma_3+w^2\sigma_4-w\sigma_5+\sigma_6}, \tag{11}$$

где σ_i $(i=\overline{1,6})$ – элементарные симметрические многочлены, составленные из функций a_i $(i=\overline{1,6})$.

В работе [7] было доказано, что коэффициенты A_k $(k=\overline{1,6})$ и коэффициенты a_i $(i=\overline{1,6})$ связаны соотношениями:

$$A_k=\frac{-6a_k^4+4\sigma_1a_k^3+3(\alpha_2-\sigma_2)a_k^2-3\beta_2a_k+3\beta_3-\sigma_4}{6a_k^5-5\sigma_1a_k^4+4\sigma_2a_k^3-3\sigma_3a_k^2+2\sigma_4a_k-\sigma_5}\quad (k=\overline{1,6}), \tag{12}$$

где величины α_2, β_2, β_3 определяются согласно формулам:

$$\beta_2=\frac{(3\alpha_2-\sigma_2)(2\alpha_2\sigma_1-3\sigma_3)-2\sigma_1\sigma_4+6\sigma_5}{18\alpha_2+\sigma_1^2-6\sigma_2}, \tag{13}$$

$$\beta_3=\frac{2\sigma_1\sigma_5-(3\alpha_2-\sigma_2)(12\alpha_2^2-4\alpha_2\sigma_2+\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4)-2\sigma_1\sigma_4+6\sigma_5}{2(18\alpha_2+\sigma_1^2-6\sigma_2)}, \tag{14}$$

а функция α_2 удовлетворяет уравнению пятой степени:

$$\begin{aligned}&1296\alpha_2^5-1296\sigma_2\alpha_2^4-3\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^2+(432\sigma_2^2+216\sigma_1\sigma_3-432\sigma_4)\alpha_2^3+2\sigma_1^3\sigma_3\sigma_4+\\&+12\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4-8\sigma_1^2\sigma_4^2-6\sigma_1^2\sigma_3\sigma_5-36\sigma_2\sigma_3\sigma_5+48\sigma_1\sigma_4\sigma_5-72\sigma_5^2+4\sigma_1^4\sigma_6-\\&-48\sigma_1^2\sigma_2\sigma_6+144\sigma_2^2\sigma_6+\alpha_2^2(-48\sigma_2^3-144\sigma_1\sigma_2\sigma_3+24\sigma_1^2\sigma_4+288\sigma_2\sigma_4-216\sigma_1\sigma_5+\\&+1296\sigma_6)+\alpha_2(24\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_3^2-8\sigma_1^2\sigma_2\sigma_4-48\sigma_2^2\sigma_4-36\sigma_1\sigma_3\sigma_4-4\sigma_1^3\sigma_5+\\&+72\sigma_1\sigma_2\sigma_5+108\sigma_3\sigma_5+144\sigma_1^2\sigma_6-864\sigma_2\sigma_6.\end{aligned} \tag{15}$$

Для дальнейших вычислений, используя соотношения (12), удобно представить дробь $\sum_{k=1}^{6}\frac{A_k}{w-a_k}$ в виде:

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{A_k}{w-a_k}=-\frac{6w^4-4\sigma_1 w^3-3w^2\alpha_2+3\sigma_1 w^2+3\beta_2 w-3\beta_3+\sigma_4}{w^6-w^5\sigma_1+w^4\sigma_2-w^3\sigma_3+w^2\sigma_4-w\sigma_5+\sigma_6}. \qquad (16)$$

Используя равенства (12) – (16), уравнение (8) можно переписать в виде

$$2G^2+\frac{6w^4-4w^3\sigma_1-3\alpha_2 w^2+3w^2\sigma_2+3w\beta_2-3\beta_3+\sigma_4}{w^6-w^5\sigma_1+w^4\sigma_2-w^3\sigma_3+w^2\sigma_4-w\sigma_5+\sigma_6}-$$

$$-\frac{6w^5-5w^4\sigma_1+4w^3\sigma_2-3w^2\sigma_3+2w\sigma_4-\sigma_5}{w^6-w^5\sigma_1+w^4\sigma_2-w^3\sigma_3+w^2\sigma_4-w\sigma_5+\sigma_6}G-G'=0.$$

Для определения величин b_k $(\mathrm{k}=\overline{0,5})$, σ_i $(i=\overline{1,6})$ подставим функцию из (11) в последнее уравнение, и, проведя соответствующие преобразования, запишем уравнение десятой степени относительно w. Приравнивая коэффициенты полученного уравнения при одинаковых степенях w, получим систему из одиннадцати алгебраических уравнений, которую обозначим (A), где неизвестными являются коэффициенты b_k $(k=\overline{0,5})$ и σ_i $(i=\overline{1,6})$. Первое уравнение системы (A), полученное для коэффициента при десятой степени, имеет вид:

$$2b_0^2-7b_0+6=0.$$

Отсюда находим: $b_0=2$ или $b_0=3/2$.

Для значения $b_0=2$, последовательно решая полученную систему (A) при условии $\sum_{k=1}^{6}a_k=0$, найдем частное решение (11) уравнения Риккати:

$$G(w)=\frac{10w}{5w^2+3\alpha_2}.$$

Таким образом,

$$f_1(z,w)=\frac{2(10C_1 w(5w^2+3\alpha_2)-3\alpha_2(3w^2+\alpha_2)}{2(C_1(5w^2+3\alpha_2)^2-6w\alpha_2(w^2+\alpha_2))+5\sigma_5}. \qquad (17)$$

Зная вид функции $f_1(z,w)$ из (17), определим функцию $f_3(w)$ из равенства (9) как решение линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка.

Подставив найденные функции $f_i(z,w)$ $(i=\overline{1,4})$ в систему (5), построим эквивалентную систему в явном виде.

Замечание 1. При значении $b_0=2$ результате вычислений получаем действительное решение уравнения (8) в виде функции (17). При $b_0=3/2$ ситуация усложняется, так как частное решение уравнения Риккати является компклеснозначной функцией:

$$G(w)=(\frac{3w^5}{2}+\frac{(13\alpha_2^2+3i\sqrt{3}\sigma_3\sqrt{\alpha_2}+3\sigma_4)w^3}{6\alpha_2}+$$

$$+\frac{(18\sigma_3\alpha_2^2 + i\sqrt{3}(20\alpha_2^2 - 9\sigma_4)\alpha_2^{3/2})w^2}{24\alpha_2^2 - 9i\sqrt{3}\sigma_3\sqrt{\alpha_2} - 9\sigma_4} +$$

$$+\frac{1}{18}(16\alpha_2^2 - 33i\sqrt{3}\sigma_3\sqrt{\alpha} + 21\sigma_4)w +$$

$$+\frac{\sigma_3(9\alpha_2\sigma_4 - 24\alpha_2^3) - i\sqrt{3\alpha_2}(16\alpha_2^4 - 12\sigma_4\alpha_2^2 + 3\sigma_4^2)}{24\alpha_2^2 - 9i\sqrt{3\alpha_2}\sigma_3 - 9\sigma_4}) /(w^6 +$$

$$+\frac{(19\alpha_2^2 + 3i\sqrt{3\alpha_2}\sigma_3 + 19\sigma_4)w^4}{9\alpha_2}) + \frac{4i\alpha_2^{3/2}w^3}{3\sqrt{3}} + (\frac{4\alpha_2^2}{3} + i\sqrt{3\alpha_2}\sigma_3 + \sigma_4)w^2 -$$

$$-\frac{4i\sqrt{\alpha_2}(4\alpha_2^2 - 3\sigma_4)w}{27\sqrt{3}} + (2\alpha_2(112\alpha_2^6 + 88\sigma_4\alpha_2^4 - 120\sigma_4^2\alpha_2^2 + 135i\sqrt{3\alpha_2^3}\sigma_3^3 -$$

$$-3i\sqrt{3}\sigma_3(128\alpha_2^4 - 42\sigma_4\alpha_2^2 - 3\sigma_4^2)\sqrt{\alpha_2} + 27\sigma_3^2 -$$

$$-9\sigma_3^2(88\alpha_2^3 - 21\alpha_2\sigma_4))) /(27(-8\alpha_2^2 + 3i\sqrt{3\alpha_2}\sigma_3 + 3\sigma_4)^2)).$$

Пример

Построим эквивалентную систему (5) для уравнения Шази (6), коэффициенты которого a_k $(k = \overline{1,6})$ имеют вид:

$$a_1 = 1,\quad a_2 = -\frac{1}{2},\quad a_3 = -\frac{1}{4},\quad a_4 = -1,\quad a_5 = \frac{1}{4},\quad a_6 = \frac{1}{2}. \qquad (18)$$

При таких a_k $(k = \overline{1,6})$ выполняется условие $\sum_{k=1}^{6} a_k = 0$.

Сначала вычислим значения величин

$$\sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = -\frac{1}{2},\ \sigma_3 = -\frac{1}{4},\ \sigma_4 = -1,\ \sigma_5 = \frac{1}{4},\ \sigma_6 = \frac{1}{2} \qquad (19)$$

и подставим значения (18) и (19) в соотношение (15). В результате получим уравнение пятой степени:

$$(7 + 16\alpha_2)(64\alpha_2^3 + 28\alpha_2^2 - 7\alpha_2 - 1) = 0. \qquad (20)$$

Корень $\alpha_2 = -7/16$ сразу исключим из рассмотрения, поскольку он обращает знаменатели правых частей уравнений (13) и (14) в ноль. Корнями второго множителя левой части равенства (20) будут $\alpha_2 = 1/4$, $\alpha_2 = \frac{-\sqrt{57} - 11}{32}$, $\alpha_2 = \frac{\sqrt{57} - 11}{32}$. Для простоты вычислений рассмотрим корень

$$\alpha_2 = 1/4. \qquad (21)$$

Подставив значения (18), (19) в соотношения (13)–(16), найдем значения коэффициентов:

$$A_1 = -2,\ A_2 = 2,\ A_3 = -\frac{13}{10},\ A_4 = \frac{13}{10},\ A_5 = -\frac{14}{5},\ A_6 = \frac{14}{5}.$$

Затем, используя формулы (10) и (17), определим функции $f_1(z,w)$ и $f_2(z,w)$:

$$f_1(z,w) = \frac{-3 + 4w(30C_1 + w(200C_1w - 9))}{9C_1 + 2w(-3 + 4w(15C_1 + w(50C_1w - 3)))}, \qquad (22)$$

$$f_2(z,w)=\frac{1}{64}(64w^6-84w^4+21w^2-1). \qquad (23)$$

Из уравнения (9) с коэффициентами вида (18)–(23) находим функцию $f_3(w)$:

$$f_3(w)=((64w^6-84w^4+21w^2-1)(2777211C_3+E((150(6286742+15634157w-$$
$$-30326215w^2 18546780w^3+47127380w^4-24388270w^5)-C_1(12426403234+$$
$$+36621655999w-193509801425w^2-175283033200w^3+376943153956w^4+$$
$$+19973889121w^5))/(225(64w^6-84w^4+21w^2-1))-$$
$$-\frac{4(4088484232C_1-765054575)\ln(w-1)}{3375}-\frac{2}{3}(54846490C_1+3607689)\ln(w+1)-$$
$$-\frac{4}{3}(26012080C_1-2777211)\ln(2w-1)+\frac{4}{27}(30019232C_1+23428947)\ln(2w+1)+$$
$$+(38488969C_1-4612584)\ln(4w-1)-\frac{1}{125}(855443961C_1+$$
$$+132866150)\ln(4w+1)))/(277211(C_1(20w^2+3)^2-6(4w^3+w))), \qquad (24)$$

где C_1, C_2, C_3 произвольные постоянные.

Таким образом, все коэффициенты системы (5) определены и построенная система с коэффициентами (22)–(24) является эквивалентной уравнению Шази (6).

Замечание 2. В процессе проведения аналитических вычислений при построении эквивалентных систем, а также при сравнении частных решений (решений задач Коши) у уравнения (6) и эквивалентной ему системы (5) удобно использовать системы компьютерной математики *Mathematica*. Например, решим задачу Коши для уравнения (6) при коэффициентах a_k $(k=\overline{1,6})$ вида (18)

$$-8331633w'^3(128w^4-100w^2+11)+w'(-17774150Ew^6-103817108Ew^4-$$
$$-39745721Ew^2+11997139E+14w(8331633w''+758201E)+32w^5(33326532w''+$$
$$+4915919E)-4w^3(23328572w''+4956527E)-2777211(64w^6-84w^4+$$
$$+21w^2-1)w'''/(2777211(64w^6-84w^4+21w^2-1))=0. \qquad (25)$$

Интегрируя уравнение (25) с использованием функции NDSolve, можно найти его частное решение для заданных начальных условий. Его график, например, при

$$w(0)=1{,}5,\ w'(0)=1{,}5,\ w''(0)=1{,}5, E=0$$

имеет вид (рисунок, прерывистая линия).

Используем также функцию NDSolve для интегрирования системы (5), (22)–(24) эквивалентной уравнению (25). Решение построенной системы (5), (22)–(24) при

$$w(0)=1{,}5,\ w'(0)=1{,}5,\ v(0)=0,\ E=0,$$

$$C_1=0, C_3=\frac{25}{72}, C_2 \text{ – произвольное число,}$$

имеет вид (рисунок, сплошная линия).

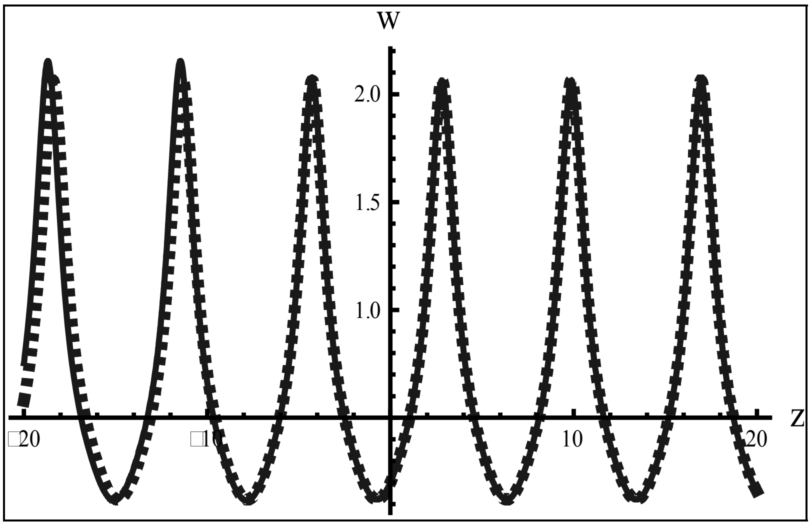

Рисунок – График функции $w(z)$ на интервале $(-20, 20)$

Видим, что графики обоих частных решений совпадают.

Заключение

В работе построен новый класс эквивалентных систем для дифференциального уравнения Шази с шестью особыми точками, при условии, что все коэффициенты данного уравнения являются постоянными величинами. Рассмотрен метод нахождения функций, являющихся коэффициентами искомой эквивалентной системы, а также получены условия на параметры, при которых система дифференциальных уравнений является эквивалентной уравнению Шази с шестью особыми точками. Также приведен пример построения таких систем для конкретных коэффициентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудряшов, Н.А., Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений / Н.А. Кудряшов. – Москва : Ижевск, 2004. – 360 с.

2. Лукашевич, Н.А. К теории уравнения Шази / Н.А. Лукашевич // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, №2. – С. 353–357.

3. Chazy, J. Sur les equations differentielles du troisieme order et d'ordre superieur, don't l'integrale generale a ses points critiques fixes / J. Chazy // Acta Math. – 1911. – № 34 – P. 317–385.

4. Мкртумян, Р.Р. Аналитическая характеристика решений некоторых специальных классов линейных и нелинейных дифференциальных уравнений : Автореф…. дис. канд. физ.-мат. Наук : 01.01.02 / Р.Р. Мкртумян. – Минск, 1982. – 14 с.

5. Лукашевич, Н.А. Уравнения третьего порядка без подвижныхкритических точек (п.к.т.) / Н.А. Лукашевич // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, №5. – С. 778–785.

6. Чичурин, А.В. Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса : Монография / А.В.Чичурин. – 2-е изд., доп. и перераб. – М. : Изд-во РУДН 2003. – 163 с.

7. Мартынов, И.П. О решении системы уравнений Шази / И.П. Мартынов, А.В. Чичурин // Неінійні коливання. – 2009. – Т. 12, № 1. – С. 92–98.

H.N. Shvychkina. **The Building of Equivalent System With Six Singularities**

In this paper the building of equivalent system of the Chazy differential equation with six singularities. We considered the case, when all coefficients are constants. We formulated the conditions for parameters, when the system of differential equations is equivalent of the Chazy equation. We represent examples here which illustrates given considered method. All calculations, transformations and plotting were done with computer algebra system *Mathematica.*