розв'язувати геометричними методами. Часто застосування геометричних методів приводить до більш простого та наочного розв'язання.

Список використаних джерел

1. Генкин Г. З. Геометрические решения негеметрических задач: кн. для учителя / Г. З. Генкин. – М. : Просвещение, 2007. – 79 с.
2. Блинков А. Д. Геометрия в негеометрических задачах / А. Д. Блинков. – М. : МЦНМО, 2016. – 160 с.

О СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ ТОЧНЫМИ И ПРИБЛИЖЕННЫМИ РЕШЕНИЯМИ МОДЕЛИ ХЕМОСТАТА, СОДЕРЖАЩЕЙ ДВА СУБСТРАТА И ОДИН МИКРООРГАНИЗМ

Чичурин А. В. [1]***, Швычкина Е. Н.*** [2]

[1] *КУЛ, г. Люблин, Польша, ВЕУ им. Леси Украинки, г. Луцк, Украина*

[2]*БрГТУ, г. Брест, Беларусь*

Рассматривается модель хемостата, в которой присутствуют два питательных субстрата s_1, s_2 и один микроорганизм, концентрация которого обозначена через x. Модели, связанные с наличием двух или более субстратов важны для изучения, поскольку при взаимодействии этих субстратов изменяется эффективность роста микроорганизма (микроорганизмов). Выделяют два основных механизма взаимодействия субстратов [1]: *взаимодополняющие*, когда происходит взаимодействие между субстратами и *взаимодополняющие*, когда взаимодействия нет [1, 2]. Рассматриваемая модель описывается системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\frac{ds_1}{dt}=(s_{10}-s_1)D-\frac{x}{y_1}f(s_1,s_2),\ \frac{ds_2}{dt}=(s_{20}-s_2)D-\frac{x}{y_2}f(s_1,s_2),\ \frac{dx}{dt}=(f(s_1,s_2)-D)x \qquad (1)$$

с заданными начальными условиями

$$s_1(0)=s_{10}\ge 0,\ s_2(0)=s_{20}\ge 0,\ x(0)=x_0\ge 0, \qquad (2)$$

где $y_i\ (i=1,2)$ – коэффициенты экономичности использования субстрата, показывающие какая доля i-го субстрата идет на увеличение биомассы микроорганизма на единицу потребляемого ресурса.

В случае, если субстраты взаимозаменяемы, функция $f(s_1,s_2)$ имеет вид

$$f(s_1,s_2)=\frac{m_1 s(t)}{a_1+s(t)}+\frac{m_2 s(t)}{a_2+s(t)}; \qquad (3)$$

если субстраты взаимодействуют между собой, то

$$f(s_1,s_2)=\frac{m_1 s(t)}{a_1+s(t)}\cdot\frac{m_2 s(t)}{a_2+s(t)}. \qquad (4)$$

Величины D, m_1, m_2 и a_1, a_2 в соотношениях (1), (3), (4) являются биологическими параметрами и принимают действительными положительные значения.

Для системы (1)–(3) были найдены коэффициентные соотношения

$$y_2(a_2 + s_{20}) = y_1(a_1 + s_{10}),\ D = m_1 + m_2,\ C_2 y_2 = C_1 y_1, \qquad (5)$$

при которых третье уравнение системы (1) интегрируется в специальных функциях [2]. Так, например, для набора значений параметров

$$s_{10} = 1, m_1 = 3, a_1 = 1/2\,, y_2 = 2, m_2 = 2, a_2 = 1/3\,, y_1 = 1 \qquad (6)$$

и начального условия $x(0) = 4$ решением является функция

$$e^{3t-\frac{x}{2}}x^{5/4} + 2^{1/4}\Gamma(\tfrac{1}{4}, 2) = 4e^{-x/2}x^{1/4} + 2^{1/4}\Gamma(\tfrac{1}{4}, \tfrac{x}{2}). \qquad (7)$$

Третье дифференциальное уравнение системы (1) при условии, что $t \to \infty$ имеет более простой вид [1] и его общее решение может быть записано в форме

$$\frac{x}{6} - \frac{5\ln(x)}{12} = t + C_1. \qquad (8)$$

На рисунке 1 изображены график функции (7) (сплошная линия) и график функции (8) (пунктирная линия). Обе кривые проходят через точку (1.45, 0.1).

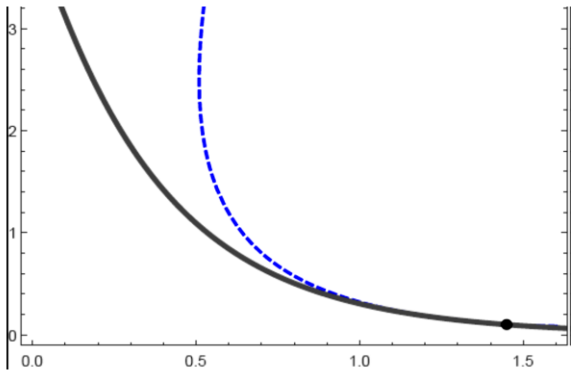

Рис. 1. Интегральные кривые (7) и (8), проходящие через точку (1.45, 0.1)

Находя пределы функции (7) при достаточно больших t и рассматривая визуализацию соответствующих кривых можно сделать вывод о том, что при исследовании численности микроорганизма *x(t)* с увеличением времени *t* можно вместо интеграла (7) использовать приближенное решение (8), которое, очевидно, намного проще.

Показано наличие действительных наборов параметров, при которых систему (1), (2), (4) можно проинтегрировать. Например, если выполняются коэффициентные соотношения вида

$$D = m_1 m_2, s_{20} = \frac{a_2 s_{10}}{a_1}, y_2 = \frac{a_1 y_1}{a_2}, C_1 = -\frac{a_1}{a_2}C_2, \qquad (9)$$

то с помощью замен $t = -\frac{\ln\tau}{D}$, $\tau^2 = w$ удается проинтегрировать систему (1), (2), (4) в квадратурах. Первые три условия (9) удовлетворяют ограничениям модели хемостата, а именно, являются положительными величинами. Последнее условие (9) говорит о том, что величины $C_1\, и\, C_2$ имеют противоположные знаки, что противоречит условиям $C_1 = -\frac{x_0}{y_1}, C_2 = -\frac{x_0}{y_2}$, полученным в работе [2].

Приведен анализ результатов исследований для точных и приближенных решений модели хемостата, содержащей два субстрата и один микроорганизм, которые были получены ранее авторами. Отмечена целесообразность рассмотрения ненулевых отрицательных произвольных постоянных в первых интегралах системы дифференциальных уравнений, описывающей модель хемостата. Рассмотрены примеры, в которых для конкретных значений параметров приведена оценка точных и приближенных решений модели хемостата.

Список используемой литературы

1. Braselton J. P. Comparing the Effects of Interactive and Noninteractive Complementary Nutrients on Growth in a Chemostat / J. P. Braselton, M. L. Abell, L. M. Braselton // Open Journal of Applied Sciences.− 2013.− Vol. 3. − P. 323–331.

2. Chichurin, A. On the solutions of the chemostat model, that contains one microorganism and two complimentary or supplementary nutrients / A. Chichurin, A. Shvychkina // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. – Siedlce, 2017. – Vol. VI. – P. 232–238.