

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Строительная механика

Рекомендовано Советом университета
в качестве пособия
по дисциплине «Строительная механика»
для студентов строительных специальностей

Брест 2015

УДК 624.04
ББК 38.112я73
И 26

Рецензенты:

заместитель директора филиала УП «БелНИИС» – «Научно-технический центр», кандидат технических наук Деркач Валерий Николаевич;

заведующий кафедрой «Строительные конструкции» Брестского государственного технического университета, кандидат технических наук, доцент Шалобыта Николай Николаевич.

В.И. Игнатюк, И.С. Сыроквашко

И 26 Строительная механика: пособие. – Брест: Изд-во БрГТУ, 2015. – 150 с.

ISBN 978-985-493-188-3

В пособии изложены основы строительной механики плоских стержневых систем, включая основные понятия и принципы строительной механики, кинематический анализ сооружений, определение внутренних сил и перемещений в статически определимых рамах, расчет усилий в статически определимых фермах, расчет статически неопределимых рам методом сил и методом перемещений. Приведены примеры расчетов и задачи для самостоятельной работы с решениями.

Пособие предназначено для студентов строительных специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 624.04
ББК 38.112я73

© В.И. Игнатюк, 2015
© И.С. Сыроквашко, 2015
© Издательство БрГТУ, 2015

ISBN 978-985-493-188-3

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Строительная механика и ее задачи

Строительная механика, кратко, – это наука о расчете сооружений на прочность, жесткость и устойчивость.

Основная задача строительной механики – определение напряженно-деформированного состояния сооружений, то есть определение внутренних сил (усилий) и перемещений, возникающих в элементах сооружений от внешних воздействий – силовых, кинематических (смещений опор), температурных.

К задачам строительной механики относятся также изучение принципов образования сооружений, исследование условий их устойчивости и поведения сооружений при различных подвижных и динамических нагрузках.

1.2. Расчетная схема сооружения, нагрузки и воздействия

Строительная механика служит расчету и проектированию реальных сооружений. Однако расчет реального сооружения с точным учетом всех его особенностей является сложной и, в большинстве случаев, практически неразрешимой задачей. Поэтому этот расчет упрощают, заменяя реальное сооружение его расчетной схемой.

Расчетная схема сооружения – это упрощенная, идеализированная схема реального сооружения, вводимая в расчет, в которой отражены основные его свойства и пренебрегается второстепенными свойствами и несущественными деталями, незначительно влияющими на работу сооружения.

Выбор расчетной схемы во многом определяет трудоемкость расчета и корректность получаемых результатов. Для определения расчетной схемы сооружения необходимо иметь опыт в расчете сооружений, хорошо представлять работу рассматриваемого сооружения и отдельных его элементов, принципы взаимодействия элементов сооружения друг с другом.

Все сооружения являются пространственными системами. Однако часто, если это позволяет сделать структура сооружений, пространственные системы разделяют на плоские, – в этом случае их расчет значительно упрощается. Такой подход можно применить, если в пространственной системе можно выделить плоские несущие элементы (рамы, фермы), связанные между собой поперечными связями.

В конструкциях сооружений выделяют стержневые элементы, пластины, оболочки и массивные тела, которые соединяются между собой в единую систему посредством узловых соединений (или просто узлов) и опираются на землю (основание) посредством опорных устройств (опор).

Стержневые элементы – это прямолинейные или криволинейные пространственные элементы, у которого один размер (длина) значительно больше двух других (поперечных размеров). На расчетных схемах такие элементы заменяются их осевыми линиями (прямыми, кривыми или ломаными) и называют стержнями. При этом в расчетах, естественно, учитываются и параметры поперечных сечений этих элементов через соответствующие их характеристики (площади поперечных сечений, моменты инерции и т. д.), приведенные к цен-

трам сечений.

Если сооружение состоит только из стержневых элементов, то оно является стержневой системой.

Реальные опорные устройства на расчетных схемах заменяются идеальными опорами (опорными связями). Опоры – это устройства, передающие нагрузки от сооружений, конструкций на основание, связанное с Землей.

Основные виды опор и их характеристики представлены в таблице 1.1 (суть понятий «кинематическая связь» и «степень свободы» – см. далее).

Таблица 1.1

Основные виды опор

№ пп	Название опоры	Возможная конструктивная схема опоры	Изображение на расчетных схемах	Число кинематических связей	Число реакций (и их составляющих)	Число степеней свободы
1	Шарнирно подвижная			1	1	2
2	Шарнирно неподвижная			2	1(2)	1
3	Защемление, заделка			3	2(3)	0
4	Подвижная заделка			2	2	1

Узлы могут быть жесткими, шарнирными и упругими (податливыми).

Шарнирное соединение (или просто шарнир) рассматривается как устройство, допускающее взаимный поворот соединяемых элементов относительно центра шарнира. На расчетных схемах шарнир обозначается кружком. Силами трения в шарнирах обычно пренебрегают.

Жесткое соединение элементов (жесткий узел) полностью устраняет их взаимное смещение, и угол между осями стержней в нем не изменяется при деформировании системы.

Разделение узлов на идеально шарнирные и идеально жесткие не всегда

соответствуют действительности. Часто узлы имеют податливость и допускают взаимные смещения соединяемых элементов (повороты, сдвиги), зависящие от возникающих в узле внутренних сил. На расчетных схемах податливые узлы специально оговаривают или изображают с упругими связями – линейными (рис. 1.1 *а*) или угловыми (рис. 1.2 *а*). Внутренние силы в податливом узле связаны со взаимным смещением соединяемых элементов. Например, величина изгибающего момента в узле на рис. 1.2 *а* будет зависеть от взаимного угла поворота соединяемых стержней и может быть выражена через значение упругой податливости узла c , представляющего собой величину изгибающего момента, возникающего при взаимном повороте соединяемых в узле элементов на единичный угол (рис. 1.2 *б*).

Рис. 1.1

Рис. 1.2

В реальных сооружениях любые элементы (стойки, балки, пластины, оболочки и т. д.) всегда имеют какие-то отклонения от проектных форм, размеров, свойств используемых материалов, которые возникают при их изготовлении, транспортировке, сборке и которые на расчетных схемах чаще всего не учитываются. Невозможно представить себе идеально прямую стойку, которая на расчетных схемах представляется прямым стержнем.

Шарнирные соединения элементов (шарниры) считаются идеальными, то есть считается, что в них отсутствуют силы трения, а усилия передается через центры шарниров, что на практике трудно достижимо.

Еще больше приближений связано с нагрузками, определить точные величины которых в ряде случаев практически невозможно. Нормативные значения снеговых и ветровых нагрузок рассчитываются на основе статистической обработки величин нагрузок по результатам многолетних наблюдений. Разделение нагрузок на сосредоточенные силы и моменты, на равномерно распределенные нагрузки также достаточно условно.

Выбор расчетной схемы является первым весьма важным и сложным этапом расчета – расчетную схему надо выбрать так, чтобы учесть все основные особенности данного сооружения и при этом максимально облегчить расчет.

Степень точности отражения расчетной схемой реальной работы сооружения связана с возможностями учета в расчетной схеме:

- действительной геометрии элементов сооружения и их соединений;
- разнообразных физико-механических свойств материалов сооружения;
- реально действующих на сооружение воздействий и нагрузок;
- использования методов расчета, компьютерных программ и вычислительной техники, позволяющих выполнить расчет с необходимой точностью.

Все **воздействия на сооружения** можно разделить на силовые (нагрузки),

температурные и кинематические (смещения опор и связей).

При этом воздействия могут быть *статическими* и *динамическими*.

К *статическим* относят воздействия и нагрузки, которые при приложении возрастают от нуля до конечной величины настолько медленно, что скорости и ускорения точек систем при их деформировании малы и можно пренебречь силами инерции.

К *динамическим* относят воздействия, которые сообщают массам сооружения существенные ускорения и соответственно вызывают такие силы инерции, что их влияние должно учитываться.

Примерами динамических воздействий являются ударные и вибрационные нагрузки, воздействия взрывных волн, сейсмические воздействия.

Динамические нагрузки и особенности поведения сооружений при их действии изучаются в разделе «Динамика сооружений».

Силовые воздействия или нагрузки представляются сосредоточенными силами, сосредоточенными моментами, распределенными нагрузками постоянной или переменной интенсивности. Эти нагрузки могут быть *подвижными* и *неподвижными*. *Неподвижные* нагрузки действуют постоянно в одном месте. *Подвижные* перемещаются по системе (например, транспорт по мосту).

1.3. Классификация сооружений

Классификация сооружений и их расчетных схем может выполняться по различным признакам, часть из которых представлена ниже.

Все сооружения являются *пространственными*. Однако, как уже указывалось, часто они могут рассчитываться и рассчитываются как *плоские* системы. В данном пособии далее рассматриваются только плоские стержневые системы.

По геометрическим признакам выделяют:

1. Стержневые сооружения (состоящие из стержней – балки, фермы, рамы).
2. Сооружения из пластин и оболочек.
3. Массивные сооружения (подпорные стены, плотины).

По особенностям работы сооружений различают:

1. Балочные конструкции.
2. Арочные конструкции.
3. Рамы – стержневые системы с жестким соединением элементов во всех либо некоторых узлах.
4. Фермы – системы, все элементы которых испытывают практически только растяжение-сжатие.
5. Висячие системы – в которых основные, преимущественно гибкие элементы работают только на растяжение.
6. Комбинированные системы, представляющие комбинацию сооружений 1–5.
7. Плиты.
8. Оболочки.

С точки зрения статики системы делятся на:

1. Статически определимые системы – не имеющие «лишних» связей и, соответственно, расчет которых может быть выполнен с использованием только

уравнений равновесия (уравнений статики).

2. Статически неопределимые системы – имеющие «лишние» связи, для расчета которых необходимо привлекать дополнительные уравнения.

По направлениям опорных реакций выделяют:

1. Безраспорные сооружения – сооружения, у которых нагрузка одного направления (например, вертикальная) вызывает опорные реакции того же направления (только вертикальные). Пример: простые и многопролетные балки.

2. Распорными называют сооружения, у которых при нагрузке одного направления возникают опорные реакции и в других направлениях. Примерами распорных систем являются арки, трехшарнирные рамы.

1.4. Основные допущения, принципы и понятия

В основу классических методов строительной механики положены следующие **основные допущения, принципы и понятия**:

1. Предполагается, что материал всех элементов сооружений является *сплошным, изотропным и однородным*. Изотропным называется материал, свойства которого по всем направлениям одинаковы.

2. Тела считают *идеально упругими*. Такие тела полностью восстанавливают свою первоначальную форму и размеры после удаления внешней нагрузки.

3. Рассматриваются материалы, удовлетворяющие *закону Гука*, согласно которому зависимость между нагрузками и перемещением линейна;

4. Для систем и сооружений в целом также принимается физическая модель, для которой выполняется линейная зависимость между нагрузками и перемещениями, и такие системы называют *линейно-деформируемыми* или *упругими*.

5. Рассматривается *статическое приложение нагрузок*.

6. Принимается, что для нагрузок и воздействий, действующих на сооружения, справедлив *принцип независимости действия сил*, согласно которому – результат действия суммы сил равен сумме результатов действия каждой силы в отдельности.

2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ

Строительные сооружения предназначены воспринимать действующие на них нагрузки, сохраняя при этом заданную форму, и поэтому они должны быть геометрически неизменяемыми.

Геометрически неизменяемые системы – это системы, изменение формы и взаимного расположения элементов которых возможно только вследствие деформации их элементов.

Таким образом, в элементах неизменяемых систем допускается и будет иметь место изменяемость, которая возникает в результате деформирования этих элементов (прогибы, продольное сжатие-растяжение и т. п.).

Примером простейшей неизменяемой системы является трехстержневой шарнирный треугольник (рис. 2.1).

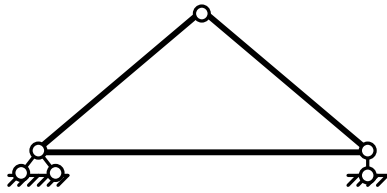


Рис. 2.1

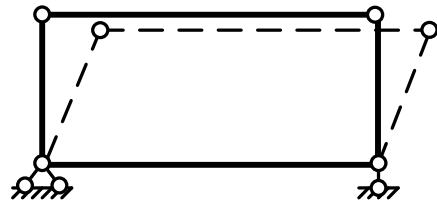


Рис. 2.2

Геометрически изменяемые системы – это системы, изменение формы и взаимного расположения элементов которых возможно без деформации их элементов. Простейшим примером изменяемой системы является шарнирно-стержневой четырехугольник (рис. 2.2).

Изменяемые системы в сооружениях недопустимы, так как они могут резко менять форму и не могут воспринимать действующие на них нагрузки.

Для выяснений геометрической неизменяемости или изменяемости систем служит кинематический анализ сооружений, который должен предшествовать расчету и выполняется в два этапа:

- 1) определение степени свободы системы;
- 2) геометрический анализ структуры системы.

Степень свободы системы – это число независимых геометрических параметров (перемещений, координат), определяющих положение всех элементов сооружения на плоскости или в пространстве.

Например, точка на плоскости имеет две степени свободы, так как её положение характеризуется двумя координатами (рис. 2.3а).

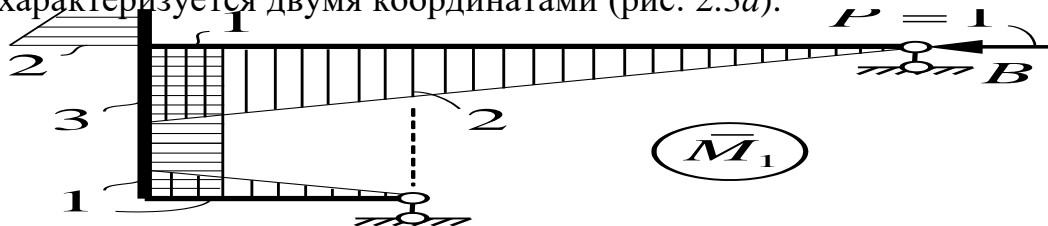


Рис. 2.3

Точка в пространстве имеет три степени свободы.

Любое заведомо неизменяемое тело, сооружение либо его часть будем называть *диск*.

Примеры дисков представлены на рис. 2.4.

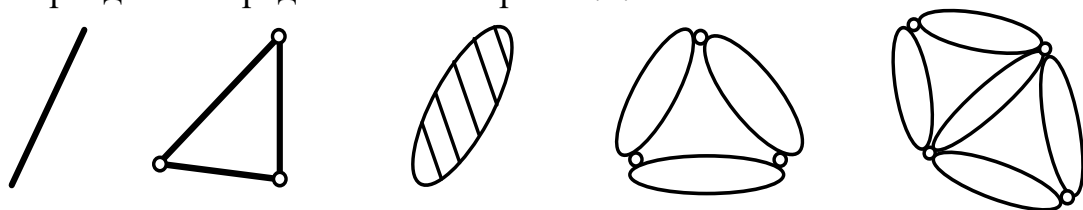


Рис. 2.4

Любой диск на плоскости обладает тремя степенями свободы – его положение на плоскости определяется тремя параметрами (x_A , y_A , φ) (рис. 2.3б).

В пространстве диск имеет шесть степеней свободы – три координаты некоторой точки и три угла поворота относительно осей x , y , z .

Всякое тело, отнимающее у другого тела одну степень свободы, называется кинематической или простой связью.

Сооружения на расчетных схемах, как уже отмечалось, могут быть представлены в виде систем, состоящих из дисков, соединенных между собой шарнирами, и опирающихся на основание (на землю) с помощью опор.

При этом следует различать: – шарнирный узел (*шарнир*)
– и *простой* или *одиночный шарнир*.

Одиночный, простой шарнир – это шарнир, соединяющий два диска.

В шарнирах, как шарнирных узлах, соединяющих ряд дисков, будет несколько простых шарниров, число которых может быть определено по формуле:

$$n_{п.ш.} = D_y - 1,$$

где D_y – число дисков, соединяющихся в узле.

Например:

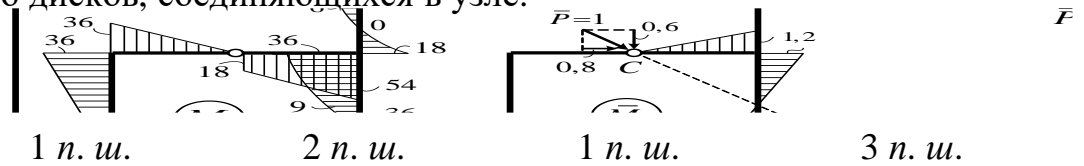


Рис. 2.5

Каждый простой шарнир препятствует любым взаимным линейным перемещениям соединяемых элементов, оставляя возможность их взаимного поворота друг относительно друга, соответственно имеет две кинематические связи, и при разрезании в нем возникает две внутренние силы (рис. 2.6).

Определение степени свободы системы

может быть выполнено по формулам:

$$1. \quad W = - (3K - Ш), \quad (2.1)$$

где: K – число замкнутых контуров в системе;

$Ш$ – число простых, одиночных шарниров в системе, включая шарниры между дисками (стержнями) и основанием (землей).

Под замкнутым контуром будем понимать замкнутую цепь, образованную последовательным соединением жестко либо шарнирно ряда дисков, одним из которых может выступать и земля (основание) (рис. 2.7)

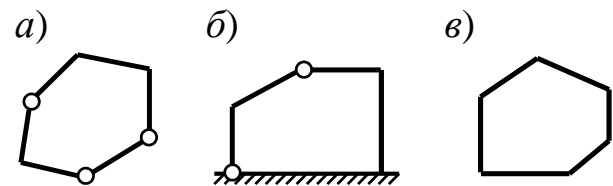


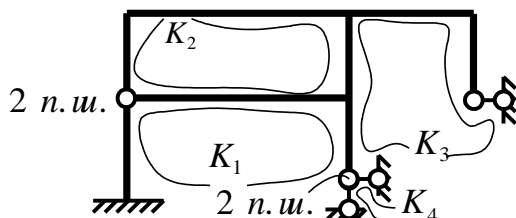
Рис. 2.7

Если в замкнутом контуре все элементы соединены друг с другом только жестко, то его будем называть *жестким замкнутым контуром* (рис. 2.7,в).

Формула основана на том, что каждый жесткий замкнутый контур имеет три «лишних» связи, а каждый врезанный в контур шарнир придает контуру одну степень свободы.

Формула (2.1) может применяться для любых плоских стержневых систем.

Например, для системы, изображенной на рис. 2.8, получим:



$$W = -(3K - III) = -(3 \cdot 4 - 8) = 4.$$

Рис. 2.8

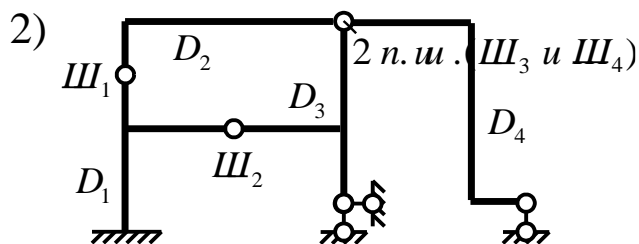
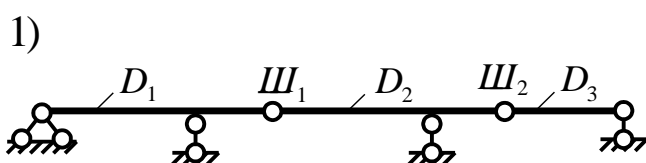
$$2. \quad W = 3D - 2III - C_0, \quad (2.2)$$

где: D – число дисков в системе; III – число одиночных (простых) шарниров, соединяющих диски D ; C_0 – число кинематических опорных связей в системе.

Данную формулу можно использовать для всех систем, кроме содержащих в себе полностью жесткие замкнутые контуры (рис. 2.7, в).

Эта формула основана на том, что каждый диск имеет три степени свободы, каждый шарнир, соединяющий диски, отнимает у системы дисков две степени свободы, а каждая кинематическая связь отнимает одну степень свободы.

Примеры применения формулы:



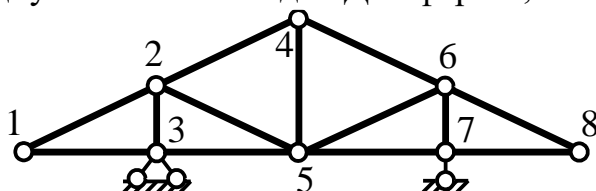
$$W = 3D - 2III - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0; \quad W = 3D - 2III - C_0 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 6 = -2.$$

3. Для ферм более удобно и целесообразно применять формулу:

$$W = 2Y - C - C_0, \quad (2.3)$$

где: Y – число шарнирных узлов в ферме; C – число стержней фермы; C_0 – число опорных связей.

В основе этой формулы лежит то, что каждый узел фермы (как точка) имеет две степени свободы, а каждый стержень, соединяя узлы фермы, отнимает одну степень свободы. Для фермы, изображенной на рис. 2.9, получим:



$$W = 2Y - C - C_0 = 2 \cdot 8 - 13 - 3 = 0.$$

Рис. 2.9

В зависимости от числа степеней свободы для систем возможно три качественно отличных друг от друга результата:

1. $W > 0$ – система изменяема, является механизмом, так как не имеет достаточного количества связей.

2. $W = 0$ – система имеет достаточное число связей, чтобы быть неизменяемой и статически определимой.

3. $W < 0$ – система имеет лишние связи, является статически неопределимой и должна быть неизменяемой.

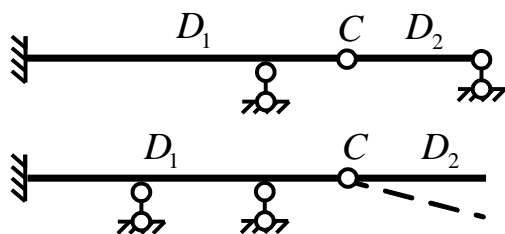
Условия $W < 0$ и $W = 0$ – являются необходимыми, но недостаточными, чтобы утверждать, что система неизменяема, так как геометрическая неизменяемость зависит не только от числа связей, но и от их расположения, то есть от структуры системы. В ряде случаев система может иметь достаточное число связей, но

быть изменяемой. Это иллюстрирует, например, простая система, представленная на рис. 2.10а. Балка как диск имеет три степени свободы, которые, казалось бы, убираются тремя имеющимися связями. Но так как все эти связи вертикальны, ни одна из них не закрепляет балку от горизонтального смещения, которое здесь возможно, и соответственно система изменяема. Если одну из опор переставить, например, установить ее горизонтально, как показано на рис. 2.10б, система становится неизменяемой.



Рис. 2.10

На рис. 2.11 представлено две балочные системы, степень свободы которых описывается одним и тем же выражением (у них одинаковое число дисков, шарниров и опорных связей), однако первая из них геометрически неизменяема, а вторая изменяема (диск D_2 может поворачиваться относительно шарнира C).



$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 5 = 0.$$

Рис. 2.11

Как видим, неизменяемость систем в большей степени определяется расположением их элементов, условиями их соединения друг с другом и положением опорных связей, то есть структурой систем.

Поэтому для выяснения, действительно ли сооружение геометрически неизменяемо, или оно изменяемо (мгновенно изменяемо), и необходимо выполнять *Геометрический анализ структуры сооружений*, который обычно производится на основе заранее известных

Принципов образования геометрически неизменяемых систем:

1. Три диска, соединенные друг с другом последовательно тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, образуют неизменяемую систему, то есть такая система в целом является диском (рис. 2.12, поз. 1).

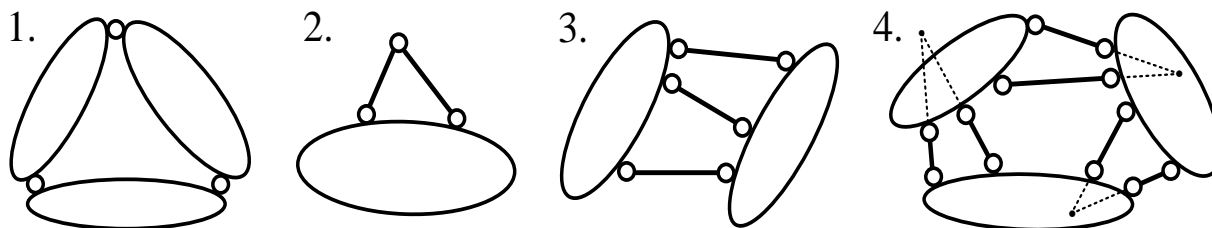


Рис. 2.12. Принципы образования геометрически неизменяемых систем

2. Если точка присоединяется к диску двумя стержнями, не лежащими на одной прямой, то такая система в целом неизменяема, т.е. является диском (рис. 2.12, поз. 2). С учетом того, что стержни – это тоже диски, здесь мы имеем, по существу, первый признак неизменяемости.

3. Два диска, соединенные друг с другом тремя стержнями, не параллельными друг другу и не пересекающимися в одной точке, образуют неизменяемую систему, то есть такая система в целом является диском (рис. 2.12, поз. 3).

Рассмотрим соединение двух дисков двумя пересекающимися (в некоторой точке C) стержнями (рис. 2.13а). Анализ этой системы показывает, что диски могут поворачиваться друг по отношению к другу относительно точки пересечения стержней C , будто в этой точке находится шарнир. Такой шарнир называют *фиктивным*, а рассматриваемое соединение двух дисков тогда может быть представлено в виде, показанном на рис. 2.13б.

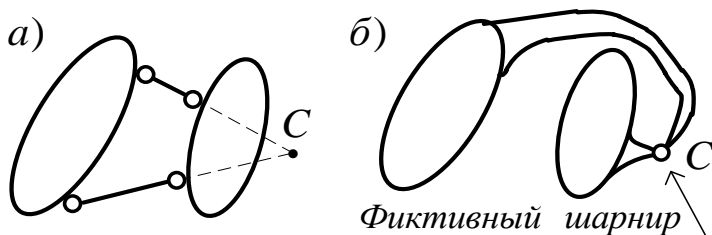


Рис. 2.13

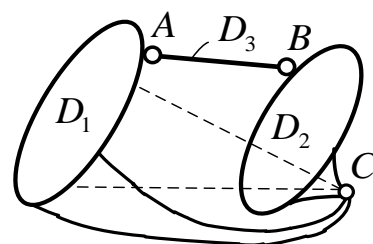


Рис. 2.14

С учетом отмеченного рассматриваемый случай соединения трех дисков (рис. 2.12, поз. 3) может быть представлен в виде, показанном на рис. 2.14, что соответствует последовательному соединению трех дисков тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, или первому признаку неизменяемости.

4. Три диска, соединенные последовательно друг с другом парами стержней, точки пересечения которых не лежат на одной прямой, образуют неизменяемую систему, и система в целом является диском (рис. 2.12, поз. 4).

Если пары пересекающихся стержней заменить здесь фиктивными шарнирами, расположенными в точках пересечения этих пар стержней, то опять будем иметь три диска, соединенных друг с другом последовательно тремя шарнирами (правда, фиктивными), не лежащими на одной прямой.

Понятие о мгновенно изменяемых системах

Мгновенно изменяемые системы представляют собой исключительный случай геометрически неизменяемых систем, при котором они допускают бесконечно малые перемещения.

Рассмотрим, например, систему, представленную на рис. 2.15а.

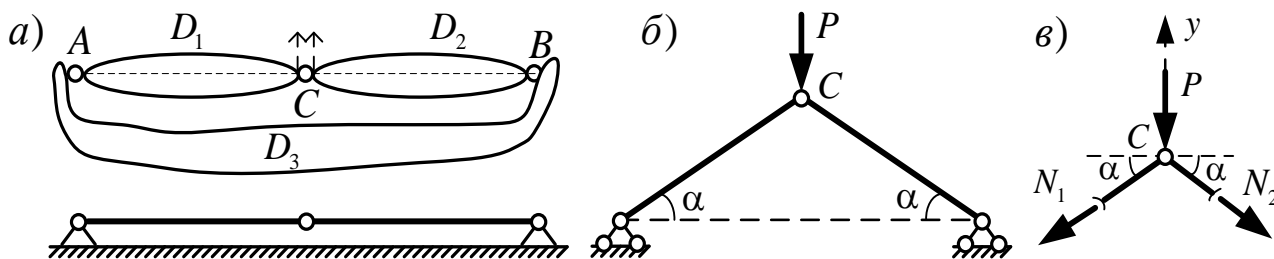


Рис. 2.15

Несложно понять, что крайняя правая точка диска D_1 (у шарнира C) в рассматриваемом состоянии может вертикально перемещаться (при повороте диска D_1 относительно точки A вектор перемещения этой точки будет перпендикулярен радиусу AC); рассуждая аналогично, получим, что крайняя левая точка

диска D_2 также имеет возможность вертикального перемещения, которое будет полностью совпадать с предыдущим вертикальным перемещением. Таким образом, точка C в системе может вертикально перемещаться. Но как только она переместится на некоторую величину, система станет удовлетворять первому признаку неизменяемости – три диска становятся соединенными последовательно друг с другом тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, и становится неизменяемой. Такова суть мгновенно изменяемой системы. Возможность перемещений в мгновенно изменяемых системах, пусть и небольших, не служит их использованию в строительных сооружениях.

Рассматриваемую мгновенно изменяемую систему можно получить из системы, представленной на рис. 2.15б, если угол α устремить к нулю ($\alpha \rightarrow 0$). При узловой нагрузке стержни этой системы (рис. 2.15б) будут работать только на сжатие и продольные усилия в них можно найти, вырезав узел C (рис. 2.15в):

$$\sum Y = 0; \quad 2N_1 \sin \alpha - P = 0; \quad N_1 = -\frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

При $\alpha \rightarrow 0$ получим $N_1 = -\frac{P}{0} = \infty$.

Этот расчет показывает, что в мгновенно изменяемых системах усилия могут принимать очень большие значения, и соответственно подобрать сечения для их элементов практически невозможно. Поэтому и с этих позиций мгновенно изменяемые системы не могут использоваться в строительных сооружениях.

Признаки мгновенно изменяемых систем

1. Если три диска соединены друг с другом последовательно тремя шарнирами, лежащими на одной прямой, то такая система мгновенно изменяема (рис. 2.15а).

2. Если два диска соединены друг с другом тремя стержнями, параллельными друг другу, то эта система мгновенно изменяема (рис. 2.16а).

Здесь диски могут смещаться друг относительно друга в направлении, перпендикулярном параллельным стержням; но как только они переместятся на некоторую величину, вследствие поворота стержней на разные углы система начинает удовлетворять второму признаку неизменяемости – два диска становятся соединенными друг с другом тремя стержнями, не параллельными друг другу и не пересекающимися в одной точке, образуя неизменяемую систему.

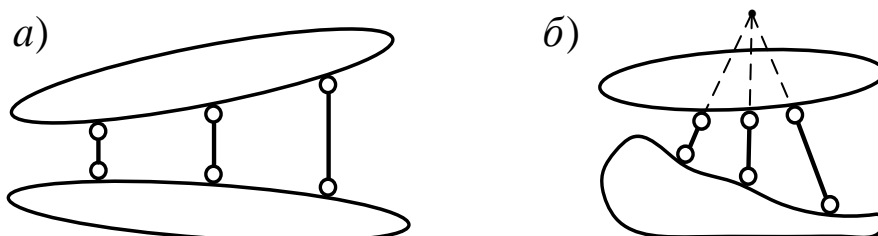


Рис. 2.16

3. Если два диска соединены друг с другом тремя стержнями, пересекающимися в одной точке, то эта система мгновенно изменяема (рис. 2.16б).

В этом случае диски могут поворачиваться друг относительно друга вокруг точки пересечения стержней (как фиктивного шарнира); при этом повороте

стержни, имея различную длину, будут поворачиваться на разные углы, вследствие чего два диска становятся соединенными друг с другом тремя стержнями, не параллельными друг другу и не пересекающимися в одной точке (второй признак неизменяемости), и система становится неизменяемой.

Выполним кинематический анализ нескольких систем.

Пример 1. Рассмотрим систему, представленную на рис. 2.17а. Определим степень свободы системы по формулам (2.1) (рис. 2.17а) и (2.2) (рис. 2.17б):

$$W = -(3K - III) = -(3 \cdot 4 - 12) = 0; \quad W = 3D - 2III - C_0 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 5 = 0.$$

Результаты, как видно, совпадают, что, конечно, и должно быть.

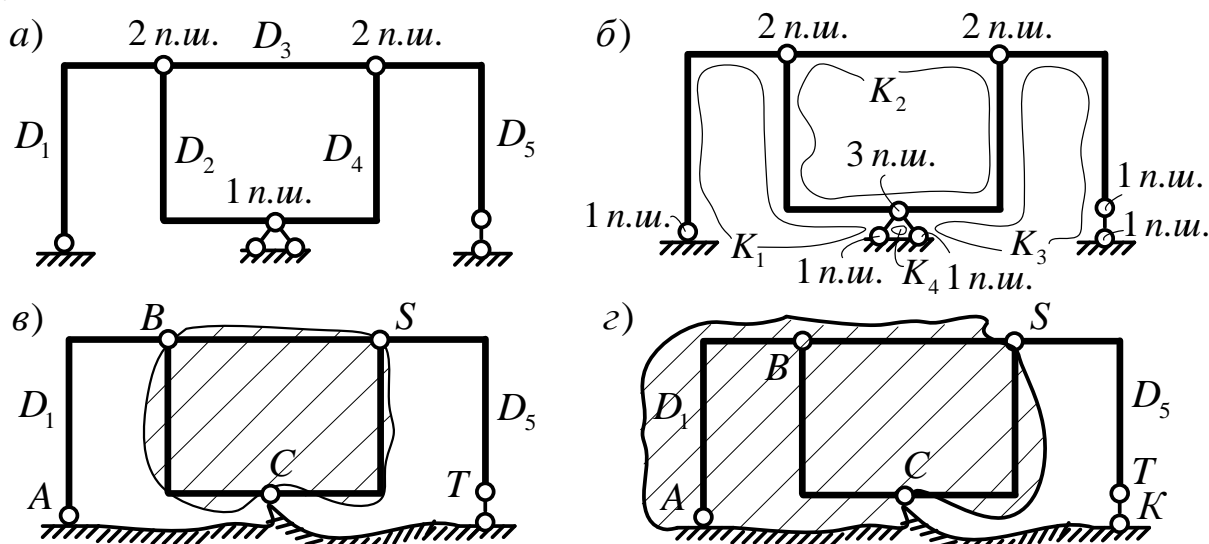


Рис. 2.17

Переходим ко второму этапу кинематического анализа – геометрическому анализу структуры системы. Отметим, что основание (земля) является целостным объектом, то есть будет тоже диском.

Процедура геометрического анализа:

1) диски D_2 , D_3 и D_4 соединены тремя шарнирами B , S , C , не лежащими на одной прямой, и соответственно образуют неизменяемую систему, то есть диск (первый признак неизменяемости) (рис. 2.17в);

2) шарнир C присоединен к диску земли двумя стержнями, не лежащими на одной прямой, образуя вместе с ней неизменяемую систему (второй признак неизменяемости) (рис. 2.17в);

3) диск D_1 , диск земли и диск BSC соединены тремя шарнирами A , B и C , не лежащими на одной прямой, образуя неизменяемую систему (первый признак неизменяемости) (рис. 2.17з);

4) последний диск (вместе с основанием), диск D_5 и опорный стержень TK (а это тоже диск) соединены друг с другом последовательно тремя шарнирами S , T и K , не лежащими на одной прямой, (рис. 2.17з) и соответственно образуют в целом неизменяемую систему (первый признак неизменяемости).

Таким образом, делаем вывод, что рассматриваемая система статически определима и геометрически неизменяема.

Пример 2. Исследуем систему, представленную на рис. 2.18а. Определим степень свободы системы по формулам (1) (рис. 2.18б) и (2) (рис. 2.18в):

$$W = -(3K - III) = -(3 \cdot 3 - 9) = 0;$$

$$W = 3D - 2III - C_0 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

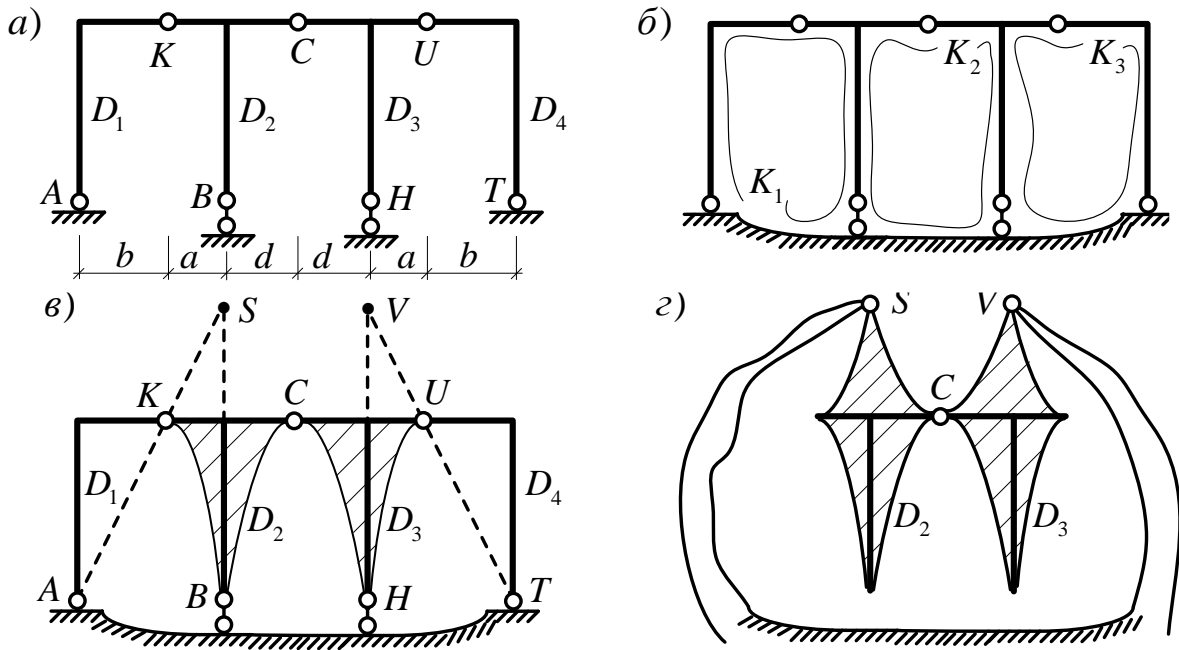


Рис. 2.18

Геометрический анализ структуры системы:

1) диск D_1 соединяется с остальной системой двумя шарнирами A и K (рис. 2.18в); в каждом из шарниров возникает одна реактивная сила, и таким образом, диск находится под действием двух сил; известно, что в равновесии такой диск может находиться только в том случае, если указанные силы будут направлены по прямой, соединяющей точки приложения сил, навстречу друг другу (друг от друга); то есть диск D_1 работает по существу как стержень AK ;

2) аналогично будет работать и диск D_4 (как стержень UT) (рис. 2.18в);

3) получается, что диск D_2 соединяется с диском земли двумя стержнями – стержнем AK и вертикальным стержнем шарнирно подвижной опоры B , которые пересекаются в точке S (рис. 2.18в); такое соединение этих дисков может быть заменено их соединением фиктивным шарниром в точке S (рис. 2.18з);

4) аналогично диск D_3 соединяется с диском земли двумя стержнями – стержнем UT и вертикальным стержнем шарнирно подвижной опоры H , которые пересекаются в точке V (рис. 2.18в), и такое соединение этих дисков можно заменить их соединением фиктивным шарниром в точке V (рис. 2.18з);

5) в результате получаем, что три диска – D_2, D_3 и диск земли соединены друг с другом последовательно тремя шарнирами S, V и C , не лежащими на одной прямой, образуя неизменяемую систему (первый признак неизменяемости).

Вывод: рассматриваемая система статически определима и неизменяема.

Пример 3. Исследуем систему, представленную на рис. 2.20а. Определим степень свободы системы по формулам (1) (рис. 2.20а) и (2) (рис. 2.20б):

$$W = -(3K - III) = -(3 \cdot 3 - 9) = 0; \quad W = 3D - 2III - C_0 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 - 7 = 0.$$

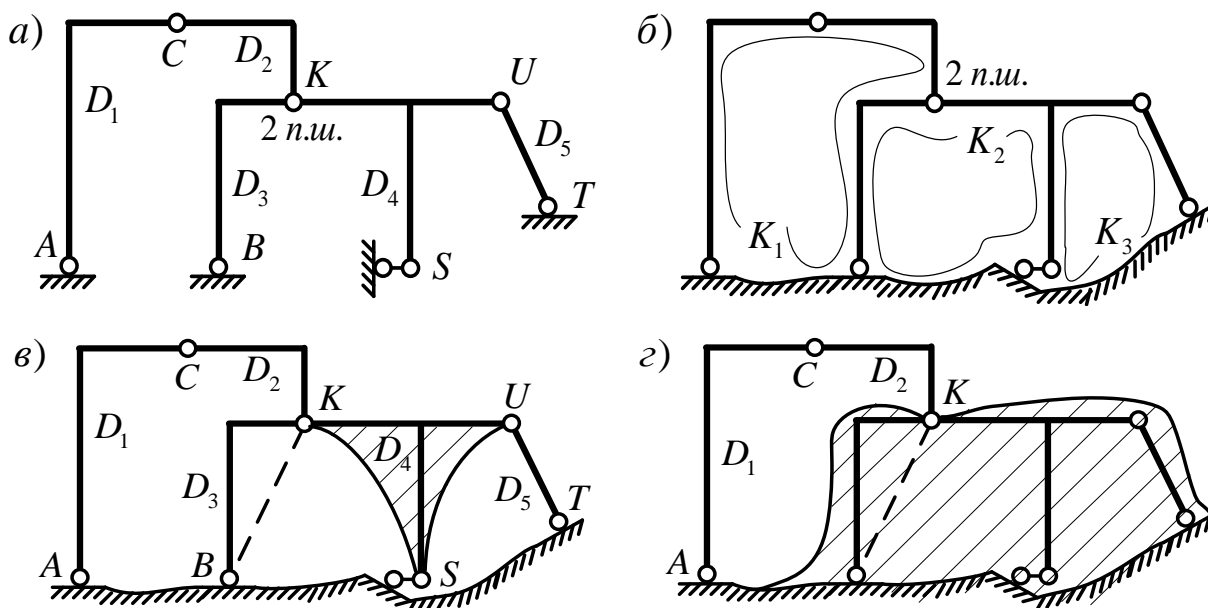


Рис. 2.20

Геометрический анализ структуры системы:

1) диск D_3 (рис. 2.20в) соединяется с остальной системой двумя шарнирами B и K ; в каждом из шарниров возникает по реактивной силе, и таким образом, диск находится под действием двух сил; в равновесии диск будет находиться только в том случае, если эти силы будут направлены по прямой BK навстречу друг другу (друг от друга), а в этом случае диск D_3 будет работать как стержень;

2) диск D_4 соединяется с диском земли тремя стержнями – BK , UT и горизонтальным опорным стержнем в точке S , которые не параллельны друг другу и не пересекаются в одной точке, образуя вместе с основанием (с землей) неизменяемую систему, то есть диск (третий признак неизменяемости) (рис. 2.20г);

3) последний диск и диски D_1 и D_2 соединены последовательно друг с другом тремя шарнирами A , C и K , не лежащими на одной прямой, образуя неизменяемую систему (первый признак неизменяемости) (рис. 2.20д).

Вывод: рассматриваемая система статически определима и геометрически неизменяема.

Пример 4. Исследуем систему, представленную на рис. 2.21а. Определим степень свободы системы по формулам (1) (рис. 2.21а) и (2):

$$W = 2V - C - C_0 = 2 \cdot 8 - 12 - 4 = 0.$$

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 12 - 2 \cdot 16 - 4 = 0.$$

Геометрический анализ структуры системы:

1) рассматриваемая ферма в большей части имеет треугольную структуру, представляющую собой группы трех стержней (трех дисков), соединенных последовательно друг с другом тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, образуя неизменяемые блоки (согласно первому признаку неизменяемости); так, стержни 2– B , B –5 и 2–5 соединяются шарнирами B , 2 и 5, образуя диск; этот диск вместе со стержнями 2–3 и 3–5 соединяется шарнирами 2, 5 и 3, обра-

зую вместе новый диск, который в свою очередь образует неизменяемую систему (диск D_1) вместе со стержнями 3–С и 5–С (рис. 2.21б), которые соединяются шарнирами 3, 5 и С; аналогично по принципу треугольника соединены друг с другом стержни А–1, А–4 и 1–4 шарнирами А, 1 и 4, образуя диск D_2 ;

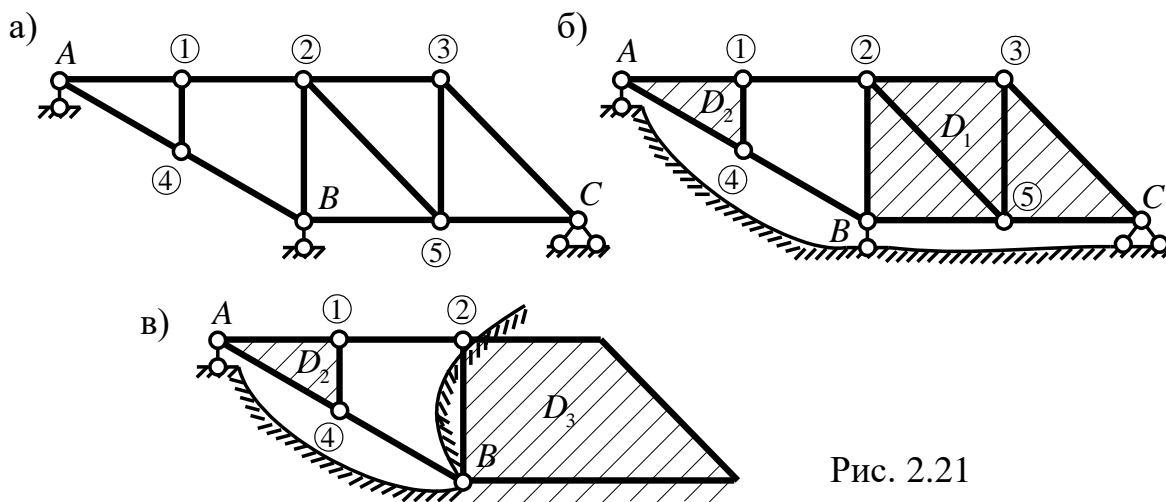


Рис. 2.21

2) диск D_1 соединяется с землей тремя опорными стержнями, не параллельными друг другу и не пересекающимися в одной точке, образуя с основанием согласно третьему признаку неизменяемости диск D_3 (рис. 2.21б, в);

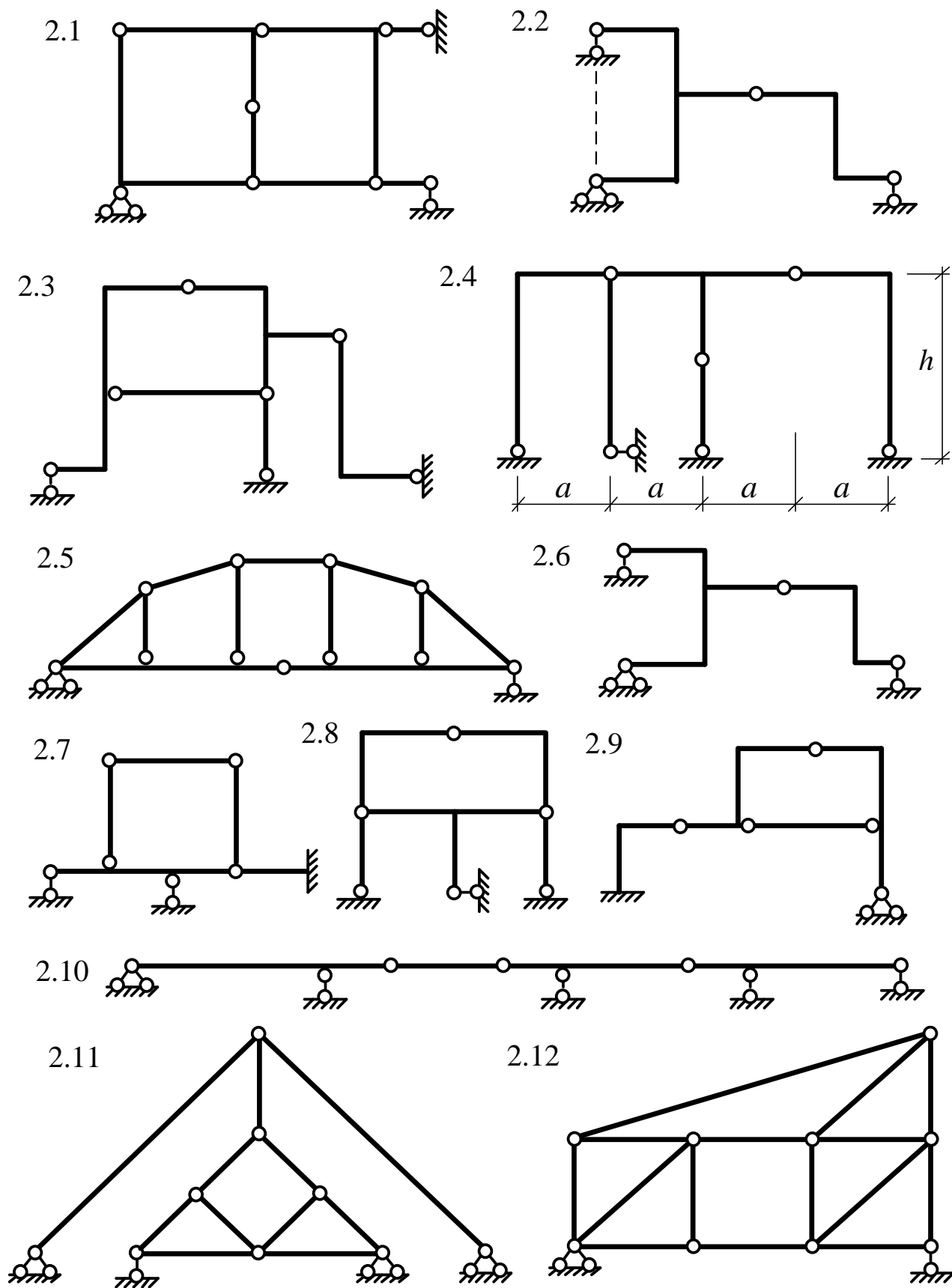
3) теперь диск D_2 и диск D_3 соединены друг с другом тремя стержнями 1–2, 4–В и вертикальным опорным стержнем в узле А, которые пересекаются в одной точке – в узле А, а это значит, что система мгновенно изменяема (третий признак мгновенной изменяемости) (рис. 2.21в).

Вывод: рассматриваемая система мгновенно изменяема и не может применяться в строительных сооружениях.

Таким образом, выполнение геометрического анализа структуры системы представляет собой структурно-логическую задачу, решая которую в структуре системы (в соединениях ее элементов) необходимо последовательно находить представленные выше случаи геометрической неизменяемости или мгновенной изменяемости (или выявлять изменяемость), и делать это нужно до тех пор, пока не будут задействованы все элементы (диски) системы и не будет выявлено, какой же система является с точки зрения изменяемости-неизменяемости.

Представим ряд систем, для которых необходимо самостоятельно выполнить кинематический анализ (определить степень свободы и выполнить геометрический анализ структуры) и в результате определить каковы эти системы – статически определимы или неопределимы, геометрически неизменяемы, изменяемы или, может быть, мгновенно изменяемы.

Задачи:



Ответы на данные задачи представлены в конце пособия в разделе «Ответы на задачи для самостоятельного решения» (с. 92).

3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

3.1. Внутренние силы и их определение

При действии на плоскую статически определимую стержневую систему внешней нагрузки в каждом поперечном сечении ее может возникнуть три вида внутренних сил (усилий) (рис. 3.1):

– изгибающий момент M , действующий в плоскости сооружения относительно центральной оси поперечного сечения элемента (стержня), перпендикулярной к этой плоскости;

– поперечная сила Q , действующая в плоскости поперечного сечения в направлении центральной оси поперечного сечения элемента (стержня), лежащей в плоскости сооружения;

– продольная сила N , действующая перпендикулярно к сечению (вдоль оси стержня) и приложенная в центре тяжести сечения.

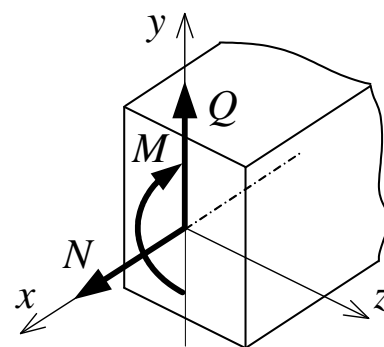


Рис. 3.1

Определение усилий M , Q , N в сечениях статически определимых стержневых систем выполняется методом сечений. В заданном месте проводится сечение, разделяющее систему на две части. Затем рассматривается равновесие одной из частей системы. При этом действие отброшенной части на рассматриваемую заменяется силами, равными внутренним силам в сечении. Эти силы действуют на рассматриваемую часть как внешние силы. Из уравнений равновесия, число которых равно трем (что соответствует количеству неизвестных внутренних сил), определяются усилия в рассматриваемом сечении системы.

Метод сечений позволяет сформулировать следующие правила определения внутренних сил в сечениях плоских стержневых систем:

Ⓢ Изгибающий момент в сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил (включая и опорные реакции), приложенных к части системы с одной стороны от сечения, относительно центра тяжести сечения.

Ⓢ Поперечная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил (включая опорные реакции), приложенных к части системы с одной стороны от сечения, на ось, перпендикулярную к оси стержня.

Ⓢ Продольная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил (включая опорные реакции), приложенных к части системы с одной стороны от сечения, на ось, касательную к оси стержня (для прямолинейных стержней – на ось самого стержня).

Напомним, что момент силы относительно некоторой точки равен произведению величины этой силы на ее плечо относительно этой точки (например, на рис. 3.2а – $M_A(P) = P \cdot h_p$), где плечо силы относительно точки (h_p) определяется как длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на линию действия силы.

Проекция силы на ось равна произведению величины силы на косинус угла между линией действия силы и рассматриваемой осью (рис. 3.2,б) – $P_z = P \cos \varphi$.

По указанным правилам легко определяются момент относительно любой точки и проекция на любую ось нагрузки q , распределенной на участке по произвольному закону, если ее привести к равнодействующей силе R_q , приложенной в центре тяжести нагрузки на рассматриваемом участке. Величины моментов относительно точки A равномерно распределенной нагрузки q_1 (рис. 3.2,а) (равнодействующая R_{q1} будет приложена в середине участка, на который действует эта нагрузка) и для нагрузки q_2 , изменяющейся на участке по треугольному закону, вычисляются следующим образом:

$$M_A(q_1) = R_{q1} h_{R1} = q a h_{R1};$$

$$M_A(q_2) = R_{q2} h_{R2} = \frac{1}{2} q_0 a h_{R2}.$$

Заметим, что момент относительно любой точки от действия сосредоточенного момента равен величине самого сосредоточенного момента, а его проекция на любую ось равна нулю.

Для наглядного представления об изменении усилий в сечениях систем строят эпюры усилий. **Эпюрой усилия** (M , Q , N и др.) называется график (диаграмма), отражающий зависимость изменения этого усилия по длинам всех элементов (стержней) системы от действия постоянной нагрузки.

Отметим некоторые правила, применяемые при построении эпюр усилий:

1. Ось (базу), на которой строится эпюра, всегда выбирают так, чтобы она была параллельна оси стержня или просто совпадала с ней.

2. Ординаты эпюр откладывают от базовой оси перпендикулярно к ней. Каждая из ординат эпюры усилий представляет собой в определенном масштабе величину усилия, для которого построена эпюра, в поперечном сечении рамы, в котором эта ордината отложена.

3. Штриховать эпюры принято линиями, перпендикулярными к базовой оси (каждая из линий штриховки – это тоже ордината эпюры усилий).

4. Ординаты усилий откладывают в определенном масштабе, одинаковом в пределах одной эпюры; в характерных точках проставляют значения ординат усилий, а в полях эпюр (в кружочках) обычно ставят знаки ординат эпюр.

При определении внутренних сил и построении их эпюр в строительной механике обычно принимают следующие правила знаков:

– **Поперечная сила** в сечении, определенная по выше указанному правилу, **положительна**, если при приложении ее на бесконечно малом расстоянии от сечения со стороны рассматриваемой части она стремится повернуть эту часть относительно сечения по часовой стрелке, и **отрицательна**, если стремится повернуть эту часть относительно сечения против часовой стрелки – см. рис. 3.3.

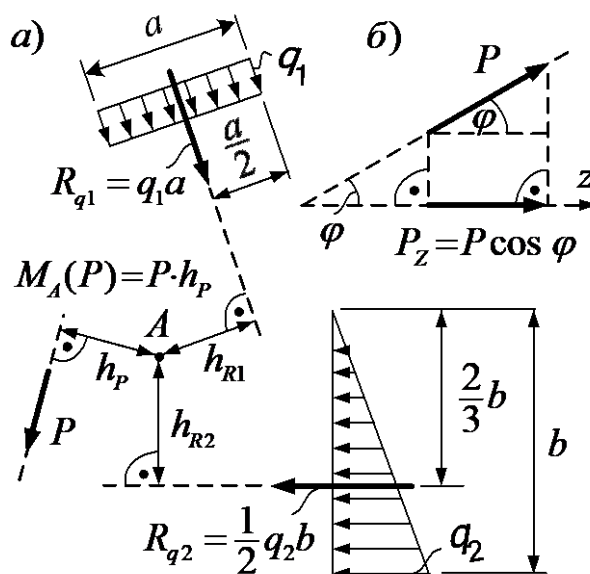


Рис. 3.2

Например, при рассмотрении отсеченной части на рис. 3.3в поперечная сила в сечении K равна силе P и положительна.

– **Продольная сила** в сечении **положительна**, если она вызывает растяжение в стержне рамы (направлена от сечения), и **отрицательна**, если вызывает сжатие (направлена к сечению) – см. рис. 3.4.

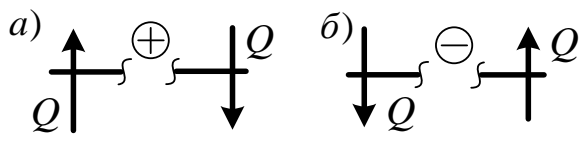


Рис. 3.3

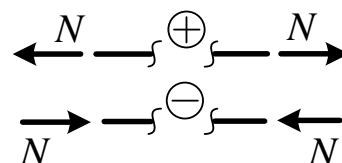


Рис. 3.4

Отметим, что при построении эпюр Q и N ординаты поперечных и продольных сил могут откладываться с любой стороны от базовых осей (стержней). При этом следует руководствоваться наибольшей наглядностью эпюр (исключая, по возможности, наложение эпюр друг на друга) и, конечно, на одной эпюре и на участках, являющихся продолжением друг друга по прямой, целесообразно и предпочтительно ординаты одного знака откладывать с одной стороны.

Для изгибающих моментов специального правила знаков не устанавливают, а откладывают ординаты их на растянутых волокнах (со стороны растянутых волокон). При определении величин изгибающих моментов знаки их можно принимать по собственному усмотрению. Удобно принять, например, как это сделано в данных методических указаниях, изгибающий момент в сечении положительным, если он действует относительно сечения по часовой стрелке.

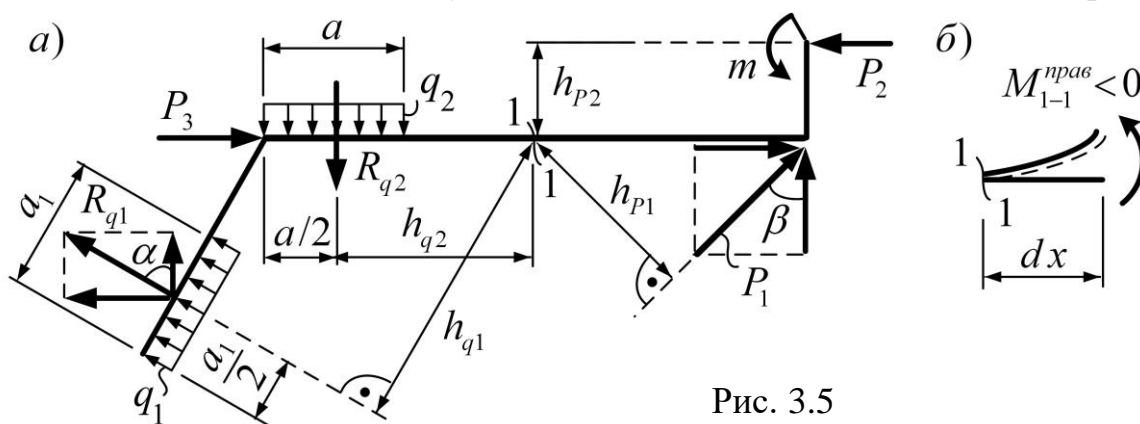


Рис. 3.5

Растянутые волокна в сечении при этом определяются следующим образом. В той части системы, из равновесия которой в расчетном сечении определен изгибающий момент, выделяем бесконечно малый элемент стержня, прилегающий к рассматриваемому сечению (на схемах этот бесконечно малый элемент стержня для наглядности изображается в виде элемента конечной длины). Считаем затем, что в расчетном сечении указанный элемент имеет защемление, и прикладываем к нему вычисленный для этого сечения изгибающий момент. Анализируя теперь изгиб рассматриваемого элемента системы (рамы), несложно определить, с какой стороны стержня волокна будут растянуты, а с какой – сжаты. Схема изгиба элемента системы, выделенного возле сечения 1–1 с правой стороны, показана на рис. 3.5,б. Из анализа этой схемы видно, что растяну-

тыми в сечении 1–1 будут нижние волокна (здесь и далее на схемах изгиба элементов со стороны растянутых волокон будем проводить штриховые линии).

Приведем несколько примеров вычисления усилий в сечении 1–1 (в общем виде) для равновесной системы, представленной на рис. 3.5,а:

$$M_{1-1}^{(лев)} = R_{q1} \cdot h_{q1} - R_{q2} \cdot h_{q2} + P_3 \cdot 0 = q_1 a_1 h_{q1} - q_2 a_2 h_{q2};$$

$$M_{1-1}^{(прав)} = -P_1 \cdot h_{p1} - P_2 \cdot h_{p2} - m;$$

$$Q_{1-1}^{(лев)} = R_{q1} \cdot \cos \alpha + P_3 \cdot \cos 90^0 - R_{q2} \cdot \cos 0^0 = q_1 a_1 \cos \alpha - q_2 a_2;$$

$$Q_{1-1}^{(прав)} = -P_1 \cdot \cos \beta + P_2 \cdot \cos 90^0 = -P_1 \cos \beta;$$

$$N_{1-1}^{(лев)} = R_{q1} \cdot \sin \alpha - P_3 \cdot \cos 0^0 - R_{q2} \cdot \cos 90^0 = q_1 a_1 \sin \alpha - P_3;$$

$$N_{1-1}^{(прав)} = -P_2 + P_1 \sin \beta.$$

Здесь: $M_{1-1}^{(лев)}$, $Q_{1-1}^{(лев)}$, $N_{1-1}^{(лев)}$ – усилия в сечении 1–1, полученные из рассмотрения левой части системы относительно этого сечения; $M_{1-1}^{(прав)}$, $Q_{1-1}^{(прав)}$, $N_{1-1}^{(прав)}$ – те же усилия, полученные из рассмотрения правой части системы относительно сечения 1-1. Заметим, что для системы, находящейся в равновесии, внутренние силы в одном сечении, полученные при рассмотрении левой и правой частей, будут, естественно, равны друг другу (значения изгибающих моментов при этом при использовании рассматриваемых правил знаков будут получаться с противоположными знаками – растянутые же волокна, определенные по ним, будут расположены с одной и той же стороны). Для рассмотренной системы (рис. 3.5а), будем иметь: $M_{1-1}^{(лев)} = -M_{1-1}^{(прав)}$; $Q_{1-1}^{(лев)} = Q_{1-1}^{(прав)}$; $N_{1-1}^{(лев)} = N_{1-1}^{(прав)}$. Это обстоятельство следует использовать для проверки правильности вычисления внутренних сил в сечениях систем.

3.2. Статически определимые рамы, их виды

Рамами называют системы, состоящие из прямолинейных стержней, соединенных между собой жестко (и шарнирно) в узлах, и опирающихся с помощью опор на основание.

По структуре статически определимые рамы обычно разделяют на простые, трехшарнирные и составные.

Простые рамы – это системы (рис. 3.6), состоящие из одного диска в виде ломано-разветвленного стержня, соединенного с основанием тремя связями с использованием обычно трех основных видов опор – шарнирно подвижной опоры, шарнирно неподвижной опоры, защемления (табл. 1.1).

Трехшарнирные рамы (рис. 3.7а, б) – это системы, состоящие из трех дисков (ломано-разветвленных стержней), соединенных между собой последовательно тремя шарнирами, не лежащими на одной

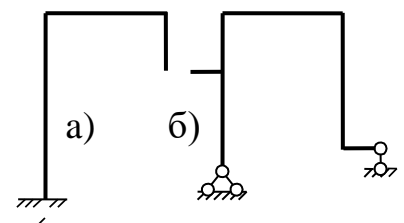
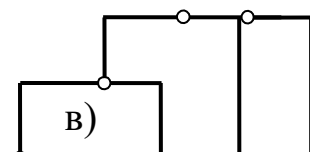
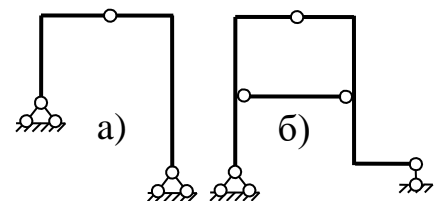


Рис. 3.6. Простые рамы



прямой (то есть по принципу трехдискового трехшарнирного треугольника). Одним из дисков при этом может быть основание (рис. 3.7а). Трехшарнирные рамы относятся к классу распорных систем.

Составными называют рамы, состоящие из нескольких соединенных между собой простых и (или) трехшарнирных рам (рис. 3.7в).

Рис. 3.7

Расчет составных рам выполняется путем расчета отдельных простых и трехшарнирных рам, на которые могут быть разделены составные рамы, с учетом их взаимодействия друг с другом.

3.3. Расчет простых рам

Рассмотрим расчет простой рамы, изображенной на рис. 3.8. Из анализа рамы видно, что при определении внутренних сил в любом ее сечении нельзя обойтись без знания величин опорных реакций. И, следовательно, расчет таких рам необходимо начинать с нахождения значений опорных реакций.

Опорные реакции определяются из уравнений равновесия рамы в целом, которые в общем случае можно составить в трех различных вариантах:

1) в виде сумм проекций сил на две произвольные не параллельные друг другу оси и суммы моментов сил относительно некоторой точки плоскости ($\Sigma X = 0$; $\Sigma Y = 0$; $\Sigma M_T = 0$);

2) в виде суммы проекций сил на произвольную ось и двух сумм моментов относительно любых точек плоскости, не лежащих на одном перпендикуляре к указанной оси проекции ($\Sigma X = 0$; $\Sigma M_A = 0$; $\Sigma M_B = 0$);

3) в виде трех сумм моментов относительно трех точек, не лежащих на одной прямой ($\Sigma M_A = 0$; $\Sigma M_B = 0$; $\Sigma M_C = 0$).

После определения опорных реакций всегда нужно выполнять **проверку** правильности их расчета, для чего следует использовать уравнение равновесия, которое ранее не использовалось и в которое входили бы все вычисленные ранее опорные реакции.

Определим опорные реакции для рассматриваемой рамы (рис. 3.8). Для этого здесь используем второй вариант уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; & \quad R_A - 4 = 0; & \quad R_A = 4 \text{ кН}; \\ \Sigma M_L = 0; & \quad -4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 8 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - R_C \cdot 4 = 0; & \quad R_C = 5 \text{ кН}; \\ \Sigma M_D = 0; & \quad -4 \cdot 7 + 4 \cdot 2 + 8 - R_B \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0; & \quad R_B = -7 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Если величина реакции в результате ее определения получается отрицательной, это указывает на то, что мы неверно предположили ее направление (в нашем примере – реакции R_B) и оно будет противоположным. В этом случае рекомендуется сразу же исправить направление реакции на действительное.

Проверка правильности определения опорных реакций:

$$\Sigma M_K = 0; \quad 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 + 8 - 7 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 5 - 5 \cdot 7 = 0; \quad +64 - 64 = 0; \quad 0 = 0.$$

Для удобства дальнейших расчетов численные значения вычисленных реакций рекомендуется показывать на расчетной схеме рамы (см. рис. 3.8).

Переходим к определению усилий и построению их эпюр. Несложно заметить, что любую раму можно разбить на отдельные участки (отрезки стержней), на каждом из которых изменение того или иного усилия описывается (в пределах этого участка) одной зависимостью. Граничные точки этих участков, в которых происходит переход от одних зависимостей изменения эпюр к другим, будем называть характерными точками.

В качестве характерных точек обычно выступают:

- точки, в которых приложены внешние сосредоточенные нагрузки (силы, моменты) либо опорные реакции;
- точки начала и конца приложения распределенных нагрузок;
- точки излома и разветвления стержней.

Для рамы, изображенной на рис. 3.8, характерными являются точки A, T, K, B, C и можно выделить четыре расчетных участка:

$$I \rightarrow AT, \quad II \rightarrow TK, \quad III \rightarrow KB \quad \text{и участок } IV \rightarrow BC.$$

Рассмотрим вначале участок I. Проведем на нем произвольное сечение I–I. Внутренние силы в любом сечении рамы могут быть определены из рассмотрения как левой относительно сечения, так и правой (как нижней, так и верхней) частей рамы; при этом эти значения должны получаться равными друг другу (см. раздел 1); это можно и нужно использовать для проверки правильности вычисления усилий в сечениях. Заметим, что определение внутренних сил в сечениях удобнее производить из рассмотрения той отсеченной части рамы, на которую действует меньшее количество сил. Для сечения I–I рассмотрим верхнюю часть рамы (для наглядности в этом примере покажем рассматриваемые части рамы отдельно – см. рис. 3.9а). Расстояние от верхней крайней точки (точка A) до сечения I–I обозначим x_1 . Тогда выражения для определения внутренних сил в произвольном сечении I–I участка I ($0 \leq x_1 \leq 2$) будут иметь вид:

$$M_I^{всп} = R_A x_1 + P \cdot 0 = 4x_1; \quad Q_I^{всп} = + R_A = 4; \quad N_I^{всп} = - P = - 4.$$

Аналогично определим внутренние силы на участке II ($0 \leq x_2 \leq 4$) (см. рис. 3.8, 3.9б):

$$M_{II}^{всп} = 4 \cdot (2 + x_2) - 4 \cdot 0 - 4 \cdot x_2 = 8 \quad (\text{при любом значении } x_2);$$

$$Q_{II}^{всп} = 4 - 4 = 0; \quad N_{II}^{всп} = - 4,$$

и на участке III ($0 \leq x_3 \leq 3$) (см. рис. 3.8, 3.9в):

$$M_{III}^{всп} = 4 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 4 \cdot x_3 = 8 - 4 \cdot x_3$$

[при $x_3 = 0$ (сечение 5) – $M_5 = 8$ кН·м; при $x_3 = 3$ (сечение 6) – $M_6 = - 4$ кН·м];

$$Q_{III}^{всп} = - 4; \quad = 0.$$

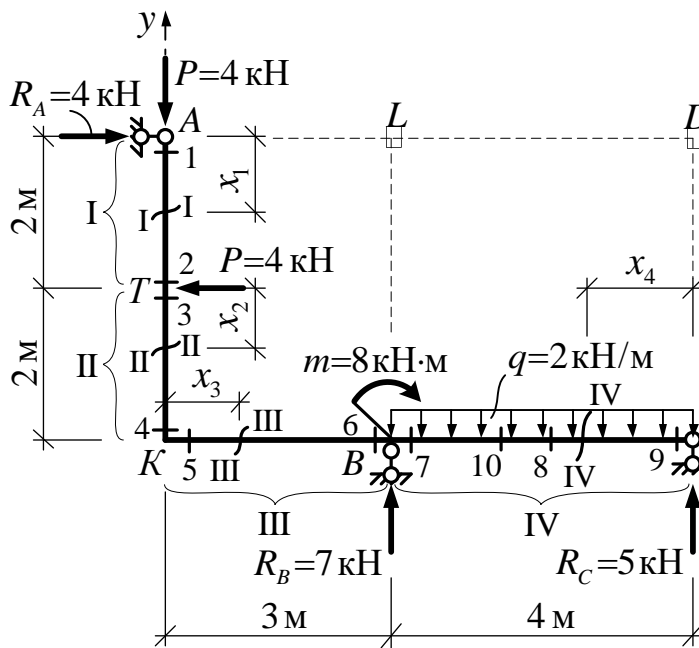


Рис. 3.8

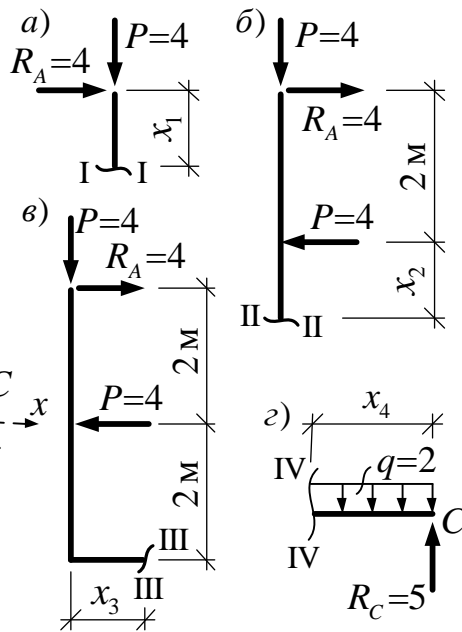


Рис. 3.9

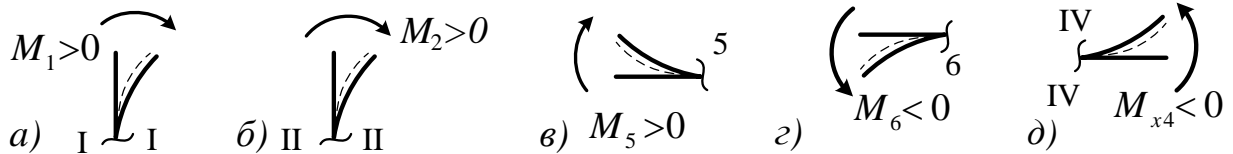


Рис. 3.10. Определение растянутых волокон

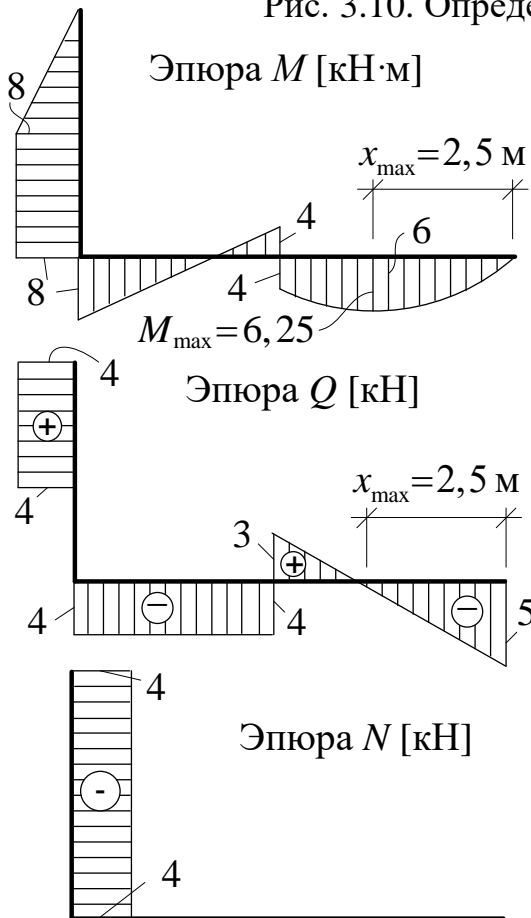
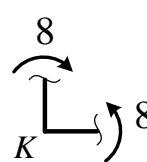


Рис. 3.11

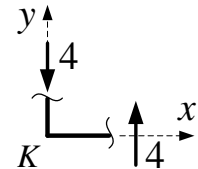
Проверка равновесия узлов

Узел K



$$\sum M_K = 0;$$

$$8 - 8 = 0;$$

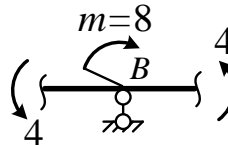


$$\sum X = 0; 0 = 0;$$

$$\sum Y = 0;$$

$$-4 + 4 = 0.$$

Опорный узел B



$$\sum M_B = 0; 8 - 4 - 4 = 0; 8 - 8 = 0;$$

$$\sum X = 0; 0 = 0;$$

$$\sum Y = 0; -4 - 3 + 7 = 0; -7 + 7 = 0.$$

Рис. 3.12

Изгибающий момент на участке I изменяется по линейному закону, а поперечная и продольные силы – постоянны. Подставляя в выражение изгибающего момента значения x_1 для крайних сечений, найдем: $M_1 = M_A = 4 \cdot 0 = 0$;

$M_2 = 4 \cdot 2 = +8$ кН·м (сечение 2 расположено на бесконечно малом расстоянии сверху от точки T – точки приложения силы P). Растянутые волокна для сечения I–I (и в данном случае для всего участка I) определены на рис. 3.10а.

Несколько сложнее определяются усилия на участке IV. Проведя произвольное сечение IV–IV, рассмотрим правую часть рамы (рис. 3.8). Выражения для внутренних сил на участке будут иметь вид:

$$M_{IV}^{(прав)} = -5 \cdot x_4 + 2 \cdot x_4 \cdot x_4 / 2 = x_4^2 - 5 \cdot x_4; \quad Q_{IV}^{(прав)} = -5 + 2 \cdot x_4; \quad N_{IV}^{(прав)} = 0.$$

Видно, что изгибающий момент на участке IV изменяется по параболической зависимости, а поперечная сила – линейна (но не постоянна в отличие от участков I, II, III). Для построения эпюры M на этом участке, таким образом, необходимо вычислить значения изгибающих моментов минимум в трех точках – например, по краям участка (в сечениях 7 и 9) и в середине его (в сечении 8):

$$\text{сеч. 7} - x_7 = 4 \text{ м}; \quad M_7 = 4^2 - 5 \cdot 4 = -4 \text{ кН·м};$$

$$\text{сеч. 8} - x_8 = 2 \text{ м}; \quad M_8 = 2^2 - 5 \cdot 2 = -6 \text{ кН·м}; \quad \text{сеч. 9} - x_9 = 0; \quad M_9 = 0.$$

Растянутые волокна на участке IV по полученным значениям изгибающих моментов определены на рис. 3.10г, а сама эпюра M представлена на рис. 3.11.

Для построения эпюры поперечных сил на участке IV достаточно вычислить значения Q в двух сечениях (т. к. через две точки всегда можно провести прямую линию) – обычно вычисляют эти значения в крайних сечениях участков:

$$\text{сеч. 7} - x_7 = 4 \text{ м}; \quad Q_7 = -5 + 2 \cdot 4 = +3 \text{ кН};$$

$$\text{сеч. 9} - x_9 = 0; \quad Q_9 = -5 + 2 \cdot 0 = -5 \text{ кН}.$$

Следует иметь в виду, что на участках действия равномерно распределенных нагрузок, на которых изгибающие моменты изменяются по параболическим зависимостям, эпюра M может иметь экстремумы (максимальные или минимальные значения), которые являются важной характеристикой эпюр и должны определяться дополнительно. Если выполнить анализ выражений для M_{IV} и Q_{IV} , учитывая условие экстремальности функций (согласно которому экстремум функции находится в точке, для которой ее первая производная равна нулю) и известную дифференциальную зависимость $Q = dM/dx$ несложно заметить, что экстремальные значения изгибающие моменты принимают в сечениях, в которых поперечные силы равны нулю. Эти сечения могут быть определены из выражений для Q (в нашем примере – $Q_{IV} = 2 \cdot x_4 - 5 = 0$; $x_{\max} = 2,5$ м), или по эпюрам Q из геометрических соображений ($5/x_{\max} = 3/(4 - x_{\max})$; $x_{\max} = 2,5$ м). Максимальный изгибающий момент на участке IV рассматриваемой рамы, таким образом, имеет место в сечении 10 ($x_{\max} = 2,5$ м) и равен: $M_{10} = M_{IV\max} = 2,5^2 - 5 \cdot 2,5 = -6,25$ кН·м. Окончательные эпюры M , Q , N в рассматриваемой раме представлены на рис. 3.11.

Все узлы рамы, включая опорные, должны находиться в равновесии. Под

узлами здесь будем понимать точки излома либо разветвления стержней рамы, а также точки примыкания стержней через шарниры. Поэтому после построения в раме эпюр M , Q и N целесообразно выполнить проверку равновесия ее узлов. Для этого узлы выделяем (вырезаем) из рамы, изображаем отдельно (для наглядности показываем и элементы примыкающих к узлам стержней) и прикладываем к ним усилия, возникающие в сечениях, бесконечно близких к узлам, и внешние сосредоточенные нагрузки – силы и моменты, действующие в узлах (если они есть). После этого составляем уравнения равновесия всех сил, приложенных к узлам ($\sum M_y = 0$; $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$) и проверяем их выполнение. Для рассмотренной рамы проверка равновесия узлов показана на рис. 3.12.

Ⓢ Анализ полученных эпюр внутренних сил позволяет установить ряд общих закономерностей в изменении эпюр M , Q , N , которые должны всегда соблюдаться для стержневых систем:

1) на прямолинейном ненагруженном участке эпюра изгибающих моментов всегда линейна и может быть построена по двум ординатам (обычно для крайних сечений участка), а эпюры Q и N – постоянны (во всех сечениях одинаковы);

2) на участке действия равномерно распределенной нагрузки эпюра M всегда изменяется по параболическому закону и должна строиться минимум по трем ординатам (обычно для крайних и среднего сечений на участке); выпуклость эпюры M при этом всегда направлена в сторону действия равномерно распределенной нагрузки; эпюра Q на таком участке всегда линейна и может быть построена по двум ординатам (для крайних сечений);

3) в точке приложения сосредоточенной силы эпюра M всегда имеет излом, направленный в сторону действия силы, эпюра Q – скачок (разрыв) на величину произведения этой силы на косинус угла между силой и осью, нормальной к оси стержня, а эпюра N – скачок на величину произведения этой силы на синус угла между силой и осью, нормальной к оси стержня; если внешняя сила перпендикулярна к оси стержня, то скачок на эпюре Q будет равен величине самой силы, а на эпюре N скачка не будет;

4) в точке приложения сосредоточенного момента эпюра M всегда имеет скачок (разрыв) на величину этого момента;

5) в шарнире изгибающий момент всегда равен нулю (не следует путать сечение в шарнире и сечение, бесконечно близкое к шарниру; так если в сечении, бесконечно близком к шарниру, приложен сосредоточенный момент, то на эпюре M в этом сечении, согласно предыдущему положению, будет скачок с нуля в шарнире до значения сосредоточенного момента в точке его приложения);

6) на участке действия распределенной нагрузки в сечении, в котором поперечная сила равна нулю, изгибающий момент всегда имеет экстремум (минимум, максимум);

7) при принятых подходах знак эпюры Q можно определить (проверить) по эпюре M по следующему правилу: эпюра Q на участке положительна, если для совмещения по кратчайшему пути оси стержня с касательной к эпюре M на

участке ось стержня необходимо поворачивать по часовой стрелке; если для указанного совмещения ось стержня нужно поворачивать против часовой стрелки, то эпюра Q на участке будет иметь отрицательный знак.

Используя изложенные закономерности в изменении эпюр M , Q , N , эти эпюры можно строить, не составляя зависимостей для изгибающих моментов, поперечных и продольных сил на участках, а ограничиваясь вычислением значений указанных усилий в характерных сечениях рамы.

Для иллюстрации такого подхода построения эпюр M , Q , N рассмотрим раму, изображенную на рис. 3.13.

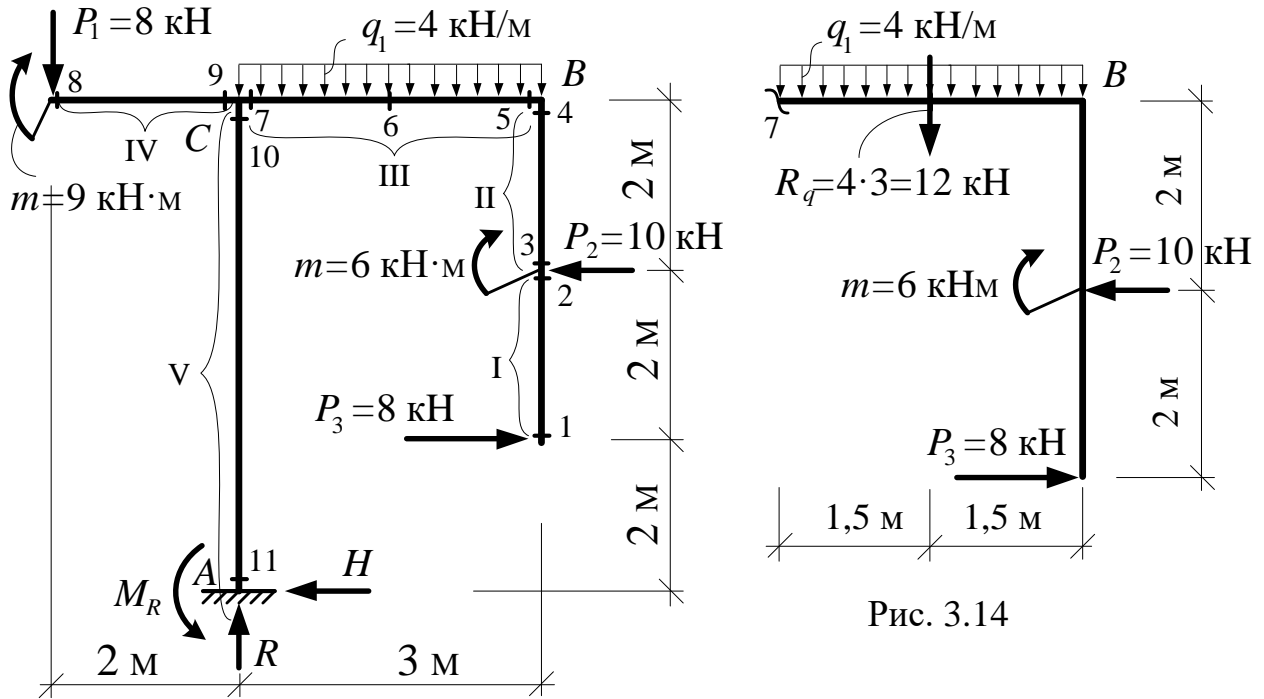


Рис. 3.14

Рис. 3.13. Расчетная схема рамы

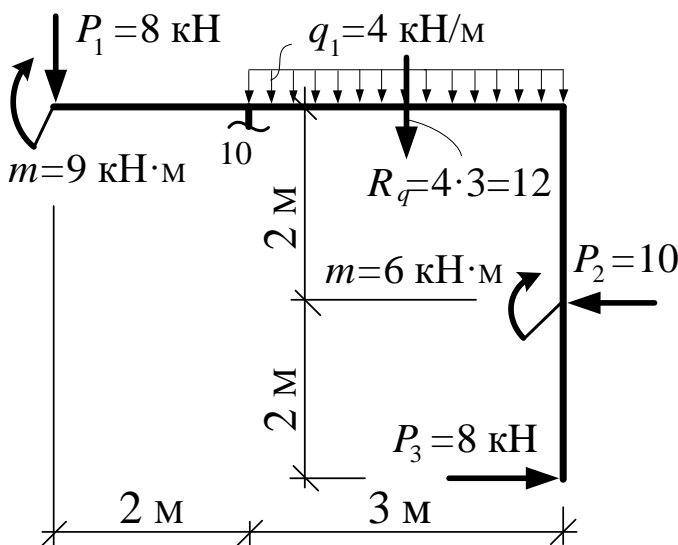


Рис. 3.15

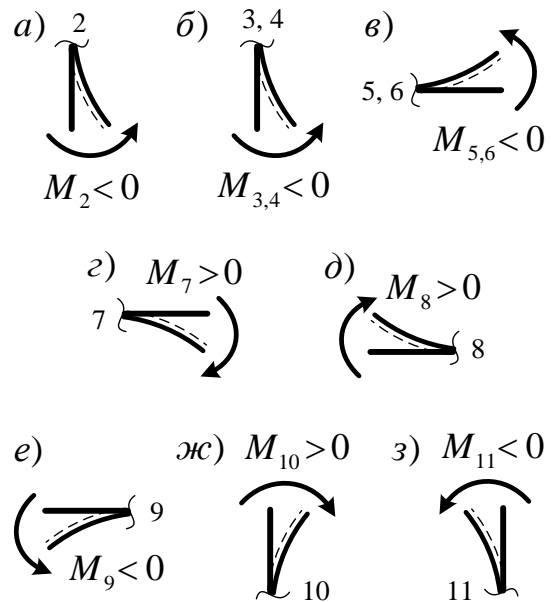


Рис. 3.16. Определение растянутых волокон

Рама является консольной и при вычислении усилий в любом ее сечении можно обойтись без определения опорных реакций, если рассматривать для

всех сечений равновесие отсеченных консольных частей рамы. Таким образом, при построении эпюр усилий в таких рамах опорные реакции можно не определять, если это не требуется специально. С другой стороны, зная опорные реакции, мы всегда имеем возможность выполнить проверку правильности предыдущих расчетов (рассматривая равновесие отсеченной части рамы со стороны опоры и равновесие опорного узла).

Для построения эпюр M , Q и N рассматриваемую раму следует разбить на 5 участков (рис. 3.13). При построении эпюры изгибающих моментов учтем, что на участках I, II, IV, V рамы эпюра M будет изменяться по линейному закону и для ее построения достаточно знать значения изгибающих моментов в крайних точках этих участков, то есть в сечениях 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11. На участке III, на который действует равномерно распределенная нагрузка, эпюра M будет изменяться по параболическому закону и для ее построения необходимо вычислить изгибающие моменты в сечениях 5, 6, 7. Выполним вычисление усилий в указанных сечениях, рассматривая равновесие консольных частей рамы (на рис. 3.14 и 3.15 показаны соответствующие части для 7 и 10 сечений):

$$M_1 = -8 \cdot 0 = 0; \quad M_2 = -8 \cdot 2 = -16 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_3 = -8 \cdot 2 + 6 = -10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = M_5 = -8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 6 = -6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_6 = -8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 6 + 4 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -1,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_7 = -8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 6 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 = 12 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_8 = +9 - 8 \cdot 0 = 9 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_9 = +9 - 8 \cdot 2 = -7 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{10} = +9 - 8 \cdot 2 - 8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 6 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 = -7 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{11} = +9 - 8 \cdot 2 + 8 \cdot 2 - 10 \cdot 4 + 6 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 = +6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Определение растянутых волокон в сечениях 1–11 по действующим в них изгибающим моментам показано на рис. 3.16. Окончательная эпюра изгибающих моментов в рассматриваемой раме представлена на рис. 3.17а.

Аналогично рассуждаем и при построении эпюр поперечных и продольных сил. На участках I, II, IV, V поперечные и продольные силы будут постоянны и для построения на этих участках эпюр Q и N достаточно вычислить значения Q и N в одном (произвольном на участке) сечении:

$$Q_I = Q_1 = Q_2 = -8 \text{ кН}; \quad Q_{II} = Q_3 = Q_4 = -8 + 10 = +2 \text{ кН};$$

$$Q_{IV} = Q_8 = Q_9 = -8; \quad Q_V = Q_{10} = Q_{11} = +8 - 10 = -2 \text{ кН};$$

$$N_I = N_1 = N_2 = 0; \quad N_{II} = N_3 = N_4 = 0;$$

$$N_{IV} = N_8 = N_9 = 0; \quad N_V = N_{10} = N_{11} = -8 - 4 \cdot 3 = -20 \text{ кН}.$$

На участке III поперечная сила не будет постоянной, но будет изменяться линейно, и для построения эпюры Q на этом участке необходимо вычислить значения Q в двух сечениях – 5 и 7: $Q_5 = 0; \quad Q_7 = 4 \cdot 3 = +12 \text{ кН}.$

Продольная же сила на этом участке будет постоянной: $N_{III} = 8 - 10 = -2 \text{ кН}.$ Построенные по полученным данным эпюры Q и N изображены на рис. 3.17б, в.

После построения окончательных эпюр M , Q и N выполняется проверка

равновесия узлов, показанная для рассмотренной рамы на рис. 3.18.

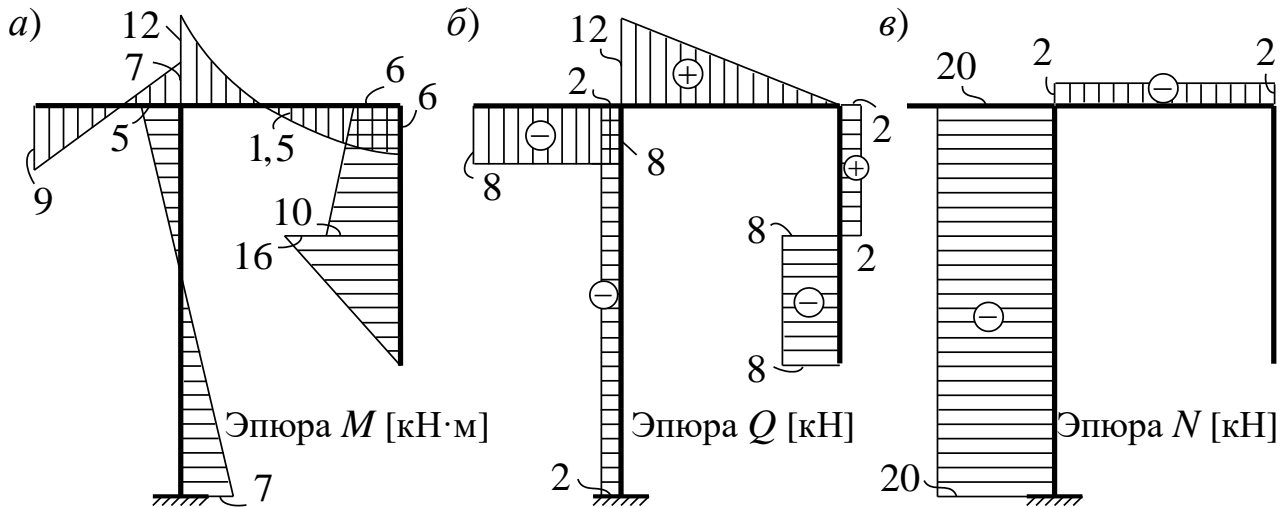
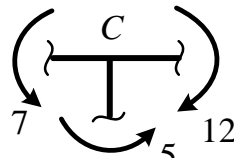


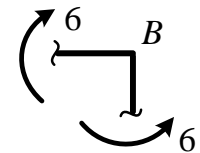
Рис. 3.17. Окончательные эпюры усилий

а) на эпюре M :

Узел C
 $\Sigma M_C = 0;$
 $12 - 7 - 5 = 0;$

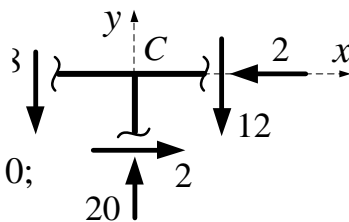


Узел B
 $\Sigma M_B = 0;$
 $6 - 6 = 0;$



б) по эпюрам Q и N :

Узел C
 $\Sigma X = 0; 2 - 2 = 0;$
 $\Sigma Y = 0; -8 + 20 - 12 = 0;$
 $20 - 20 = 0.$



Узел B
 $\Sigma X = 0; 2 - 2 = 0;$
 $\Sigma Y = 0; 0 = 0.$

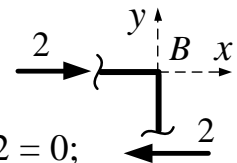


Рис. 3.18. Проверка равновесия узлов

На этом расчет консольной рамы можно и закончить, если нас не интересуют реакции заделки. Следует отметить, что в проектной практике расчета сооружений величины опорных реакций обычно знать необходимо (они используются в расчетах опорных узлов, нижележащих конструкций и т. д.). Поэтому здесь также выполним определение реактивных усилий в заделке, для чего рассмотрим равновесие рамы в целом:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; & \quad 8 - 10 - H = 0; & \quad H = -2 \text{ кН}; \\ \Sigma Y = 0; & \quad R - 8 - 4 \cdot 3 = 0; & \quad R = 20 \text{ кН}; \\ \Sigma M_A = 0; & \quad 9 - 8 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 - 10 \cdot 4 + 8 \cdot 2 - M_R = 0; & \quad M_R = -7 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Несложно увидеть, анализируя окончательные эпюры M , Q и N (рис. 3.17), что значения вычисленных опорных реакций равны соответствующим внутренним усилиям в приопорном сечении 11. Это свидетельствует о том, что опорный узел A находится в равновесии и что расчет рамы выполнен верно.

⚠ Анализ примеров расчета позволяет предложить следующий **порядок построения эпюр усилий M , Q и N** в рамно-стержневых и балочных системах:

1. Показываем предполагаемые направления опорных реакций в системе.

2. Составляем уравнения равновесия системы, решая которые определяем значения опорных реакций.

3. Выполняем проверку правильности определения опорных реакций.

4. Систему разбиваем на расчетные участки (участки между характерными точками) и определяем сечения, в которых необходимо вычислить внутренние силы M , Q и N для построения их эпюр.

5. Вычисляем значения внутренних сил M , Q и N в указанных сечениях (на основе выше изложенных правил) и строим эпюры усилий (с учетом общих закономерностей изменения эпюр на участках); на участках действия равномерно распределенных нагрузок при этом вычисляем экстремальные значения изгибающих моментов (если они есть).

6. Выполняем проверки равновесия узлов и соблюдения общих закономерностей изменения эпюр усилий.

Выполним расчет еще одной простой рамы, показанной на рис. 3.19.

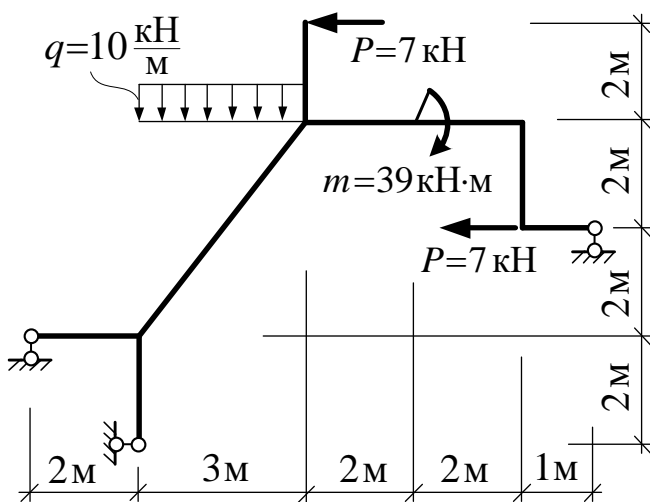


Рис. 3.19

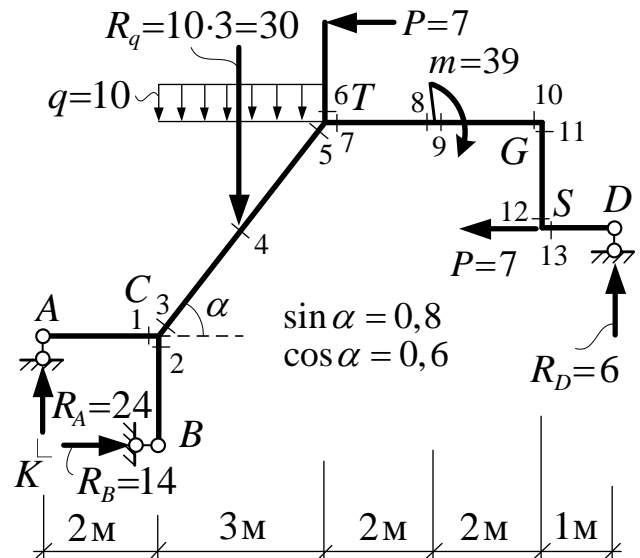


Рис. 3.20

С точки зрения кинематического анализа рама представляет собой один диск (ломано-разветвленный стержень), соединенный с основанием (с землей) тремя стержнями (шарнирно подвижными опорами).

Определяем опорные реакции (рис. 3.20):

$$\Sigma M_K = 0; \quad (10 \cdot 3) \cdot 3,5 - 7 \cdot 8 + 39 - 7 \cdot 4 + R_A \cdot 10 = 0; \quad R_D = 6 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0; \quad R_A - 24 + 6 = 0; \quad R_A = 24 \text{ кН};$$

$$\Sigma X = 0; \quad R_B - 7 - 7 = 0 \quad R_B = 14 \text{ кН};$$

Проверка правильности вычисления опорных реакций:

$$\Sigma M_T = 0; \quad 24 \cdot 5 - 14 \cdot 6 - (10 \cdot 3) \cdot 1,5 - 7 \cdot 2 + 39 + 7 \cdot 2 - 6 \cdot 5 = 0; \quad 159 - 159 = 0.$$

Для построения эпюр M , Q и N рассматриваемую раму следует разбить на восемь участков (рис. 3.20), на которых выделим 13 сечений, определяющих вид эпюр усилий (на участках опущены сечения, в которых расчет усилий легко выполнить даже устно и в которых изгибающие моменты равны нулю – это се-

чения у шарниров и на конце консоли). При этом учитываем, что эпюра изгибающих моментов на участке действия равномерно распределенной нагрузки изменяется по параболическому закону и для ее построения необходимо вычислить изгибающие моменты, по крайней мере, в трех сечениях – 3, 4, 5; на остальных участках рамы эпюра M будет изменяться по линейным зависимостям и для ее построения достаточно знать значения изгибающих моментов в двух крайних точках этих участков.

Вычисление значений изгибающих моментов и определение растянутых волокон в расчетных сечениях:

$$\begin{aligned}
 M_1^{лев} &= 24 \cdot 2 = +48 \text{ кН}\cdot\text{м}; & M_2^{нижн} &= -14 \cdot 2 = -28 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 M_3^{нижн} &= 24 \cdot 2 - 14 \cdot 2 = +20 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 M_4^{нижн} &= 24 \cdot 3,5 - 14 \cdot 4 - (10 \cdot 1,5) \cdot 0,75 = +16,75 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 M_5^{нижн} &= 24 \cdot 5 - 14 \cdot 6 - (10 \cdot 3) \cdot 1,5 = -9 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 M_6^{верхн} &= -7 \cdot 2 = -14 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 M_7^{прав} &= +39 + 7 \cdot 2 - 6 \cdot 5 = +23 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 M_8^{прав} &= +39 + 7 \cdot 2 - 6 \cdot 3 = +35 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 M_9^{прав} &= 7 \cdot 2 - 6 \cdot 3 = -4 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 M_{10}^{прав} &= 7 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 M_{11}^{нижн} &= 7 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 M_{12}^{нижн} &= 7 \cdot 0 - 6 \cdot 1 = -6 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 M_{13}^{прав} &= -6 \cdot 1 = -6 \text{ кН}\cdot\text{м};
 \end{aligned}$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов в рассматриваемой раме, построенная по результатам расчетов, представлена на рис. 3.22а.

Аналогично рассуждаем и при построении эпюр поперечных и продольных сил.

На участке действия равномерно распределенной нагрузки поперечная и продольная силы будут (могут) изменяться линейно и для построения эпюр Q и N на этом участке необходимо вычислить значения этих усилий в двух сечениях – 3 и 5 (рис. 3.21):

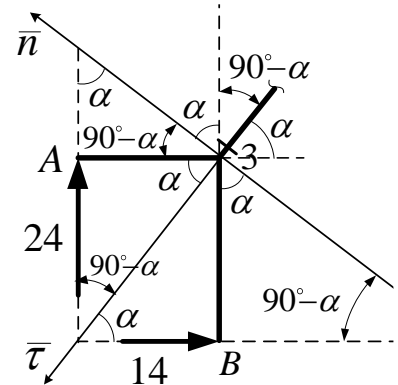


Рис. 3.21

$$Q_3^{нижн} = 24 \cdot \cos \alpha - 14 \cdot \sin \alpha = 24 \cdot 0,6 - 14 \cdot 0,8 = 3,2 \text{ кН};$$

$$Q_5^{нижн} = 24 \cos \alpha - 14 \sin \alpha - (10 \cdot 3) \cos \alpha = 24 \cdot 0,6 - 14 \cdot 0,8 - (10 \cdot 3) 0,6 = -14,8 \text{ кН};$$

$$N_3^{нижн} = -24 \cdot \sin \alpha - 14 \cdot \cos \alpha = -24 \cdot 0,8 - 14 \cdot 0,6 = -27,6 \text{ кН};$$

$$N_5^{нижн} = -24 \cdot \sin \alpha - 14 \cdot \cos \alpha + (10 \cdot 3) \sin \alpha = 24 \cdot 0,6 - 14 \cdot 0,8 + (10 \cdot 3) 0,8 = -3,6 \text{ кН}.$$

На остальных участках поперечные и продольные силы будут постоянны и для построения эпюр Q и N на этих участках достаточно вычислить значения этих усилий в одном, произвольном на каждом участке сечении:

$$\begin{aligned}
 Q_1^{лев} &= +24 \text{ кН}; & Q_2^{нижн} &= -14 \text{ кН}; & Q_6^{верхн} &= -7 \text{ кН}; \\
 Q_7^{прав} &= Q_8 = Q_9 = Q_{10} = -6 \text{ кН}; & Q_{11}^{верхн} &= Q_{12} = +7 \text{ кН}; & Q_{13}^{прав} &= -6 \text{ кН}; \\
 N_1^{лев} &= 0; & N_2^{нижн} &= 0; & N_6^{верхн} &= 0; \\
 N_7^{прав} &= N_8 = N_9 = N_{10} = -7 \text{ кН}; & N_{11}^{верхн} &= N_{12} = -6 \text{ кН}; & N_{13}^{прав} &= 0.
 \end{aligned}$$

Построенные по полученным данным эпюры Q и N изображены на рис. 3.22б, и 3.23.

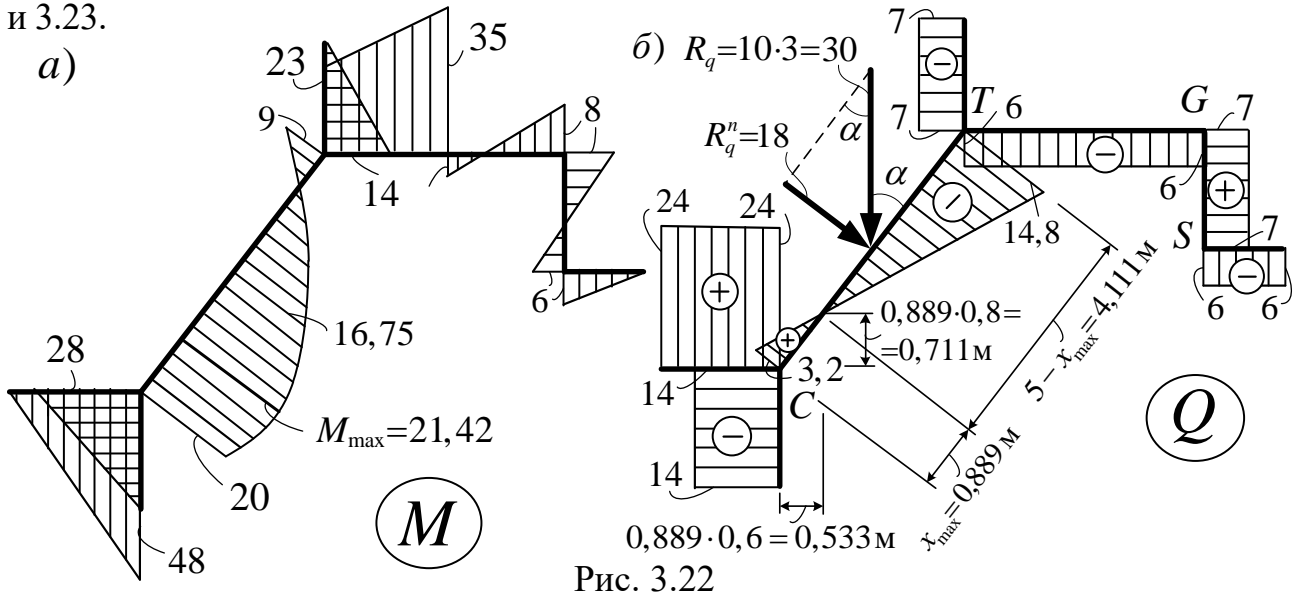


Рис. 3.22

На участке действия равномерно распределенной нагрузки на эпюре Q имеется сечение, в котором поперечная сила равна нулю. В этом сечении изгибающий момент будет иметь максимальное значение, величина которого равна:

$$M_{\max}^{лев} = 24 \cdot (2 + 0,533) - 14 \cdot (2 + 0,711) - (10 \cdot 0,533) \cdot 0,5 \cdot 0,533 = 21,42 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

где положение сечения определяется из соотношения:

$$\begin{aligned}
 \frac{3,2}{14,8} &= \frac{x_{\max}}{5 - x_{\max}}; & 3,2 \cdot (5 - x_{\max}) &= 14,8 \cdot x_{\max}; \\
 18 \cdot x_{\max} &= 16; & x_{\max} &= 0,889 \text{ м}.
 \end{aligned}$$

После построения окончательных эпюр изгибающих моментов M , поперечных сил Q и продольных сил N выполняется проверка равновесия узлов по изгибающим моментам и по поперечным и продольным силам.

Проверка равновесия узлов на эпюре M :

$$\Sigma M_C = 0;$$

$$\Sigma M_T = 0;$$

$$\Sigma M_G = 0;$$

$$\Sigma M_S = 0;$$

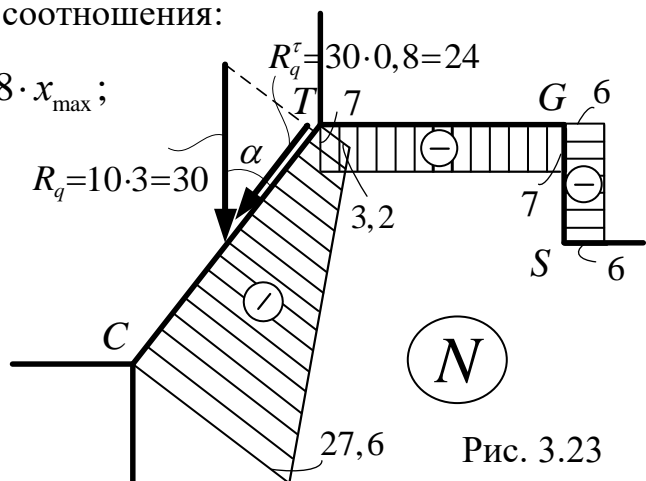


Рис. 3.23

$$48 - 28 - 20 = 0; \quad 23 - 9 - 14 = 0; \quad 8 - 8 = 0;$$

Проверка равновесия узлов по эпюрам Q и N :

Узел С: $\Sigma X = 0; \quad -27,6 \cdot 0,6 + 3,2 \cdot 0,8 + 14 = 0;$
 $-16,56 + 16,56 = 0;$

$\Sigma Y = 0; \quad -27,6 \cdot 0,8 - 3,2 \cdot 0,6 + 24 = 0; \quad -24 + 24 = 0;$

Узел Т:

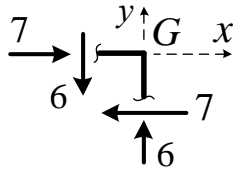
$\Sigma X = 0; \quad 3,6 \cdot 0,6 + 14,8 \cdot 0,8 - 7 - 7 = 0; \quad 14 - 14 = 0;$

$\Sigma Y = 0; \quad 3,6 \cdot 0,8 - 14,8 \cdot 0,6 + 6 = 0; \quad 8,88 - 8,88 = 0;$

Узел G:

$\Sigma X = 0 \quad 7 - 7 = 0;$

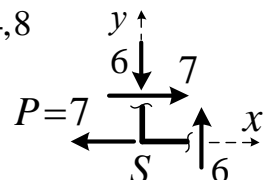
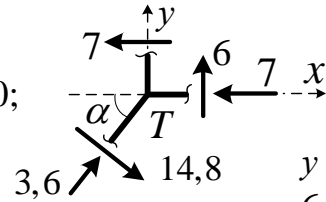
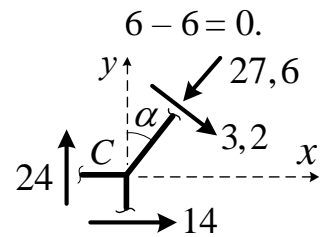
$\Sigma Y = 0; \quad -6 + 6 = 0;$



Узел S:

$\Sigma X = 0; \quad -7 + 7 = 0;$

$\Sigma Y = 0; \quad -6 + 6 = 0.$



3.4. Особенности расчета трехшарнирных рам

Трехшарнирные рамы (рис. 3.7) имеют обычно либо более трех внешних опорных реакций (рис. 3.7а), либо замкнутые контура (рис. 3.7б), без «разрезания» которых нельзя полностью определить внутренние силы в таких системах. Поэтому для расчета трехшарнирных рам трех уравнений равновесия всей системы недостаточно, – необходимо дополнительно составлять уравнения равновесия отдельных частей этих систем и определять наряду с внешними опорными реакциями и некоторые внутренние силы – усилия в шарнирах, в затяжках, – после нахождения которых построение эпюр усилий M , Q , N в этих системах можно выполнить по тем же принципам, что и в простых рамах.

Ниже рассмотрим возможные схемы определения внешних опорных реакций и некоторых внутренних сил для ряда видов рам, знания которых достаточно для построения эпюр усилий в этих системах (внешняя нагрузка на рамы может быть любой и на схемах рам не показывается; при наличии особенностей, связанных с приложением нагрузок, они оговариваются отдельно):

I. Трехшарнирная рама с опорами в одном уровне (рис. 3.24).

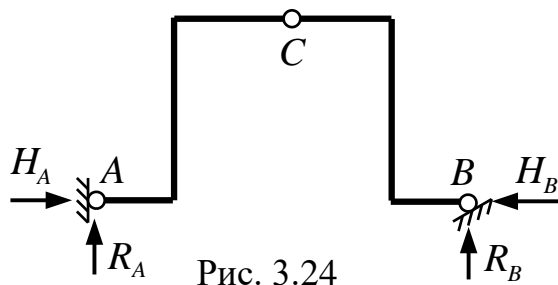


Рис. 3.24

Возможный порядок расчета:

1) $\Sigma M_A = 0; \quad R_B = \dots$

2) $\Sigma M_B = 0; \quad R_A = \dots$

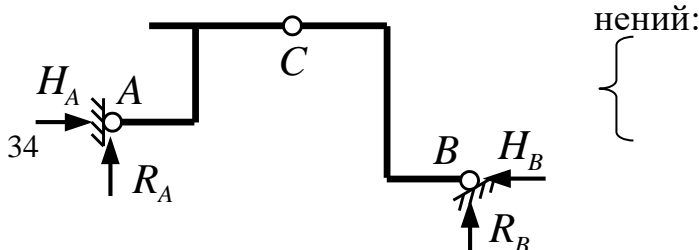
3) $\Sigma M_C^{лев} = 0; \quad H_A = \dots$

4) $\Sigma X = 0; \quad H_B = \dots$

Проверка: $\Sigma M_C^{прав} = 0; \dots$

II. Трехшарнирная рама с опорами в разных уровнях (рис. 3.25).

Особенность этой рамы в том, что для нее нельзя составить ни одного уравнения равновесия, в которое входило бы только одно неизвестное, и значит, для определения опорных реакций здесь не обойтись без решения системы урав-



$$\begin{aligned}
 1) \Sigma M_A = 0; & \quad (R_B, H_B) \implies R_B = \dots \\
 2) \Sigma M_C^{прав} = 0; & \quad (R_B, H_B) \implies H_B = \dots \\
 3) \Sigma X = 0; & \quad H_A = \dots \\
 4) \Sigma Y = 0; & \quad R_A = \dots
 \end{aligned}$$

Рис. 3.25

Проверка: $\Sigma M_C^{лев} = 0; \dots$

III. Трехшарнирная рама с затяжкой.

Затяжкой называют прямолинейный стержень, соединяющийся с остальными частями системы по концам шарнирно и работающий при отсутствии на него нагрузки только на растяжение-сжатие.

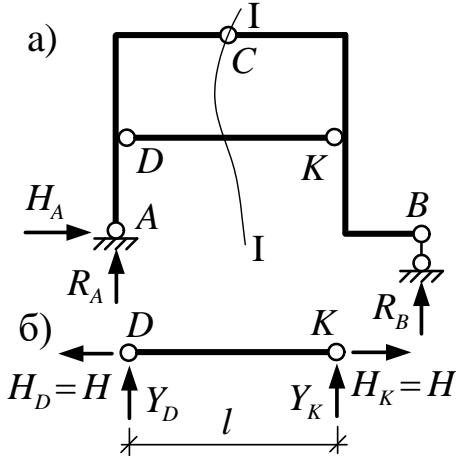


Рис 3.26

Рассмотрим раму, изображенную на рис. 3.26а. Стержень DK здесь будем считать *ненагруженным*. Вырежем и рассмотрим его равновесие отдельно (рис. 3.21б):

$$\begin{aligned}
 \Sigma M_D = 0; & \quad Y_K \cdot l = 0; \quad Y_K = 0; \\
 \Sigma M_K = 0; & \quad Y_D \cdot l = 0; \quad Y_D = 0; \\
 \Sigma X = 0; & \quad H_D - H_K = 0; \quad H_D = H_K = H.
 \end{aligned}$$

Получаем, что в стержне DK возникает только продольная сила и он соответственно работает только на растяжение-сжатие, то есть стержень DK является затяжкой, а усилие H – продольное усилие в затяжке.

Тогда для рамы с ненагруженной затяжкой можно принять следующий порядок расчета:

1) определяем внешние опорные реакции, которых в рассматриваемой раме (рис. 3.21) всего три – как в обычных простых рамах, например, из уравнений:

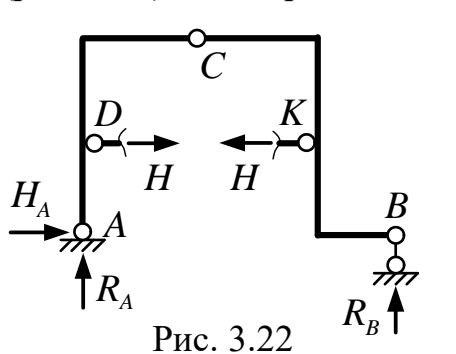


Рис. 3.22

$$\begin{aligned}
 \Sigma M_A = 0; & \quad R_B = \dots \\
 \Sigma M_B = 0; & \quad R_A = \dots \\
 \Sigma X = 0; & \quad H_A = \dots
 \end{aligned}$$

Проверка: $\Sigma Y = 0; \dots$

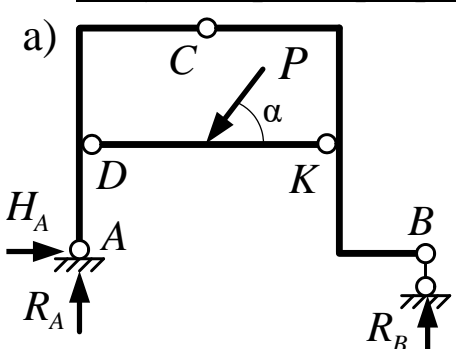
2) проводим сечение через шарнир C и затяжку DK (рис. 3.21), обозначая усилие в затяжке через H ; рама принимает вид, представленный на рис. 3.22; для определения усилия в затяжке рассмотрим равновесие одной из полурам (например, правой):

$$\Sigma M_C^{прав} = 0; \quad H = \dots$$

3) для проверки используем уравнение равновесия левой части: $\Sigma M_C^{лев} = 0. \dots$

В случае трехшарнирной рамы с нагруженной затяжкой (рис. 3.23)

возможная схема ее расчета может быть следующей:



1) внешние опорные реакции R_A , H_A и R_B определяются так же, как и для трехшарнирной рамы с ненагруженной затяжкой (рис. 3.23):

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0; & \quad R_B = \dots & \quad \Sigma X = 0; & \quad H_A = \dots \\ \Sigma M_B = 0; & \quad R_A = \dots & \quad \text{Проверка: } \Sigma Y = 0; & \\ 2) & \text{ вырезаем затяжку } DK \text{ и рассматриваем ее} \end{aligned}$$

Рис 3.23

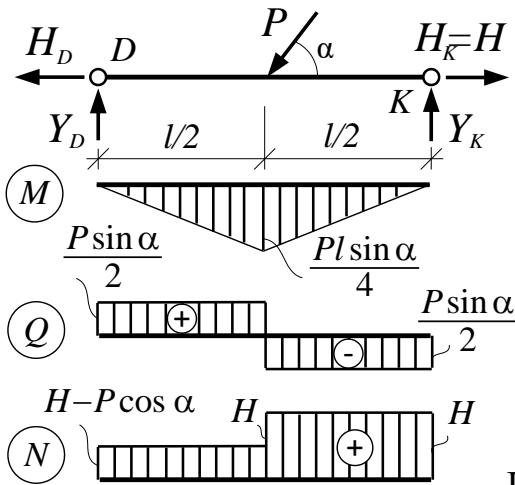


Рис. 3.24

равновесие с учетом действующих на нее нагрузок (рис. 3.24); из уравнений равновесия $\Sigma M_D = 0$ и $\Sigma M_K = 0$ определяем вертикальные реактивные усилия Y_D и Y_K в шарнирах D и K , а из уравнения $\Sigma X = 0$ найдем зависимость между H_D и H_K с точностью до одного параметра H , который пока неизвестен.

Например, для нагрузки на затяжку, представленной на рис. 3.24, получим:

$$\begin{aligned} Y_D = Y_K &= 0,5 \sin \alpha \\ H_K - P \cos \alpha &= H - P \cos \alpha. \end{aligned}$$

Имея эти величины, можно построить в затяжке окончательные эпюры усилий M , Q и N с точностью до параметра H , определяющего продольные силы в затяжке (рис. 3.24);

3) рассматриваем теперь раму ABC без затяжки, но с учетом передаваемых от нее на раму (в обратных направлениях) реактивных усилий в шарнирах D и K — Y_D , Y_K , которые уже известны, и усилий H_D , H_K , которые известны с точностью до параметра H (рис. 3.24); найдем этот параметр, рассмотрев равновесие одной из полурам (рис. 3.25):

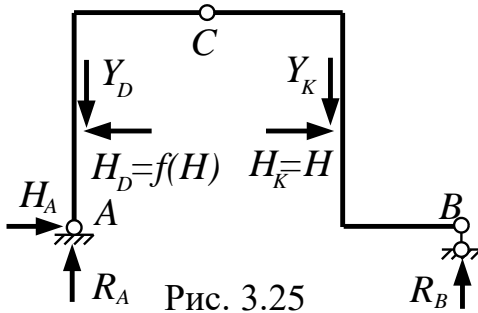


Рис. 3.25

$$\Sigma M_C^{прав} = 0; \quad H = \dots \quad \text{Проверка: } \Sigma M_C^{лев} = 0;$$

IV. Трехшарнирная рама с двумя параллельными затяжками (рис. 3.26).

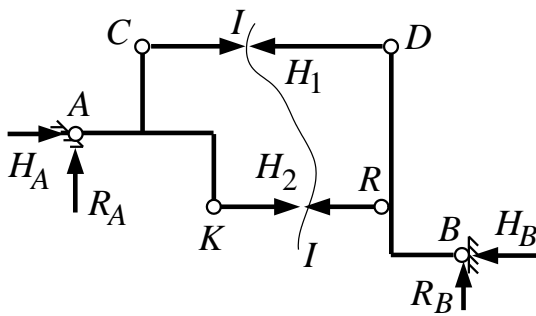


Рис. 3.26

Возможная схема расчета:

1) проводим сечение I-I и рассматриваем равновесие левой и правой частей рамы:

$$\begin{aligned} \Sigma Y^{лев} = 0; & \quad R_A = \dots \\ \Sigma Y^{прав} = 0; & \quad R_B = \dots \end{aligned}$$

2) рассматриваем равновесие рамы в целом:

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0; & \quad H_B = \dots \\ \Sigma M_B = 0; & \quad H_A = \dots \end{aligned}$$

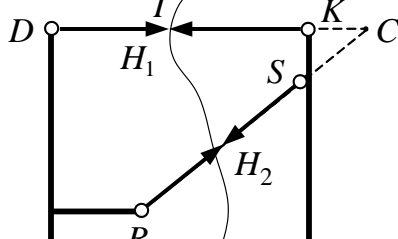
3) рассматривая теперь равновесие левой (либо правой) части, найдем усилия в затяжках: $\Sigma M_K^{лев} = 0; \quad H_2 = \dots \quad \Sigma M_C^{лев} = 0; \quad H_1 = \dots$

4) выполняем проверку правильности определения реакций: $\Sigma M_B^{прав} = 0; \dots$

V. Трехшарнирная рама с двумя пересекающимися затяжками (рис. 3.27).

Возможная схема (порядок) расчета: 1) $\Sigma M_A = 0; \quad R_B = \dots$

$$2) \Sigma M_B = 0; \quad R_A = \dots$$



3) проводим сечение I–I (рис. 3.27) и рассматриваем равновесие частей рамы:

$$\Sigma M_C^{лев} = 0; \quad H_A = \dots$$

$$4) \Sigma M_C^{прав} = 0; \quad H_B = \dots$$

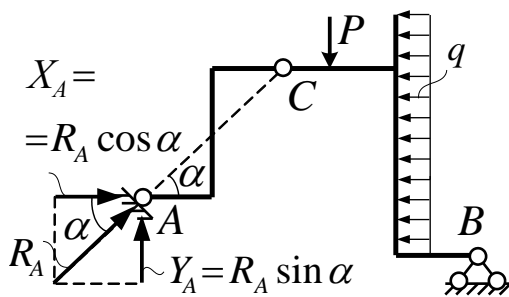
$$5) \Sigma M_D^{лев} = 0; \quad H_2 = \dots$$

$$6) \Sigma M_R^{лев} = 0; \quad H_1 = \dots$$

$$7) \text{Проверка: } \Sigma X^{прав} = 0; \dots \Sigma Y^{прав} = 0; \dots$$

Рис. 3.27

VI. Отметим еще одно возможное упрощение в расчетах трехшарнирных и составных рам. Если в структуре рамы имеется диск, который не нагружен и который соединяется с другими дисками (с основанием) с помощью только двух шарниров (смотри, например, диск AC на рис. 3.28), то можно и нужно использовать условие равновесия такого диска, а такой диск будет находиться в равновесии только в том случае, если реактивные силы в указанных двух шарнирах направлены по прямой, соединяющей шарниры. Это означает,



что мы знаем направление реактивных усилий, действующих на диск, и нет необходимости искать их в виде составляющих.

Например, для рамы на рис. 3.28 реакция в шарнирно неподвижной опоре A (R_A) будет направлена по прямой AC, и тогда ее величину легко найти из уравнения: $\Sigma M_B = 0$. Несложно после этого найти и составляющие реакции R_A , если это необходимо.

Рис. 3.28

Рассмотрим расчет рамы, представленной на рис. 3.29.

Определим вначале опорные реакции (рис. 3.30):

$$\Sigma M_A = 0; \quad 10 \cdot 4 - 10 - 20 \cdot 4 - 10 + R_D \cdot 10 = 0; \quad R_D = 6 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_C^{прав} = 0; \quad 20 \cdot 2 + 6 \cdot 7 - 10 - R_B \cdot 6 = 0; \quad R_B = 12 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_K = 0; \quad 10 \cdot 4 - 10 - 20 \cdot 4 - 10 + R_A \cdot 10 = 0; \quad R_A = 6 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_C^{лев} = 0; \quad 6 \cdot 3 - 10 \cdot 2 - 10 + \cdot 6 = 0; \quad H_A = 2 \text{ кН};$$

$$\text{Проверка: } \Sigma X = 0; \quad -2 + 10 - 20 + 12 = 0; \quad 22 - 22 = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad -6 + 6 = 0.$$

Для построения эпюр M , Q и N рассматриваемую раму разобьем на восемь участков (рис. 3.30). Учтем, что на участке действия равномерно распределенной нагрузки эпюра изгибающих моментов будет изменяться по параболическому закону и для ее построения необходимо вычислить изгибающие моменты, по крайней мере, в трех сечениях – в сечениях 9, 10, 11. На остальных участках эпюра M будет изменяться по линейному закону и для ее построения достаточно знать значения изгибающих моментов в крайних точках этих участков, то есть в сечениях 1, 2, 3, 4, 8 и 12, 13, 14 (здесь опущены сечения, в которых расчет усилий легко выполняется даже устно и в которых изгибающие моменты явно равны нулю, – например, сечения у шарниров).

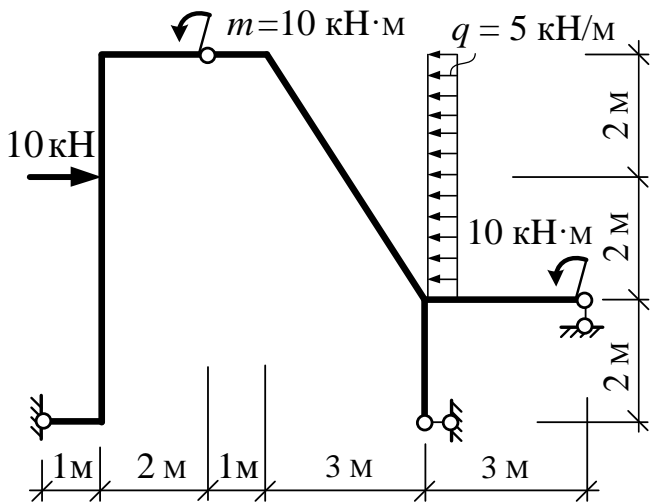


Рис. 3.29

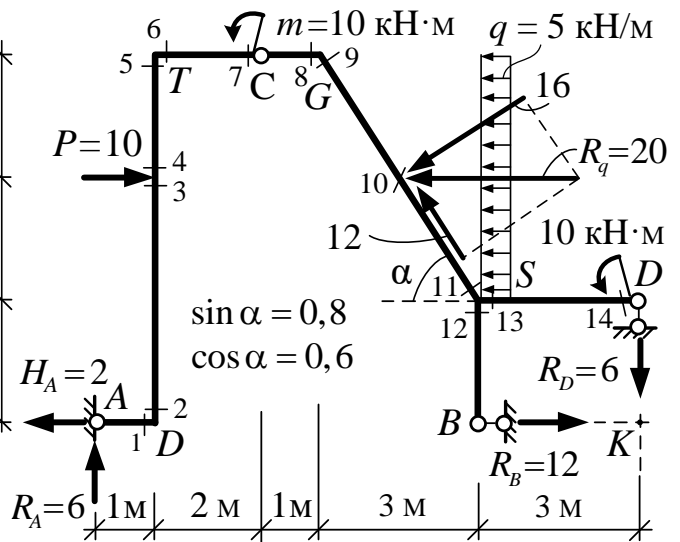


Рис. 3.30

Вычисление усилий в расчетных сечениях (с определением растянутых волокон):

$$\begin{aligned}
 M_1^{лев} &= 6 \cdot 1 = +6 \text{ кН}\cdot\text{м}; & M_2^{нижн} &= 6 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = +6 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 M_3^{нижн} &= M_4 = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = +14; & M_5^{нижн} &= 6 \cdot 1 + 2 \cdot 6 - 10 \cdot 2 = -2 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 M_6^{лев} &= M_5^{нижн} = -2 \text{ кН}\cdot\text{м}; & M_7^{лев} &= 6 \cdot 3 + 2 \cdot 6 - 10 \cdot 2 = +10 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 M_8^{лев} &= M_9^{лев} = 6 \cdot 4 + 2 \cdot 6 - 10 \cdot 2 - 10 = +6 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 M_9^{прав} &= (5 \cdot 4) \cdot 2 - 10 + 6 \cdot 6 - 12 \cdot 6 = -6 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 M_{10}^{прав} &= (5 \cdot 2) \cdot 1 - 10 + 6 \cdot 4,5 - 12 \cdot 4 = -21 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 M_{11}^{нижн} &= -10 + 6 \cdot 3 - 12 \cdot 2 = -16 \text{ кН}\cdot\text{м}; & M_{12}^{нижн} &= -12 \cdot 2 = -24 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 M_{13}^{прав} &= -10 + 6 \cdot 3 = +8 \text{ кН}\cdot\text{м}; & M_{14}^{прав} &= -10 + 6 \cdot 0 = -10 \text{ кН}\cdot\text{м};
 \end{aligned}$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов в рассматриваемой раме, построенная по результатам расчетов, представлена на рис. 3.31.

Аналогично подходим и к построению эпюр поперечных и продольных сил.

На участке действия равномерно распределенной нагрузки поперечная и продольная силы будут (могут) изменяться линейно и для построения эпюр Q и N на этом участке необходимо вычислить значения этих усилий в двух сечениях – 9 и 11 (рис. 3.30, 3.31):

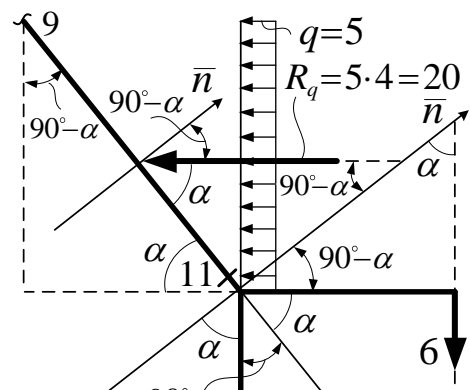
$$Q_9^{нижн} = + (5 \cdot 4) \sin \alpha - 12 \cdot \sin \alpha + 6 \cdot \cos \alpha = (20 - 12) \cdot 0,8 + 6 \cdot 0,6 = +10 \text{ кН};$$

$$Q_{11}^{нижн} = -12 \cdot \sin \alpha + 6 \cdot \cos \alpha = -12 \cdot 0,8 + 6 \cdot 0,6 = -6 \text{ кН};$$

$$N_9^{нижн} = - (5 \cdot 4) \cdot \cos \alpha + 12 \cdot \cos \alpha + 6 \cdot \sin \alpha = (-20 + 12) \cdot 0,6 + 6 \cdot 0,8 = 0;$$

$$N_{11}^{нижн} = 12 \cdot \cos \alpha + 6 \cdot \sin \alpha = 12 \cdot 0,6 + 6 \cdot 0,8 = +12 \text{ кН}.$$

На остальных участках поперечные и продольные силы будут постоянны и для построения



их эпюры на этих участках достаточно вычислить значения Q и N в одном из сечений участков:

$$Q_1^{лев} = +6 \text{ кН}; \quad Q_2^{нижн} = Q_3 = +2 \text{ кН};$$

$$Q_4^{нижн} = Q_5 = +2 - 10 = -8 \text{ кН}; \quad Q_6^{лев} = Q_7 = Q_8 = 6 \text{ кН};$$

$$Q_{12}^{нижн} = -12 \text{ кН}; \quad Q_{13}^{прав} = Q_{14} = +6 \text{ кН}; \quad N_1^{лев} = 0;$$

$$N_2^{нижн} = N_3 = N_4 = N_5 = -6 \text{ кН}; \quad N_{12}^{нижн} = 0;$$

$$N_6^{лев} = N_7 = N_8 = +2 - 10 = -8 \text{ кН}; \quad N_{13}^{прав} = N_{14} = 0.$$

Построенные по полученным данным эпюры Q и N изображены на рис. 3.32 и 3.33.

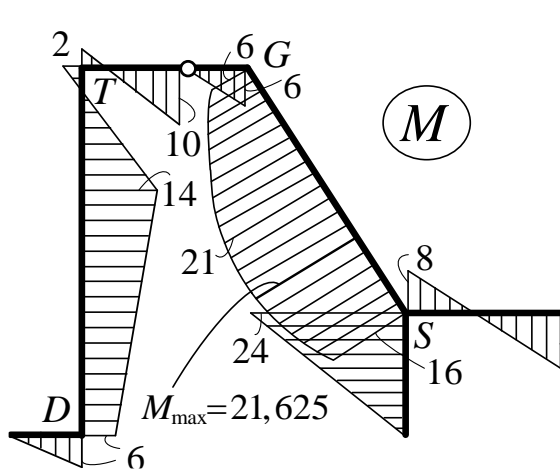


Рис. 3.31

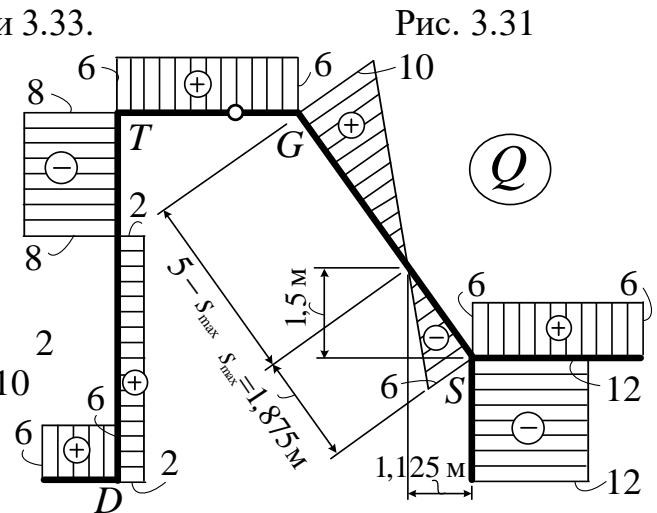


Рис. 3.32

На участке действия равномерно распределенной нагрузки на эпюре Q имеется особое сечение, в котором поперечная сила равна нулю. В этом сечении изгибающий момент будет максимальным на участке. Положение этого сечения найдем из соотношения (рис. 3.32):

$$\frac{10}{5 - s_{\max}} = \frac{6}{s_{\max}}; \quad 10 \cdot s_{\max} = 6 \cdot (5 - s_{\max});$$

$$16 \cdot s_{\max} = 30; \quad s_{\max} = 1,875 \text{ м}.$$

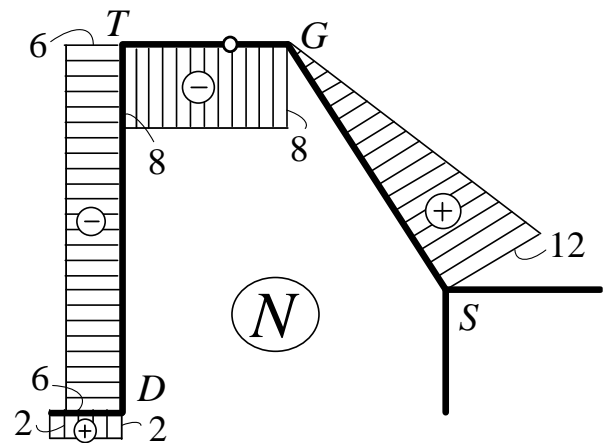


Рис. 3.33

Горизонтальный и вертикальный размеры положения сечения будут равны:

$$x_{\max} = 1,875 \cdot 0,6 = 1,125 \text{ м}; \quad y_{\max} = 1,875 \cdot 0,8 = 1,5 \text{ м} \quad (\text{см. рис. 3.32}).$$

Величина максимального изгибающего момента равна:

$$M_{\max}^{прав} = (5 \cdot 1,5) \cdot 0,75 - 10 + 6 \cdot (3 + 1,125) - 12 \cdot (2 + 1,5) = -21,625 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

Проверки равновесия узлов для окончательных эпюр M , Q и N :

а) на эпюре M :

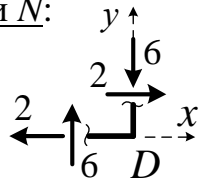


$$\begin{aligned} \Sigma M_D = 0; & \quad \Sigma M_T = 0; & \quad \Sigma M_G = 0; & \quad \Sigma M_S = 0; \\ 6 - 6 = 0; & \quad 2 - 2 = 0; & \quad 6 - 6 = 0; & \quad 16 + 8 - 24 = 0. \end{aligned}$$

б) по эпюрам Q и N :

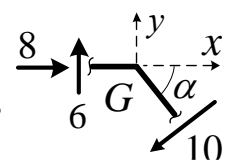
Узел D:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; & \quad -2 + 2 = 0; \\ \Sigma Y = 0; & \quad 6 - 6 = 0; \end{aligned}$$



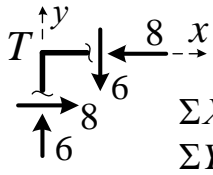
Узел G:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0 & \quad 8 - 10 \cdot 0,8 = 0; \quad 8 - 8 = 0; \\ \Sigma Y = 0; & \quad 6 - 10 \cdot 0,6 = 0; \quad 6 - 6 = 0; \end{aligned}$$



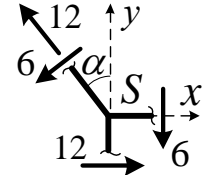
Узел T:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; & \quad 8 - 8 = 0; \\ \Sigma Y = 0; & \quad 6 - 6 = 0; \end{aligned}$$



Узел S:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; & \quad 12 - 12 \cdot 0,6 - 6 \cdot 0,8 = 0; \quad 12 - 12 = 0; \\ \Sigma Y = 0; & \quad 12 \cdot 0,8 - 6 \cdot 0,6 - 6 = 0; \quad 9,6 - 9,6 = 0; \end{aligned}$$



Рассмотрим далее расчет рамы с ненагруженной затяжкой (рис. 3.34).

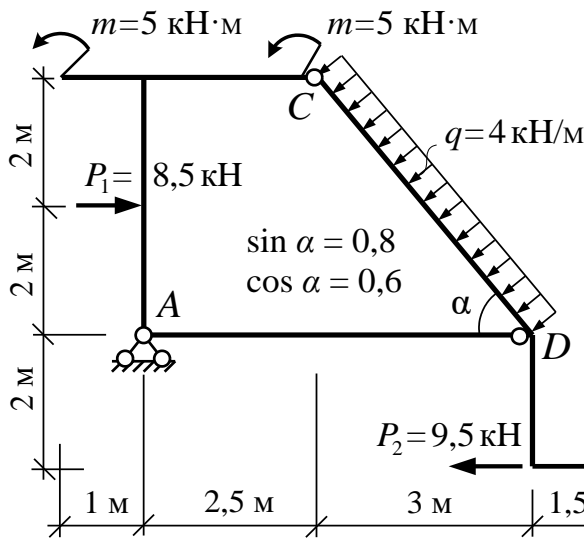


Рис. 3.34

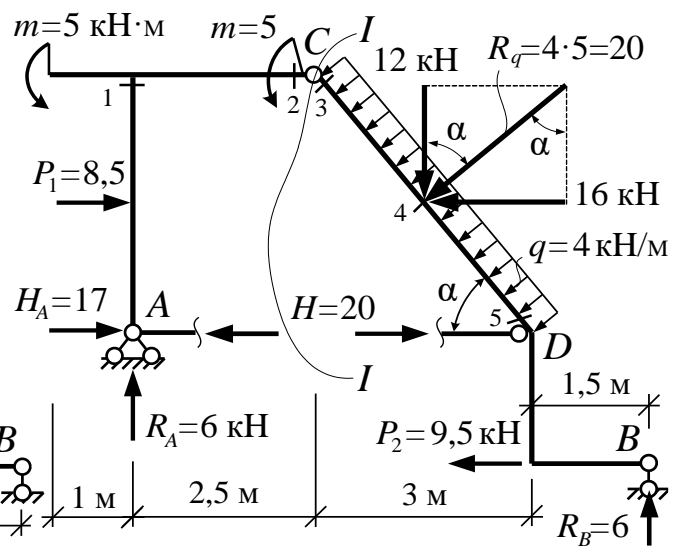


Рис. 3.35

Внешние опорные реакции определяем из уравнений равновесия всей рамы:

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0; & \quad -5 - 5 + 8,5 \cdot 2 + 12 \cdot (2,5 + 1,5) - 16 \cdot 2 + 9,5 \cdot 2 - R_B \cdot 7 = 0; \quad R_B = 6 \text{ кН}; \\ \Sigma X = 0; & \quad H_A + 8,5 - 16 - 9,5 = 0; \quad H_A = 17,0 \text{ кН}; \\ \Sigma Y = 0; & \quad R_A - 12 + 6 = 0; \quad R_A = 6 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Для определения усилия в затяжке проводим сечение $I-I$ через шарнир C и затяжку и рассматриваем равновесие одной из частей рамы, например, правой:

$$\Sigma M_C^{прав} = 0; \quad 12 \cdot 1,5 + 16 \cdot 2 + 9,5 \cdot 6 - 6 \cdot 4,5 - H \cdot 4 = 0; \quad H = 20 \text{ кН}.$$

Проверка: $\Sigma M_C^{лев} = 0; \quad 6 \cdot 2,5 + (20 - 17) \cdot 4 - 8,5 \cdot 2 - 5 - 5 = 0; \quad 27 - 27 = 0.$

Покажем вычисление усилий в ряде сечений рамы:

$$M_2^{прав} = (4 \cdot 2,5) \cdot 1,25 - 20 \cdot 2 + 9,5 \cdot 4 - 6 \cdot (1,5 + 1,5) = -7,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3^{прав} = -20 \cdot 0 + 9,5 \cdot 2 - 6 \cdot 1,5 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_1^{прав} = +(4 \cdot 5) - 20 \sin \alpha + 9,5 \sin \alpha - 6 \cos \alpha = 8 \text{ кН};$$

$$Q_3^{прав} = -20 \sin \alpha + 9,5 \sin \alpha - 6 \cos \alpha = -12 \text{ кН};$$

$$N_1^{прав} = N_3^{прав} = 20 \cos \alpha - 9,5 \cos \alpha - 6 \cos \alpha = 15 \text{ кН}.$$

По результатам расчетов строим эпюры изгибающих моментов M , поперечных и продольных сил Q и N (рис 3.36). Там же представлена проверка равновесия узла D по поперечным и продольным силам.

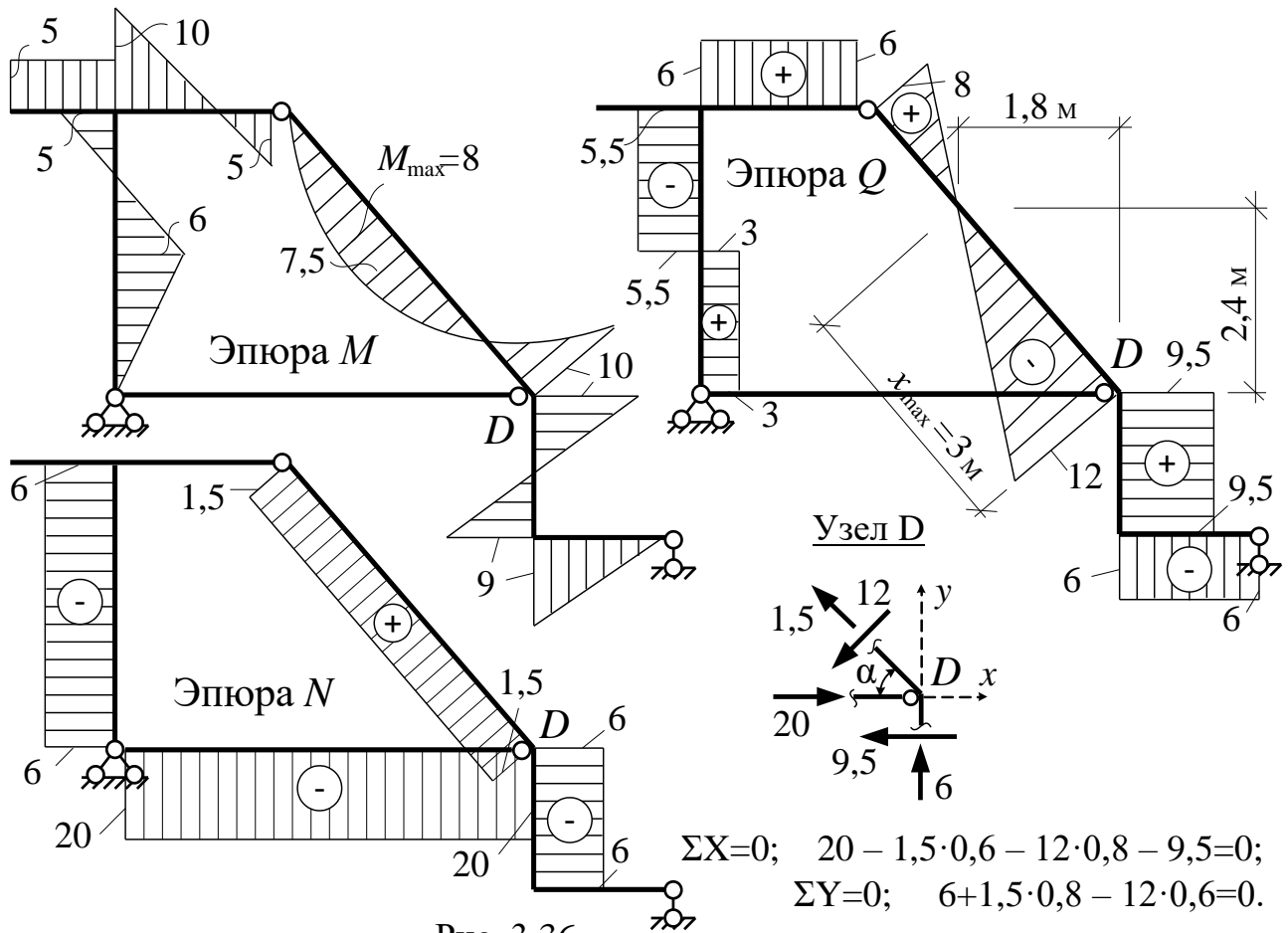


Рис. 3.36

Рассмотрим далее расчет рамы с нагруженной затяжкой (рис. 3.37).

Опорные реакции определяем из уравнений равновесия рамы в целом:

$$\Sigma M_K = 0; \quad -6 - 18 + (4 \cdot 8) \cdot 2 - R_A \cdot 8 = 0; \quad R_A = 5 \text{ кН};$$

$$\Sigma X = 0; \quad -R_D + 4 \cdot 8 = 0; \quad R_D = 32 \text{ кН}; \quad \Sigma Y = 0; \quad -5 + R_B = 0; \quad R_B = 5 \text{ кН}.$$

Для раскрытия в раме замкнутого контура вырезаем затяжку $T-S$ замкнутым сечением $I-I$ (рис. 3.38), и рассматриваем ее равновесие под действующими на нее нагрузками, определяя вертикальные усилия в шарнирах T и $S - Y_T$ и Y_S :

$$\Sigma M_T = 0; \quad -18 + Y_S \cdot 3 = 0; \quad Y_S = 6 \text{ кН}; \quad \Sigma M_S = 0; \quad -18 + Y_T \cdot 3 = 0; \quad Y_T = 6 \text{ кН};$$

$$\text{проверка расчета:} \quad \Sigma Y = 0; \quad +6 - 6 = 0.$$

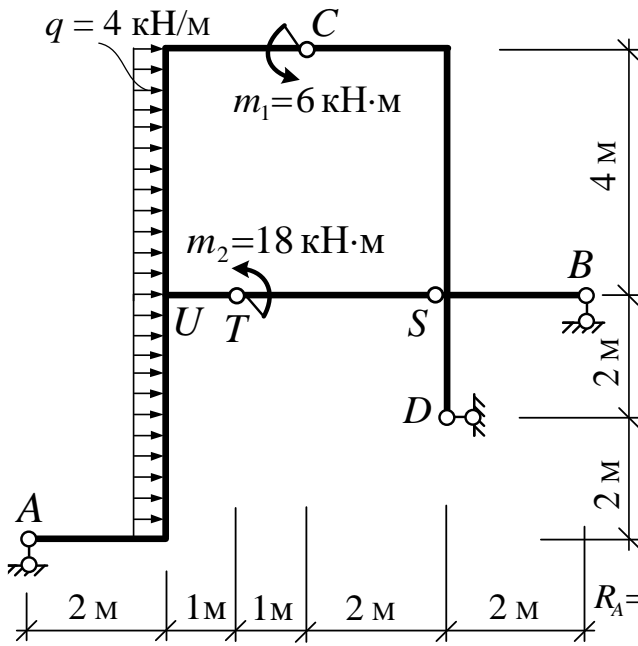


Рис. 3.37

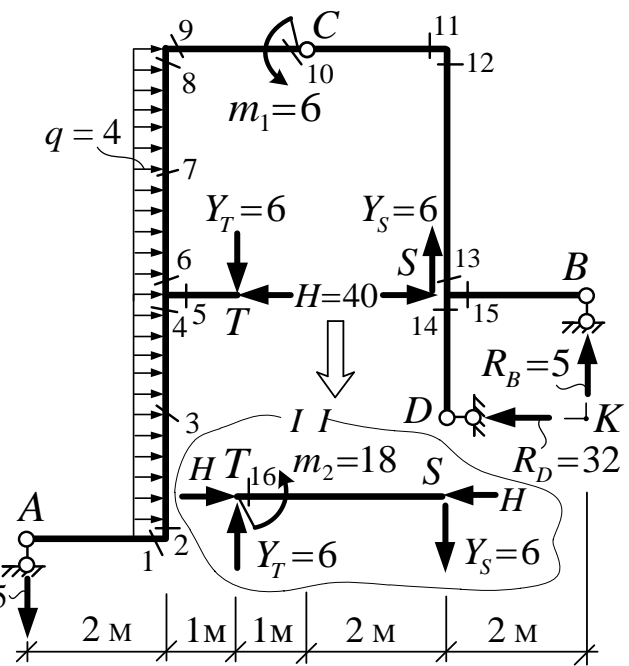


Рис. 3.38

Теперь для определения усилия в затяжке разделим (разрежем) раму по шарниру C и рассмотрим равновесие одной из частей рамы, например, правой, составив сумму моментов сил относительно шарнира C :

$$\sum M_C^{прав} = 0; \quad -6 \cdot 2 + 32 \cdot 6 - 5 \cdot 4 - H \cdot 4 = 0; \quad H = 40 \text{ кН.}$$

Для проверки правильности расчетов рассмотрим равновесие левой части рамы:

$$\sum M_C^{лев} = 0; \quad -5 \cdot 4 - 6 \cdot 1 - (4 \cdot 8) \cdot 4 - 6 + 40 \cdot 4 = 0; \quad -160 + 160 = 0.$$

Для построения эпюр внутренних сил M , Q и N рассматриваемую раму разобьем на десять участков (рис. 3.38), на которых выделим 16 расчетных сечений (опустив сечения, в которых расчет усилий легко выполняется даже устно и в которых изгибающие моменты равны нулю, – например, сечения у шарниров и опор). Учтем, что на двух участках действия равномерно распределенной нагрузки эпюра изгибающих моментов будет изменяться по параболическим зависимостям и для ее построения на этих участках необходимо вычислить изгибающие моменты, по крайней мере, в трех сечениях на каждом их участках, то есть в сечениях 2, 3, 4 и 6, 7, 8. На остальных участках эпюра M будет изменяться по линейным зависимостям и для ее построения достаточно знать значения изгибающих моментов в крайних точках этих участков.

Вычисляем усилия в расчетных сечениях (рис. 3.38), определяя также растянутые волокна стержней:

$$M_1^{лев} = -5 \cdot 2 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2^{нижн} = -5 \cdot 2 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3^{нижн} = -5 \cdot 2 - (4 \cdot 2) \cdot 1 = -18 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_4^{нижн} = -5 \cdot 2 - (4 \cdot 4) \cdot 2 = -42 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5^{прав} = 6 \cdot 1 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_6^{нижн} = -5 \cdot 2 - (4 \cdot 4) \cdot 2 + 6 \cdot 1 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_7^{нижн} = -5 \cdot 2 - (4 \cdot 6) \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = +4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_8^{нижн} = -5 \cdot 2 - (4 \cdot 8) \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 40 \cdot 4 = +28; \quad \overset{8}{\curvearrowright} M_9^{лев} = M_8^{нижн} = +28 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad \overset{9}{\curvearrowright}$$

$$M_{10}^{лев} = -5 \cdot 4 - (4 \cdot 8) \cdot 4 - 6 \cdot 1 + 40 \cdot 4 = +6 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad \overset{10}{\curvearrowright}$$

$$M_{11}^{прав} = -40 \cdot 4 + 32 \cdot 6 - 5 \cdot 2 + 6 \cdot 0 = +22 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad \overset{11}{\curvearrowleft} M_{12}^{нижн} = M_{11}^{прав} = +22 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad \overset{12}{\curvearrowright}$$

$$M_{13}^{прав} = -40 \cdot 0 + 32 \cdot 2 - 5 \cdot 2 + 6 \cdot 0 = +54 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad \overset{13}{\curvearrowright}$$

$$M_{14}^{нижн} = +32 \cdot 2 = +64 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad \overset{14}{\curvearrowright} M_{15}^{прав} = -5 \cdot 2 = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad \overset{14}{\curvearrowleft}$$

В сечении 16 усилия определяем из рассмотрения отдельно затяжки::

$$M_6^{лев} = +6 \cdot 0 - 18 = -18 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad \overset{16}{\curvearrowleft} M_6^{прав} = +6 \cdot 3 = +18 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad \overset{16}{\curvearrowright}$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов в рассматриваемой раме, построенная по результатам выполненных расчетов, представлена на рис. 3.39.

Аналогично подходим и к построению эпюр поперечных и продольных сил.

На участках действия равномерно распределенной нагрузки поперечная сила будет (могут) изменяться линейно и для построения эпюры Q (рис. 3.40) на этих участках необходимо вычислить значения поперечной силы в двух сечениях на каждом из участков, то есть в сечениях 2, 4 и 6, 8 (рис. 3.38):

$$Q_2^{нижн} = 0; \quad Q_4^{нижн} = -4 \cdot 4 = -16 \text{ кН};$$

$$Q_6^{нижн} = -4 \cdot 4 + 40 = +24 \text{ кН}; \quad Q_8^{нижн} = -4 \cdot 8 + 40 = +8 \text{ кН};$$

На остальных участках рамы (рис. 3.38) поперечные силы будут постоянны и для построения эпюры Q (рис. 3.40) на этих участках достаточно вычислить значения поперечные силы в одном из сечений участков:

$$Q_1^{лев} = -5 \text{ кН}; \quad Q_5^{прав} = +6 \text{ кН}; \quad Q_9^{лев} = Q_{10} = Q_{11} = -5 - 6 = -11 \text{ кН};$$

$$Q_6^{лев} = Q_7 = Q_8 = 6 \text{ кН}; \quad Q_{12}^{нижн} = Q_{13} = -40 + 32 = -8 \text{ кН}; \quad Q_{14}^{нижн} = +32 \text{ кН};$$

$$Q_{15}^{нижн} = -5 \text{ кН}; \quad Q_{16}^{прав} = +6 \text{ кН} \text{ (из рассмотрения вырезанной затяжки).}$$

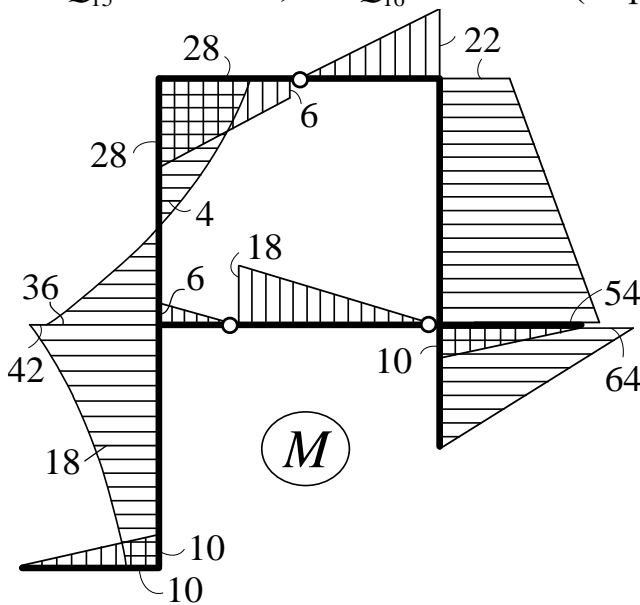


Рис. 3.39

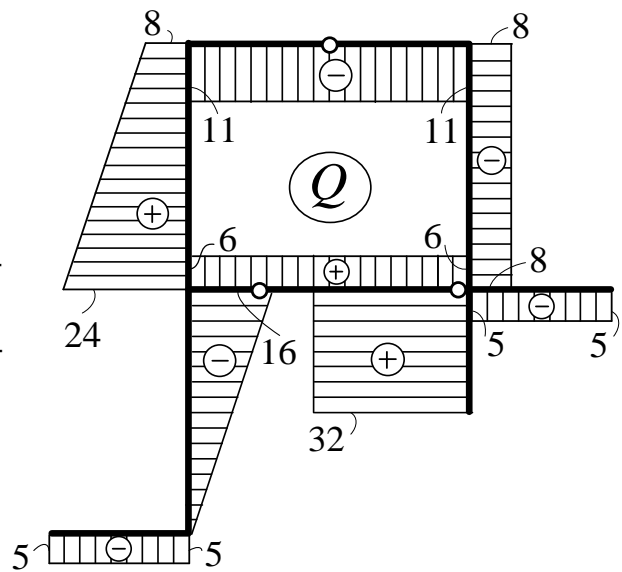


Рис. 3.40

Продольные силы в рассматриваемой раме (рис. 3.38) на всех участках будут постоянны, и для построения эпюры N (рис. 3.41) в раме достаточно вычислить значение N в одном из сечений на каждом из участков:

$$N_1^{лев} = 0; \quad N_2^{нижн} = N_3 = N_4 = +5 \text{ кН};$$

$$N_5^{прав} = -40 \text{ кН};$$

$$N_6^{лев} = N_7 = N_8 = +5 + 6 = +11 \text{ кН};$$

$$N_9^{нижн} = N_{10} = N_{11} = -4 \cdot 8 + 40 = +8;$$

$$N_{12}^{нижн} = N_{13} = -6 - 5 = -11 \text{ кН};$$

$$N_{14}^{нижн} = 0; \quad N_{15}^{прав} = 0; \quad N_{16} = -40 \text{ кН}.$$

Покажем еще проверку равновесия средних узлов по поперечным и продольным силам:

Узел U: $\Sigma X = 0; \quad 24 + 16 - 40 = 0; \quad 40 - 40 = 0;$

$$\Sigma Y = 0; \quad 11 - 5 - 6 = 0; \quad 11 - 11 = 0;$$

Узел S:

$$\Sigma X = 0; \quad 40 - 8 - 32 = 0; \quad 40 - 40 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad 6 + 5 - 11 = 0; \quad 11 - 11 = 0.$$

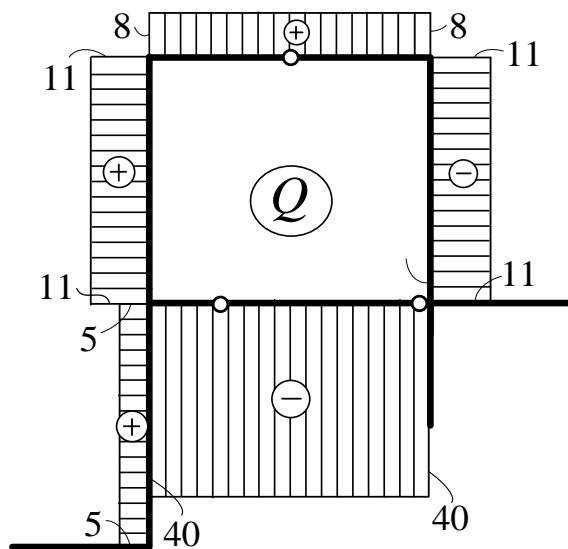
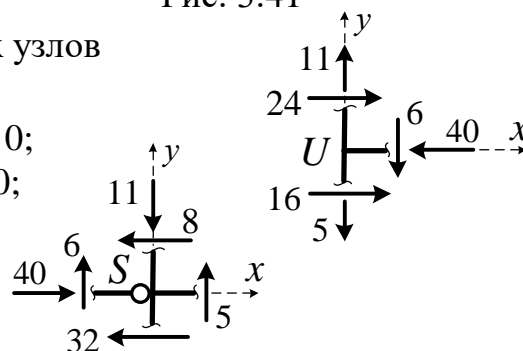


Рис. 3.41



3.5. Расчет составных рам

Составными называют рамы, состоящие из нескольких трехшарнирных и (или) простых рам (см. рис. 2.3 в, 3.42 а).

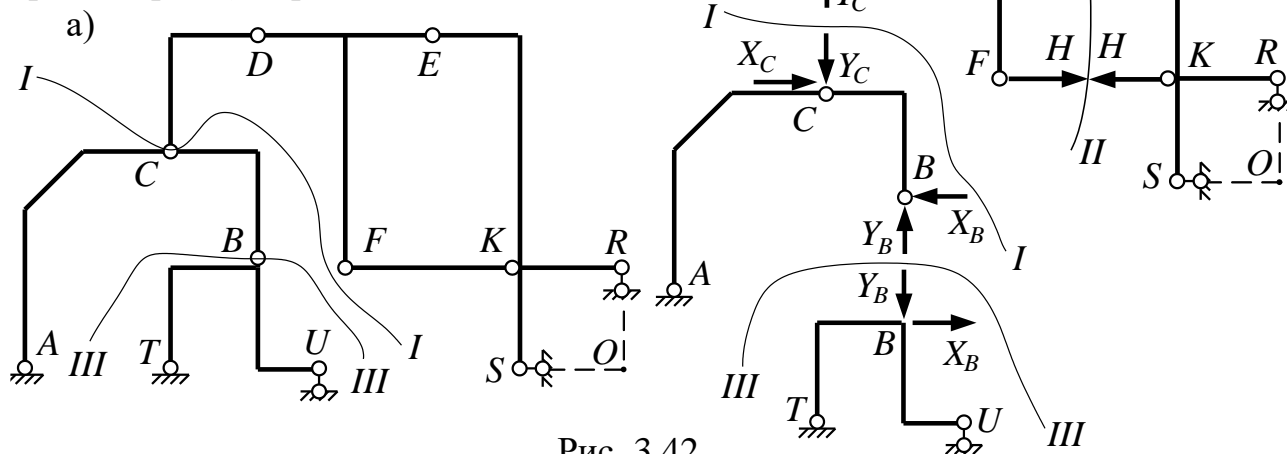


Рис. 3.42

При расчете таких рам, аналогично, как и многопролетные балки, их целесообразно разделять (по шарнирам) на отдельные трехшарнирные и (или) простые рамы, одни из которых будут опираться на другие, и расчет которых мы знаем как выполнять; эти простые и трехшарнирные рамы здесь также можно разделить на главные и второстепенные. Расчет, естественно, надо начинать с самой второстепенной рамы (самой верхней), постепенно переходя к расчету

нижеразположенных рам и передавая на них реакции (в обратных направлениях) от вышерасположенных рам. Полные эпюры усилий для составной рамы получим путем составления соответствующих эпюр для отдельных рам.

Например, расчет составной рамы, представленной на рис. 3.42 а, следует выполнять в следующей последовательности:

1. Сечением *I-I* отрезаем верхнюю часть, которая представляет собой трехшарнирную раму *CDO* с опорами в разных уровнях (в шарнире *C* и в фиктивном шарнире *O*) и определяем реакции в шарнире *C* и в опорах *S* и *R*.

2. Правая полурама *DO* рассмотренной выше рамы *CDO* в свою очередь здесь представляет трехшарнирную раму с затяжкой. Поэтому для размыкания замкнутого контура нужно провести сечение *II-II* (рис. 3.42 б) и найти усилие *H* в затяжке *FK*, рассмотрев равновесие левой либо правой части рамы.

3. Проводим сечение *III-III*, выделяя и рассматривая отдельно раму *ABC*, которая является трехшарнирной рамой с опорами в разных уровнях (*A* и *B*).

4. Последней рассматриваем простую раму *TBU*.

Ниже рассмотрим несколько примеров расчетов составных рам.

Рама, представленная на рис. 3.43, может быть разделена на трехшарнирную раму *DCT* и два простых консольных стержня *AD* и *BT* (рис. 3.44), при этом по структуре трехшарнирная рама *DCT* опирается на стержни *AD* и *BT*.

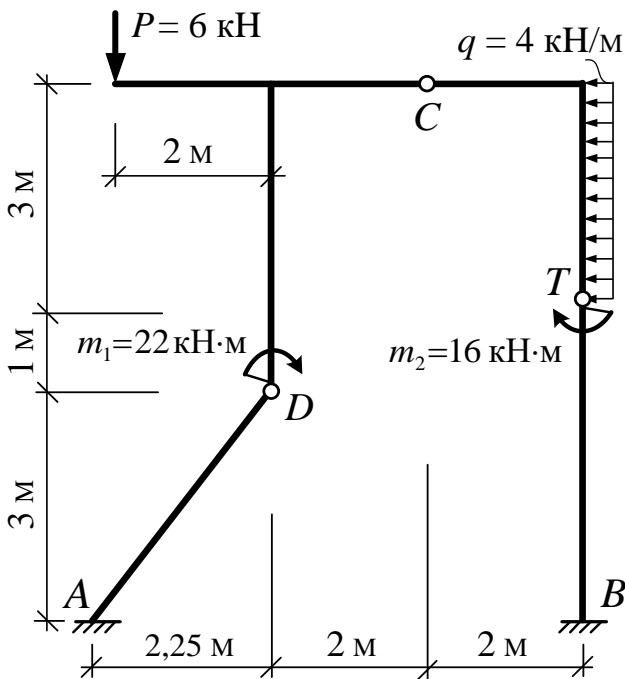


Рис. 3.43

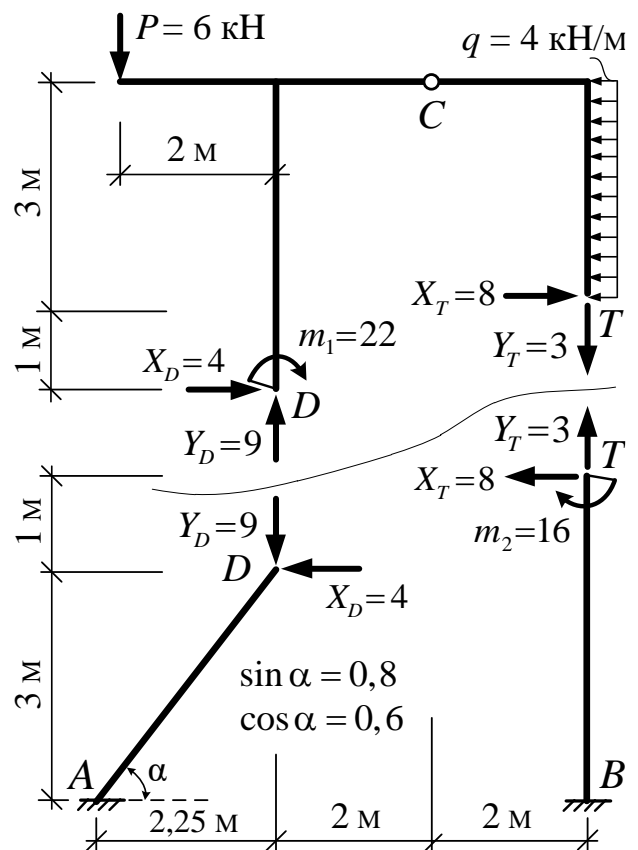


Рис. 3.44

Рассмотрим вначале трехшарнирную раму *DCT*, опорные шарниры которой находятся на разных уровнях. Поэтому при определении реактивных усилий в шарнирах *D* и *T* необходимо решать систему уравнений:

$$1) \left\{ \begin{aligned} \Sigma M_D = 0; & \quad +22 - 6 \cdot 2 - (4 \cdot 3) \cdot 2,5 + X_T + 4 \cdot Y_T = 0; \\ & \quad \implies X_T = 8 \text{ кН}; \end{aligned} \right.$$

$$2) \quad \Sigma M_C^{прав} = 0; \quad + (4 \cdot 3) \cdot 1,5 - 3 \cdot X_T + 2 \cdot Y_T = 0; \quad Y_T = 3 \text{ кН};$$

$$3) \quad \Sigma X = 0; \quad + X_D + 8 - 4 \cdot 3 = 0; \quad X_D = 4 \text{ кН};$$

$$4) \quad \Sigma Y = 0; \quad + Y_D - 6 - 3 = 0; \quad Y_D = 9 \text{ кН}.$$

Проверка: $\Sigma M_C^{лев} = 0;$
 $+ 22 + 9 \cdot 2 - 6 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = 0; \quad 40 - 40 = 0.$

Найденные усилия в шарнирах D и T передаем в обратных направлениях на консольные стержни AD и BT (рис. 3.44). После этого вычисление усилий в сечениях трехшарнирной рамы DCT и консольных стержней AD и BT не представляет никакой сложности.

Окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в рассматриваемой раме представлены на рис. 3.45–3.47.

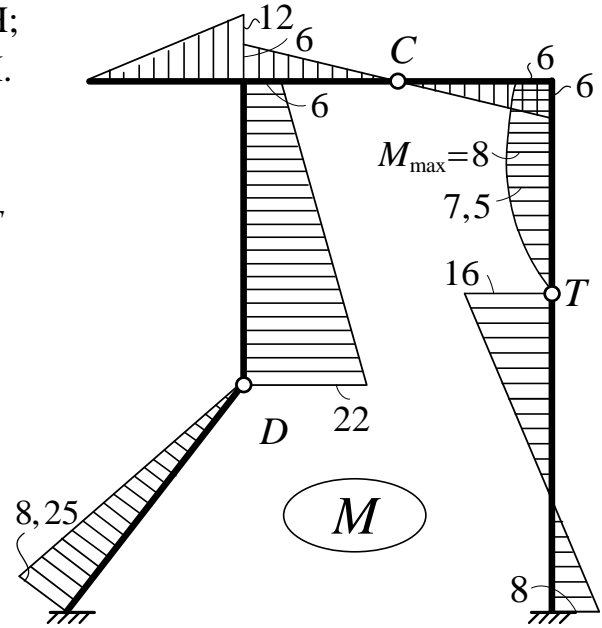


Рис. 3.45

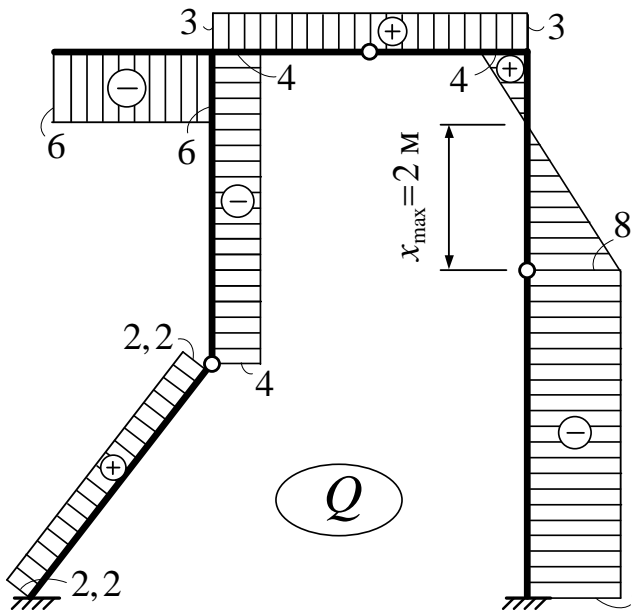


Рис. 3.46

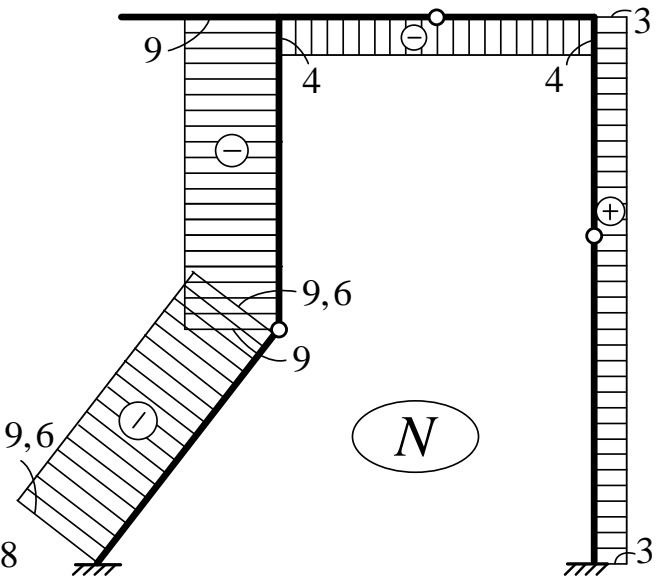


Рис. 3.47

В раме, представленной на рис. 3.48, возникает четыре неизвестные опорные реакции, и найти их из равновесия рамы в целом нельзя. Для их определения необходимо рассматривать равновесие отдельных частей рамы. При этом можно идти разными путями. Здесь, исходя из удобства расчета, вначале разделим составную раму по шарниру C на две части так, как показано на рис. 3.49, и определим в первую очередь опорную реакцию R_E и внутренние реактивные силы между полученными частями рамы в шарнире C , рассмотрев равновесие правой части составной рамы – простой рамы CE (рис. 3.49 а):

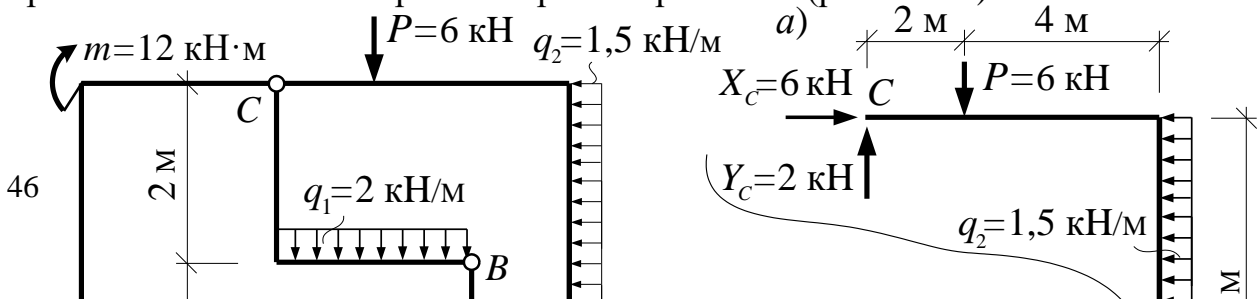


Рис. 3.48

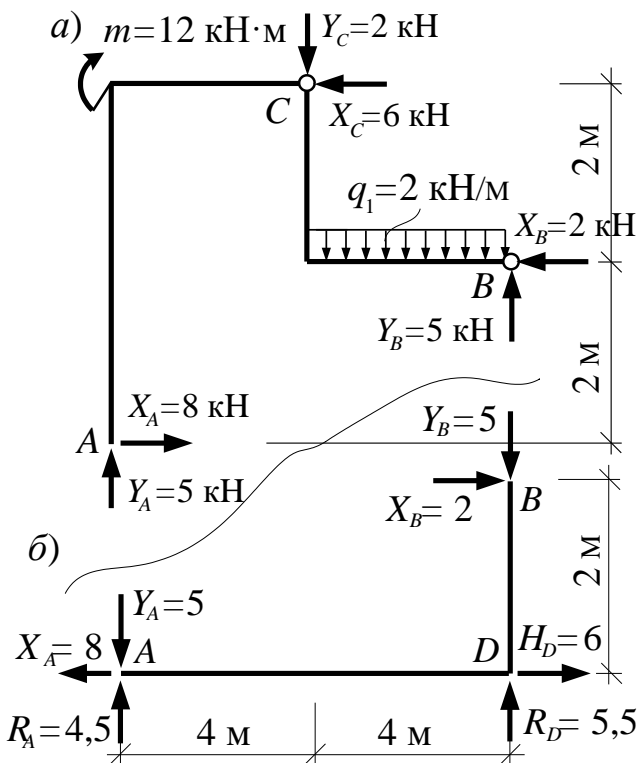


Рис. 3.50

$$\begin{aligned} \sum X_{np} = 0; & \quad X_C - 1,5 \cdot 4 = 0; \\ \sum M_C^{np} = 0; & \quad 1,5 \cdot 4 \cdot 2 + 6 \cdot 2 - R_E \cdot 6 = 0; \\ \sum Y_C^{np} = 0; & \quad -6 + 4 + Y_C = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_C &= 6 \text{ кН}; \\ R_E &= 4 \text{ кН}; \\ Y_C &= 2 \text{ кН}. \end{aligned}$$

После этого рассмотрим равновесие левой части рамы (рис. 3.49б) и определим остальные опорные реакции:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad H_D - 6 = 0; & \quad H_D &= 6 \text{ кН}; \\ \sum M_A = 0; & \quad 12 + 2 \cdot 4 - 6 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 6 - R_D \cdot 8 = 0; & \quad R_D &= 5,5 \text{ кН}; \\ \sum Y = 0; & \quad -2 - 2 \cdot 4 + 5,5 + R_A = 0; & \quad R_A &= 4,5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

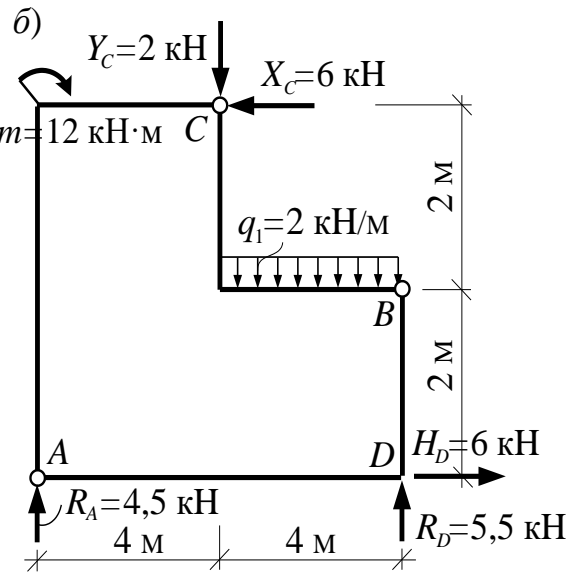
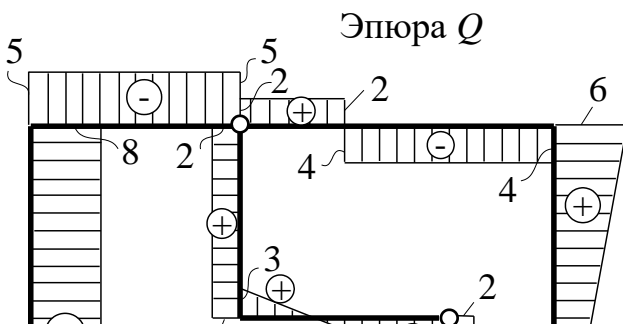


Рис. 3.49

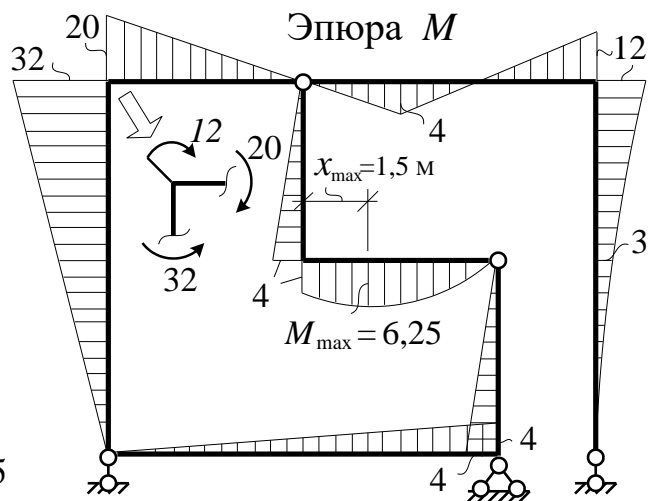


Рис. 3.51

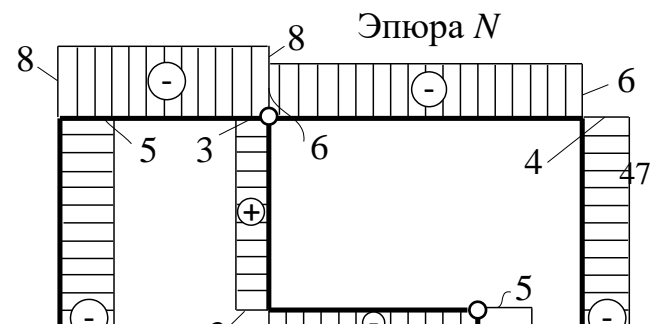


Рис. 3.52

Рис. 3.53

Левая часть рамы $ACBD$ (рис. 3.49 б) представляет собой замкнутый контур и определение внутренних сил в любом ее сечении невозможно без ее разделения на отдельные части. Разделим эту часть рамы на две части по шарнирам A и B так, как показано на рис. 3.50. Внутренние реактивные усилия в шарнирах A и B определим из рассмотрения верхней части ABC , представляющей собой трехшарнирную раму с опорами в разных уровнях, составляя при этом уравнения равновесия как части в целом, так и составляющих ее частей AC и CB . Для рамы ABC (рис. 3.50 а) здесь нельзя составить ни одного уравнения, в которое входила бы только одна неизвестная реакция, поэтому для определения реакций X_A, Y_A, X_B, Y_B здесь необходимо решить систему уравнений, например, вида:

$$\begin{cases} \sum M_C^{np} = 0; & -Y_B \cdot 4 + X_B \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0; \\ \sum M_A^{верхн} = 0; & 12 + 2 \cdot 4 - 6 \cdot 4 - X_B \cdot 2 - Y_B \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 6 = 0, \end{cases}$$

решив которую, найдем: $X_B = 2$ кН; $Y_B = 5$ кН.

Теперь можно определить X_A и Y_A :

$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad X_A - 6 - 2 = 0; & \quad X_A = 8 \text{ кН}; \\ \sum Y = 0; & \quad Y_A + 5 - 2 - 2 \cdot 4 = 0; & \quad Y_A = 5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Таким образом, все необходимые для расчетов усилий в сечениях рамы опорные реакции и внутренние реакции в шарнирах (усилия взаимодействия между отдельными частями рамы) определены. Для проверки правильности их вычисления рассмотрим равновесие нижней части рамы ADB (рис. 3.50 б):

$$\begin{aligned} \sum X^{нижн} = 0; & \quad -8 + 6 + 2 = 0; & \quad +8 - 8 = 0; \\ \sum Y^{нижн} = 0; & \quad 4,5 + 5,5 - 5 - 5 = 0; & \quad 10 - 10 = 0; \\ \sum M_B^{нижн} = 0; & \quad 2 \cdot 2 - 5 \cdot 8 + 4,5 \cdot 8 = 0; & \quad 40 - 40 = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что реакции взаимодействия частей AC и CB в шарнире C в данном расчете не определялись, учитывая, что внутренние силы в любом сечении рамы можно найти и без них, используя найденные реакции в опорах и шарнирах.

Построение эпюр внутренних усилий в заданной раме теперь не представляет большой сложности. Для этого надо построить эти эпюры отдельно в ча-

стях рамы CE (рис. 3.49 *a*), ACB (рис. 3.50 *a*) и ADB (рис. 3.50 *б*), как в простых рамах, и затем эти эпюры объединить на общей схеме рамы.

Окончательные эпюры M , Q и N для рассматриваемой рамы, построенные таким образом, представлены на рис. 3.51–3.53.

Приведем еще один пример. Рассмотрим сложную составную раму, изображенную на рис. 3.54. Рама опирается на основание (землю) с помощью двух шарнирно неподвижных опор (A и B) и одной шарнирно подвижной опоры (D). В опоре D возникает одна опорная реакция (R_D), направленная вдоль опорного стержня (перпендикулярно к опорной поверхности). В шарнирно неподвижных опорах (A , B) в общем-то тоже возникает по одной реакции, но в связи с тем, что чаще всего неизвестно их направление, такие реакции раскладывают обычно на две составляющие, которые при этом часто называют просто реакциями в шарнирно неподвижных опорах (например, по осям X и Y ; хотя можно раскладывать их на две любые другие взаимно перпендикулярные оси, если это удобно). Бывают случаи, когда можно узнать направление полной опорной реакции в шарнирно неподвижной опоре (см. п. VI в разделе 3). Такой случай имеет место и в рассматриваемой раме, для которой легко определяется направление полной реакции в опоре A . Структура рамы (рис. 3.54) такова, что ее диск AF соединяется с остальной частью рамы и основанием с помощью только двух шарниров в точках A и F , и при этом этот диск ненагружен внешними нагрузками. А это значит, что часть рамы (диск) AF будет находиться под действием только двух сил – опорной реакции R_A и реактивного усилия в шарнире F . Но любое плоское тело при действии на него двух сил будет находиться в равновесии только тогда, когда эти силы направлены навстречу друг другу (рис. 4.9). Следовательно полная опорная реакция в опоре A должна быть направлена по прямой, соединяющей точки A и F (рис. 3.55). Направление же полной опорной реакции в опоре B здесь пока неизвестно, поэтому эту реакцию будем искать в виде двух составляющих V_B и H_B (рис. 3.56). Опорную реакцию в опоре A (R_A) тоже можно разложить на две составляющие, однако при этом вследствие известного ее направления (известен угол α) неизвестной будет все равно только одна величина – R_A .

При определении опорных реакций в рассматриваемой раме не удастся составить ни одного уравнения, в которое входило бы только одно неизвестное, поэтому придется решать систему уравнений. Здесь удобно использовать следующую систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \sum M_B = 0; & 0,6 \cdot R_A \cdot 11 + 0,8 \cdot R_A \cdot 3 + 1 \cdot R_D - (4 \cdot 5) \cdot 2,5 - 10 \cdot 1 + 10 = 0; \\ \sum M_C^{лев} = 0; & 0,6 \cdot R_A \cdot 6 - 0,8 \cdot R_A \cdot 2 - 4 \cdot R_D + 10 = 0, \end{cases}$$

решая которую найдем: $R_A = 5$ кН; $R_D = 5$ кН.

Заметим, что момент реакции R_A относительно точек B и C в уравнениях равновесия можно вычислять, если это удобно, и непосредственно в виде произведения этой реакции на ее плечи относительно этих точек (B и C).

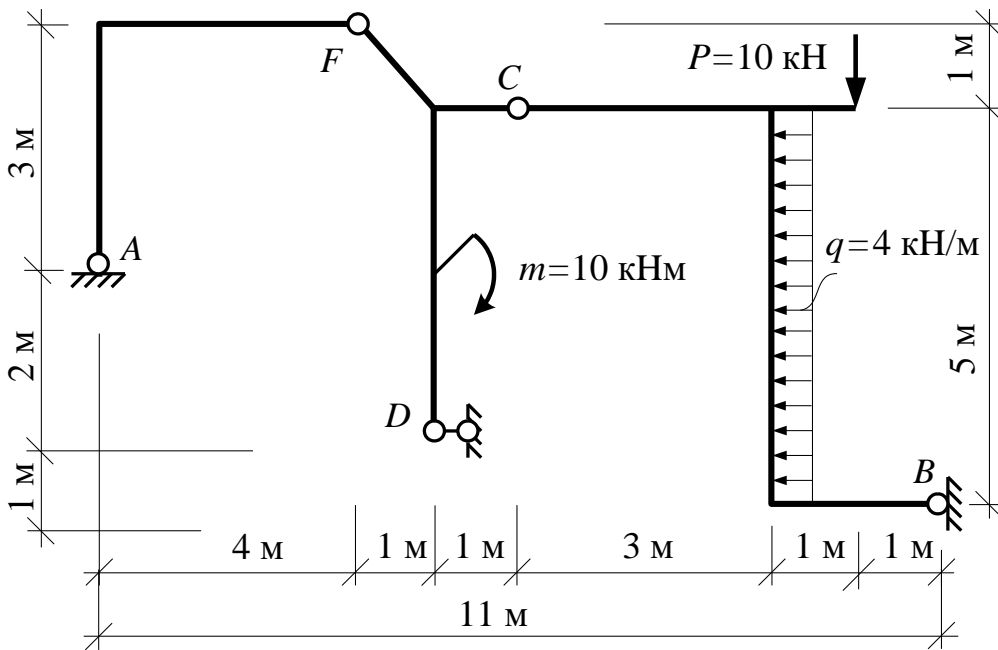


Рис. 3.54

Далее теперь не составляет труда определить все остальные опорные реакции в раме (см. рис. 4.10) и построить в ней эпюры усилий M , Q и N (см. рис. 3.56–3.58).

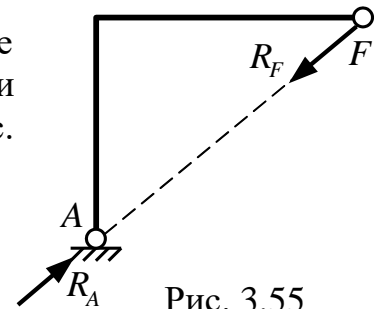


Рис. 3.55

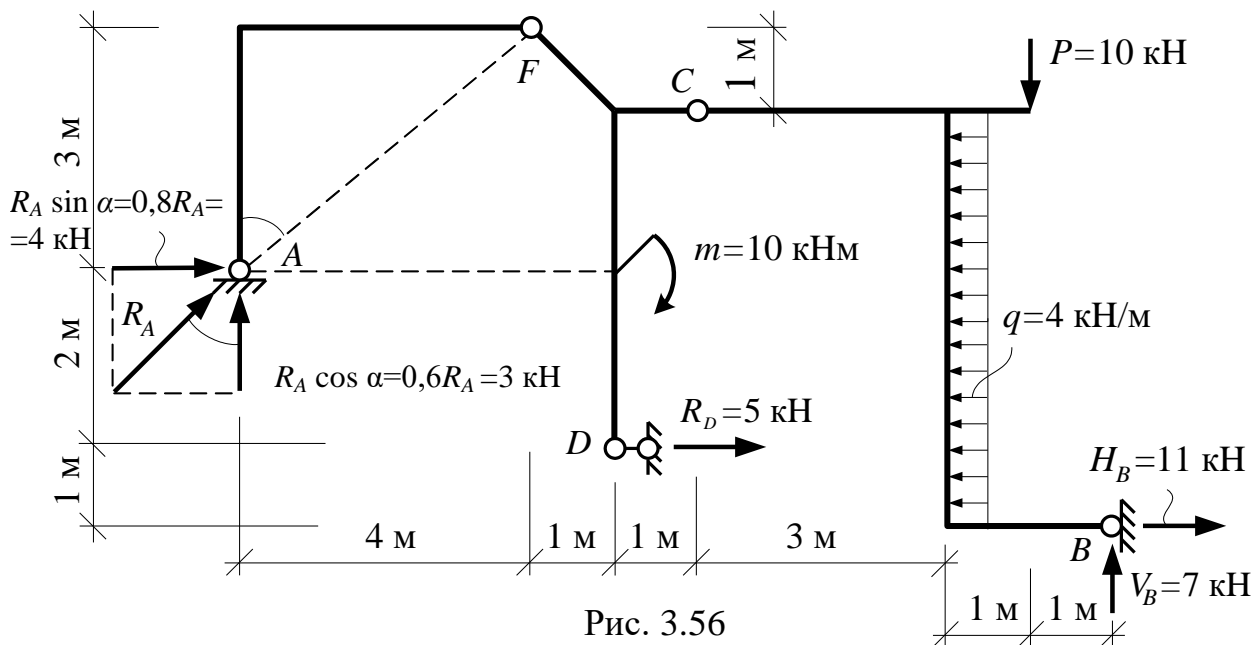


Рис. 3.56

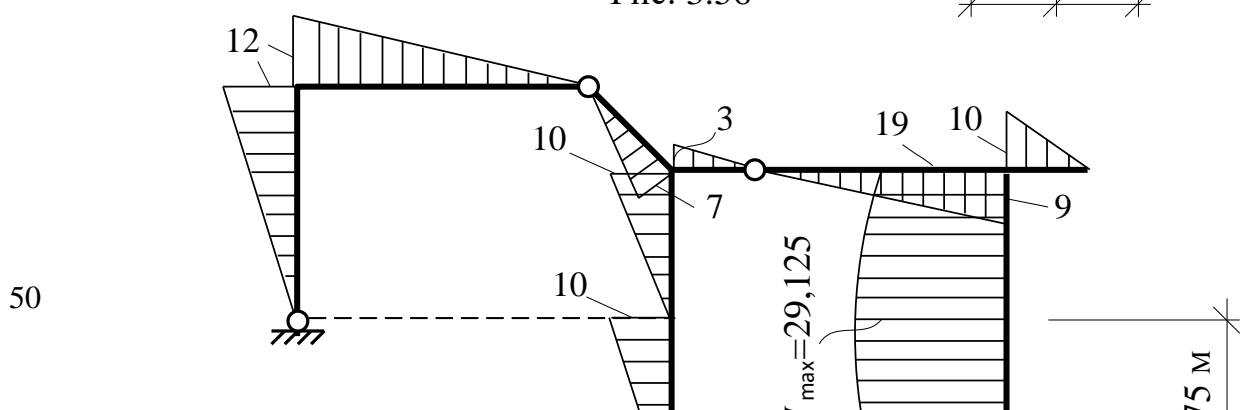


Рис. 3.57

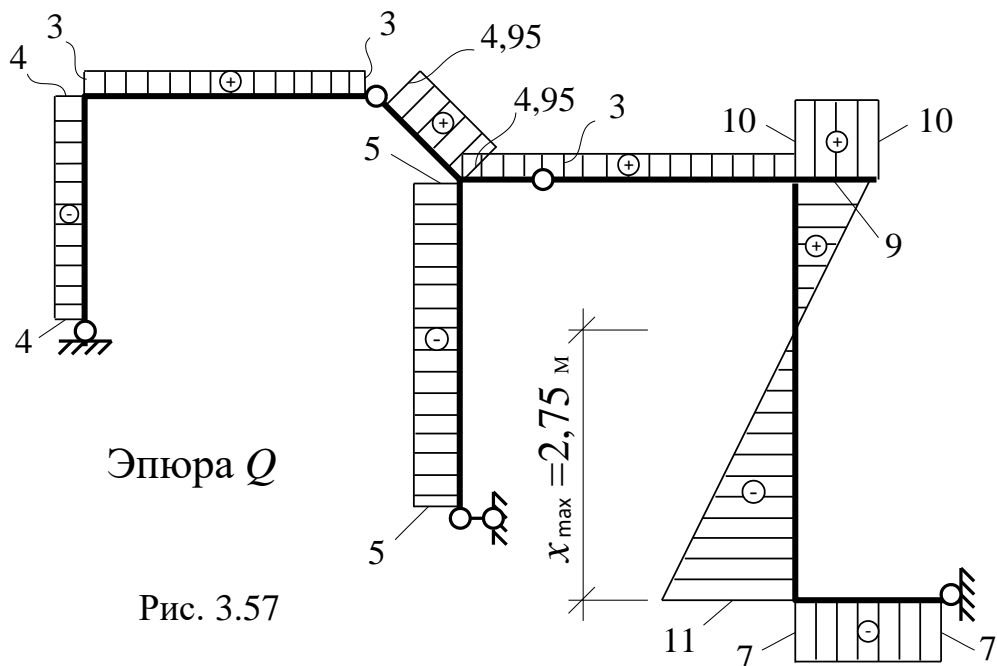


Рис. 3.57

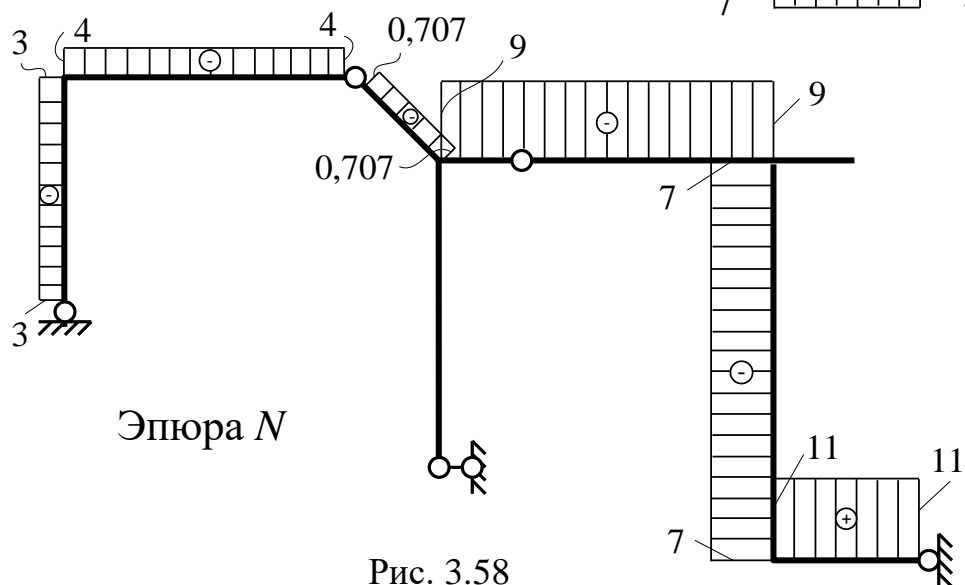


Рис. 3.58

3.6. Расчет статически определимых составных балок

Составными статически определимыми называют балки, состоящие из нескольких простых балок, соединенных между собой по концам шарнирами, как правило, не совпадающими с опорами.

Кинематический анализ таких систем удобно выполнять с использованием формулы $W = (3D - 2Ш - C_0)$, где D – число дисков в системе, в качестве которых здесь выступают простые балки; $Ш$ – число одиночных (простых) шарниров, соединяющих эти балки; C_0 – число опорных связей в системе.

Геометрический анализ структуры составных балок позволяет ввести для них понятие **поэтажной схемы балки**. Поэтажная схема составной статически определимой балки представляет собой схему взаимодействия отдельных простых балок, образующих составную, между собой (см. рис. 3.59). При этом среди указанных простых балок можно выделить главные и второстепенные балки.

Главными называют простые балки, которые после разрезания составной балки по шарнирам, соединяющим простые балки, могут самостоятельно нести нагрузку (неизменяемы). Учитывая, что балка – это диск, имеющий три степени свободы, главные балки должны иметь три опорные связи, то есть главными будут двухопорные балки и балки с защемлением. Главными в системе составных будут и простые балки, имеющие две вертикальные опорные связи, учитывая, что третьей связью для них – горизонтальной – являются соседние балки (что подтверждает геометрический анализ соответствующей системы).

Второстепенными называют балки, которые после указанного разрезания по шарнирам самостоятельно нести нагрузку не могут, так как будут изменяемы. Эти балки опираются на рядом расположенные с помощью связей в шарнирах. При этом одни второстепенные балки могут опираться на другие, то есть и среди второстепенных балок имеется определенная иерархия и соответственно уровень их второстепенности может быть разным. Самыми второстепенными будут балки, расположенные выше всего на поэтажной схеме.

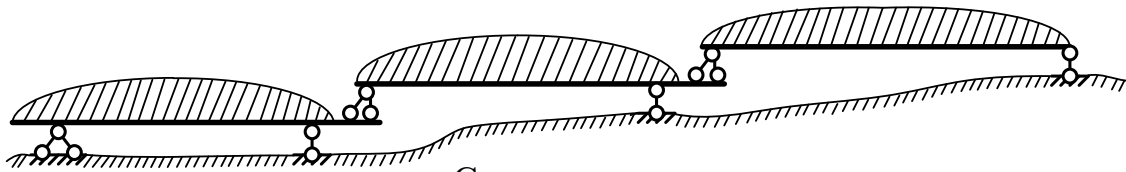
Анализ работы составных статически определимых балок позволяет выявить **закономерности** в их работе и сформулировать их возможный **порядок расчета**:

- расчет составных статически определимых балок удобно выполнять посредством расчета отдельно простых балок, образующих составные;
- при этом расчет необходимо начинать с самых верхних на поэтажных схемах балок, постепенно переходя к расчету нижерасположенных балок и передавая на них опорные реакции от вышерасположенных балок в обратных направлениях (считая их для нижерасположенных балок нагрузками); последними рассчитываются главные балки;
- усилия от нагрузки по поэтажной схеме передаются только на нижележащие балки и не передаются на вышележащие;
- расчет простых балок выполняется аналогично расчету простых рам;
- при действии на составную статически определимую балку только вертикальных нагрузок продольные силы в ней будут отсутствовать;
- окончательные эпюры усилий в составной балке строятся путем объеди-

нения эпюр этих усилий, полученных при расчетах простых балок.

Выполним расчет статически определимой многопролетной балки, представленной на рис. 3.59 (с. 36).

Кинематический анализ системы: $W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$.



Система статически определима и неизменяема.

Определение опорных реакций и построение эпюр внутренних сил:

1) Расчет начинаем с балки EF , самой верхней на поэтажной схеме:

$$\Sigma M_E = 0; \quad -R_F \cdot 6,6 + 2 \cdot 4,4 \cdot 2,2 + 5 \cdot 8,8 = 0; \quad R_F = 9,6 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_F = 0; \quad R_E \cdot 6,6 - 2 \cdot 4,4 \cdot 4,4 + 5 \cdot 2,2 = 0; \quad R_E = 4,2 \text{ кН};$$

$$\text{Проверка:} \quad \Sigma Y = 0; \quad 4,2 - 2 \cdot 4,4 + 9,6 - 5 = 0; \quad 0 = 0.$$

Расчет ординат эпюры M : $M_1^{лев} = 0$; $M_2^{лев} = 4,2 \cdot 2,2 - 2 \cdot 2,2 \cdot 1,1 = 4,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

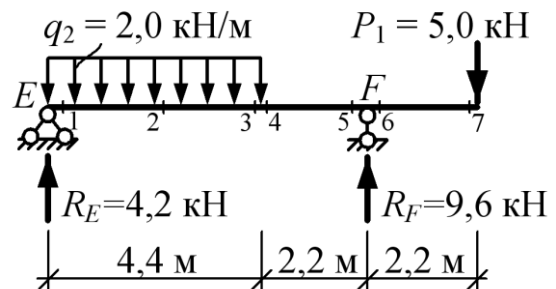
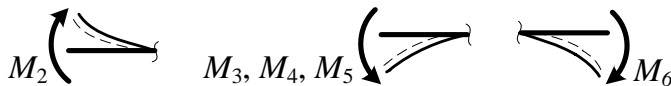
$$M_3^{лев} = 4,2 \cdot 4,4 - 2 \cdot 4,4 \cdot 2,2 = -0,88 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4^{лев} = -0,88 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_5^{лев} = 4,2 \cdot 6,6 - 2 \cdot 4,4 \cdot 4,4 = -11 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_6^{лев} = 5 \cdot 2,2 = 11 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_7^{лев} = 5 \cdot 0 = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Определение растянутых волокон:



Расчет ординат эпюры Q : $Q_1^{лев} = 4,2 \text{ кН}$; $Q_2^{лев} = Q_4^{лев} = 4,2 - 2 \cdot 4,4 = -4,6 \text{ кН}$;

$$Q_5^{прав} = -9,6 + 5 = -4,6 \text{ кН}; \quad Q_6^{прав} = Q_7^{прав} = 5 \text{ кН}.$$

Расчет экстремального значения изгибающего момента на участке 1–2:

$$\frac{x_1}{4,2} = \frac{4,4 - x_1}{4,6} \Rightarrow x_1 = 2,1 \text{ м}; \quad M_{\max} = 4,2 \cdot 2,1 - 2 \cdot 2,1 \cdot 1,05 = 4,41 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры M и Q в балке изображаем на общей схеме составной балки (рис. 3.59).

2) Второй рассчитываем балку CDE :

$$\Sigma M_C = 0; \quad 9,4 \cdot 1,55 + 9,4 \cdot 3,1 - R_D \cdot 4,65 + 4,2 \cdot 6,85 = 0; \quad R_D = 15,587 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_D = 0; \quad 4,65 R_C - 9,4 \cdot 3,1 - 9,4 \cdot 1,55 + 4,2 \cdot 2,2 = 0; \quad R_C = 7,413 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_D = 0; \quad 4,65 R_C - 9,4 \cdot 3,1 - 9,4 \cdot 1,55 + 4,2 \cdot 2,2 = 0; \quad R_C = 7,413 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка:} \quad \Sigma Y = 0; \quad 7,413 - 9,4 - 9,4 + 15,587 - 4,2 = 0; \quad 0 = 0.$$

Расчет ординат эпюры изгибающих моментов:

$$M_1^{лев} = 0; \quad M_2^{лев} = 7,413 \cdot 1,55 = 11,49 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_3^{лев} = 11,49 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4^{лев} = 7,413 \cdot 3,1 - 9,4 \cdot 1,55 = 8,41 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_5^{лев} = 8,41; \quad M_6^{лев} = -4,2 \cdot 2,2 = -9,24 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_7^{лев} = 9,42 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_8^{лев} = 0.$$

Определение растянутых волокон:

$$M_2, M_3, M_4, M_5 \quad \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right) \quad M_6, M_7$$

Расчет ординат эпюры Q :

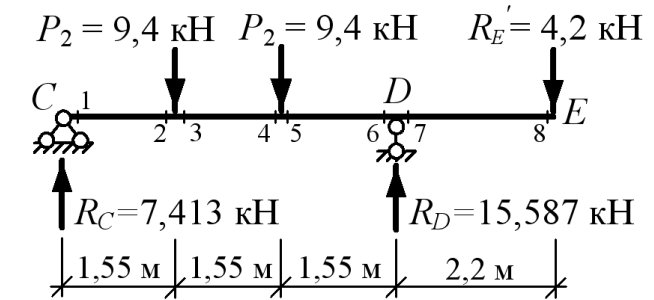
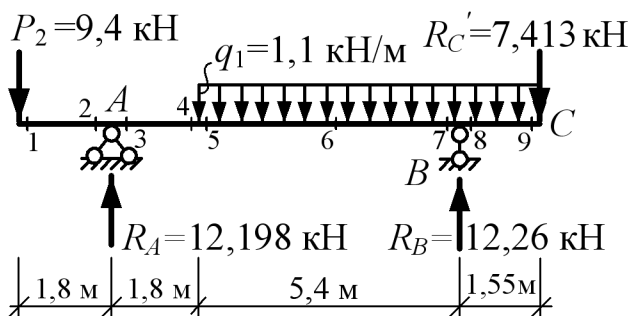
$$Q_1^{лев} = 7,413 \text{ кН}; \quad Q_2^{лев} = 7,413 \text{ кН};$$

$$Q_3^{лев} = Q_4^{лев} = 7,413 - 9,4 = -1,987 \text{ кН};$$

$$Q_5^{прав} = Q_6^{прав} = -15,587 + 4,2 = -11,387 \text{ кН}; \quad Q_7^{прав} = Q_8^{прав} = 4,2 \text{ кН}.$$

Эпюры M и Q в балке изображаем на общей схеме составной балки (рис. 3. 59).

3) Последней рассчитываем главную балку ABC : $\Sigma M_A = 0$;



$$-9,4 \cdot 1,8 + 1,1 \cdot 6,95 \cdot 5,275 - R_B \cdot 7,2 + 7,413 \cdot 8,75 = 0; \quad R_B = 12,26 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$-9,4 \cdot 9 + R_A \cdot 7,2 - 1,1 \cdot 6,95 \cdot 1,925 + 7,413 \cdot 1,55 = 0; \quad R_A = 12,198 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \Sigma Y = 0; \quad -9,4 + 12,198 - 1,1 \cdot 6,95 + 12,26 - 7,413 = 0; \quad 0 = 0.$$

Расчет ординат эпюры изгибающих

моментов M :

$$M_1^{лев} = 0; \quad M_2^{лев} = -9,4 \cdot 1,8 = -16,92 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_3^{лев} = M_2^{лев} = -16,92 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4^{лев} = M_5^{лев} = -9,4 \cdot 3,6 + 12,198 \cdot 1,8 = -11,884 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_6^{лев} = -9,4 \cdot (3,6 + 2,7) + 12,198 \cdot (1,8 + 2,7) - 1,1 \cdot 2,7 \cdot 1,35 = -8,325 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_7^{прав} = M_8^{прав} = 7,413 \cdot 1,55 - 1,1 \cdot 1,55 \cdot 0,775 = 12,812 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_9^{прав} = 0.$$

Определение растянутых волокон:

$$M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 \quad \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right) \quad M_7, M_8$$

Расчет ординат эпюры поперечных сил Q :

$$Q_1^{лев} = Q_2^{лев} = -9,4 \text{ кН}; \quad Q_3^{лев} = -9,4 + 12,198 = 2,798 \text{ кН};$$

$$Q_4^{лев} = Q_5^{лев} = Q_3^{лев} = 2,798 \text{ кН}; \quad Q_7^{прав} = 7,413 + 1,1 \cdot 1,55 - 12,26 = -3,142 \text{ кН};$$

$$Q_8^{прав} = 7,413 + 1,1 \cdot 1,55 = 9,118 \text{ кН}; \quad Q_9^{прав} = 7,413 \text{ кН}.$$

Расчет экстремального значения изгибающих моментов на участке 5–7:

$$\frac{x_2}{2,798} = \frac{5,4 - x_2}{3,142} \Rightarrow x_2 = 2,544 \text{ м};$$

$$M_{\max} = -9,4 \cdot 6,144 + 12,198 \cdot 4,344 - 2,544 \cdot 1,1 \cdot 2,544 / 2 = -8,325 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры M и Q в балке ABC и объединенные эпюры изгибающих моментов и поперечных сил представлены на рис. 3. 59.

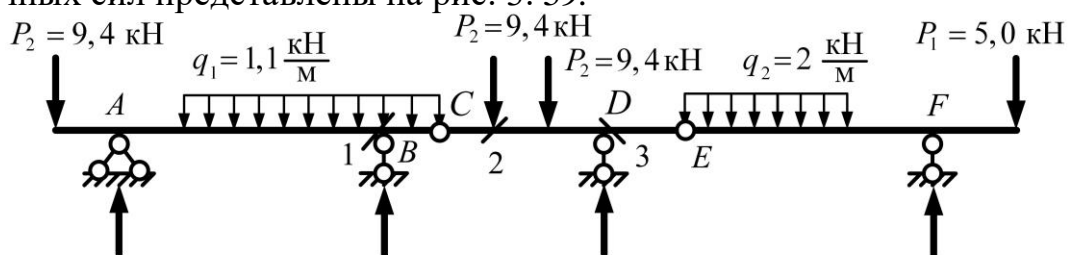


Рис. 3.59

3.7. Линии влияния усилий в балочных системах

Понятие о линиях влияния усилий

Линия влияния усилия (реакции) – это графическое изображение (график) изменения усилия (реакции) в определенном элементе (сечении) сооружения при перемещении по сооружению единичного безразмерного груза (силы) постоянного направления.

При построении линии влияния некоторого усилия (реакции) рассматривается произвольное положение единичного груза на сооружении. Для этого состояния составляются уравнения равновесия, из которых выводится функциональная зависимость рассматриваемого усилия (реакции) от абсциссы положения груза. График этой зависимости и представляет искомую линию влияния.

Единичный груз при построении линий влияния принимается безразмерным. Поэтому размерности линий влияния усилий определяются выражением:

$$[\text{размерность линий влияния усилия}] = \frac{[\text{размерность усилия}]}{[\text{размерность силы}]}$$

Соответственно ординаты линий влияния опорных реакций, поперечных и продольных сил будут безразмерными (Н/Н), а размерность ординат линий влияния изгибающих моментов будет равна размерности длины (Н · м / Н = м).

Отметим отличия линий влияния усилий от эпюр усилий.

Эпюра усилия представляет собой график, показывающий значения усилия (изгибающего момента, поперечной силы, продольной силы и др.) во всех сечениях рассматриваемого сооружения от действия определенной совокупности заданных неподвижных нагрузок (сосредоточенных сил, моментов, распределенных нагрузок). Ординаты эпюры усилия показывают значение усилия в том месте сооружения, где они отложены. При любом изменении положения и значений нагрузок, появлении (снятии) нагрузок, усилия изменяются, и эпюры усилий необходимо строить (рассчитывать) заново.

Линия влияния усилия представляет собой график, характеризующий изменение указанного конкретного усилия в одном строго определенном сечении сооружения в зависимости от положения единичной сосредоточенной безразмерной силы, перемещающейся по сооружению. Ордината линии влияния показывает значение усилия в одном определенном сечении сооружения при положении единичной силы в том месте, где рассматриваемая ордината отложена. При построении линии влияния ордината откладывается под точкой приложения единичной силы. По данной линии влияния нельзя ничего сказать об изменении усилия в других сечениях сооружения.

Для линии влияния M и Q в балках используются следующие правила знаков: ординаты линий влияния M считают положительными, если растягиваются нижние волокна балок, а для ординат линий влияния Q применяется тоже правило знаков, что и для эпюр Q (см. с. 21, рис. 3.3).

Линии влияния усилий позволяют:

- определять значения усилий от систем подвижных грузов;
- находить наиболее невыгодные положения систем подвижных грузов и

временных нагрузок с целью определения в том или ином элементе сооружения экстремальных (максимальных и минимальных) усилий;

– определять усилия от неподвижных нагрузок, что особенно важно при многовариантном нагружении сооружения.

Построение линий влияния усилий в простых балках

Рассмотрим статический способ построения линий влияния опорных реакций и усилий в одном из сечений вначале для наиболее простой из балок – для консольной балки (рис. 3.60).

Зависимости для определения опорных реакций при перемещении единичной силы по балке получим из уравнений равновесия балки.

Горизонтальную реакцию можно найти из условия равенства проекций сил, действующих на балку, на горизонтальную ось ($\sum X=0$). Учитывая, что вертикальная единичная подвижная сила при перемещении по балке не меняет своего направления, получим, что $H_A = 0$. Линия влияния горизонтальной реакции в консольной балке, таким образом, будет иметь нулевые ординаты.

Вертикальную реакцию определим из уравнения $\sum Y=0$. Откуда следует, что независимо от положения груза $R_A=1$, то есть вертикальная реакция в консольной балке будет величиной постоянной, равной единице на всем участке движения груза. График линии влияния R_A представлен на рис. 3.60,б.

Реактивный момент в заделке определим из условия равенства нулю суммы моментов относительно точки A :

$$\sum M_A = 0; \quad -M_{RA} + 1x_{FK} = 0; \quad M_{RA} = x_{FK}.$$

Опорный момент изменяется по линейному закону. Для построения графика прямой линии достаточно вычислить ее ординаты в двух точках: в начале и в конце балки: при $x_{FK} = 0$ $M_{RA} = 0$; при $x_{FK} = l$ $M_{RA} = l$.

Соединив эти точки прямой, получим линию влияния опорного момента в виде, представленном на рис. 3.60,в.

Изгибающий момент и поперечную силу в сечении K определим из уравнений равновесия правой части балки.

Если груз $F = 1$ расположен справа от сечения K :

$$M_K^{np} = -1 \cdot x_{FK}$$

(при $x_{FK} = 0$ $M_K = 0$;
при $x_{FK} = c$ $M_K = -c$);

$$Q_K^{np} = +1.$$

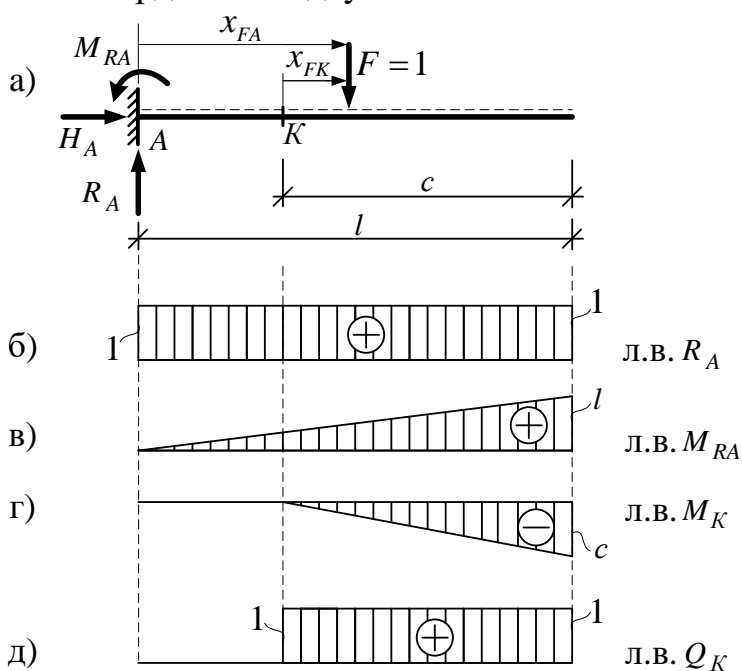


Рис. 3.60

При движении груза слева от сечения K из уравнений $\sum M_K^{np} = 0$ и $\sum Q_K^{np} = 0$

следует, что $M_K = 0$, $Q_K = 0$. Линии влияния M_K и Q_K показаны на рис. 3.60, г, д.

Наибольшее по модулю значение изгибающего момента в сечении K возникает при положении груза на конце консоли. При положениях груза правее сечения K растянутыми в этом сечении будут верхние волокна балки, поэтому ординаты изгибающего момента отрицательны. Поперечная сила в сечении K при том же положении груза положительна (вращает элемент балки по часовой стрелке) и равна единице. В сечении K линия влияния изгибающего момента имеет излом, а линия влияния поперечной силы – разрыв (скачок) на единицу.

Построим линии влияния опорных реакций R_A и R_B для двухопорной балки с консолями (рис. 3.60, а). Из уравнений равновесия балки следует:

$$\sum M_B = 0; \quad 1 \cdot x - R_B l = 0; \quad R_B = x/l; \quad (3.1)$$

$$\sum M_A = 0; \quad -1(l-x) + R_A l = 0; \quad R_A = (l-x)/l. \quad (3.2)$$

Эти зависимости представляют собой уравнения прямых, которые построим по двум ординатам: при $x = 0$ $R_A = 1$, а $R_B = 0$; при $x = l$ $R_A = 0$, а $R_B = 1$.

Дополнительно вычислим значения реакций при положении груза в характерных точках:

а) на конце левой консоли – при $x = -l_{k1}$ $R_A = (l - l_{k1})/l$; $R_B = l_{k1}/l$;

б) в сечении K между опорами – при $x = a$ $R_A = (l - a)/l$; $R_B = a/l$;

в) на конце правой консоли – при $x = l + l_{k2}$ $R_A = -l_{k2}/l$; $R_B = (l + l_{k2})/l$.

Линии влияния опорных реакций, построенные согласно полученным зависимостям и ординатам, представлены на рис. 3.60, б, в.

Усилия в сечении K , расположенном в пролете балки (между опорами), можно определить из рассмотрения равновесия как левой, так и правой частей балки относительно сечения K . При этом целесообразно рассматривать ту часть, на которой нет груза. В этом случае для определения усилий получим более простые уравнения.

При движении груза слева от сечения K изгибающий момент M_K получим из уравнения равновесия правой части балки

$$M_K^{np} = R_B b. \quad (3.3)$$

С учетом (7.1) это выражение приводит к линейной зависимости

$$M_K = \frac{xb}{l}, \quad (3.4)$$

справедливой для левой части балки, на которой находится единичный груз.

Из (7.3) следует, что левая прямая линии влияния M_K может быть построена умножением всех ординат линии влияния R_B на величину b

$$\text{л.в. } M_K = (\text{л.в. } R_B) b.$$

Аналогично, при движении груза справа от сечения K , рассмотрев левую часть балки, будем иметь $M_K = R_A a$ или л.в. $M_K = (\text{л.в. } R_A) a$.

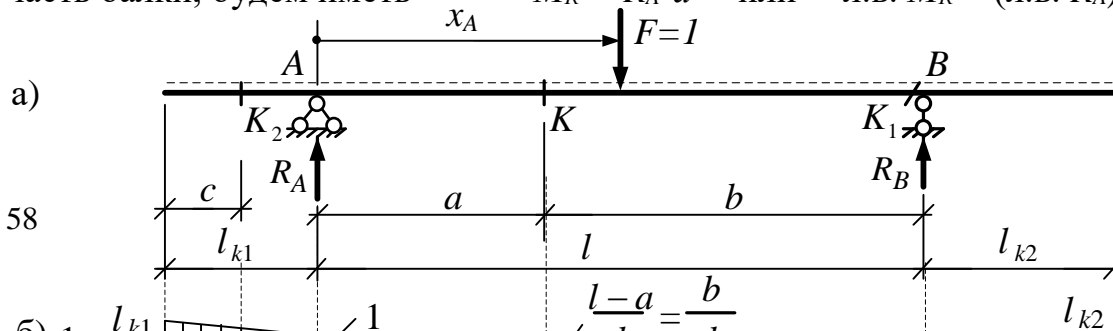


Рис. 3.61

То есть правую прямую линии влияния M_K можно построить, увеличив ординаты л.в. R_A в a раз (рис. 3.61,г). Отметим, что полученные прямые (левая и правая ветви линии влияния M_K) пересекаются под сечением K .

Линия влияния поперечной силы в сечении K строится аналогично. При движении груза слева от сечения рассмотрим правую часть балки. Из уравнения $\sum Y^{np} = 0$ получим (левая прямая):

$$Q_K = -R_B \quad \text{или} \quad \text{л.в. } Q_K = - (\text{л.в. } R_B).$$

При движении груза справа от сечения, рассматривая левую часть балки, будем иметь (правая прямая): $Q_K = R_A$ или л.в. $Q_K = \text{л.в. } R_A$.

Линия влияния Q_K , построенная согласно этим зависимостям, показана на

рис. 3.61, д. Под сечением K она имеет разрыв на величину, равную единице ($a/l + b/l = 1$). На рис. 3.61, е, ж показаны построенные по тем же принципам линии влияния изгибающего момента и поперечной силы в сечении K_1 , бесконечно близком к опоре B .

Линии влияния усилий в сечениях на консолях двухопорной балки строятся также (рис. 3.61, з, и), как и в сечениях консольной балки (рис. 3.61, г, д).

Заметим, что линии влияния усилий в балках, как и в других статически определимых системах, имеют линейное или кусочно-линейное очертание.

Построение линий влияния усилий в многопролетных балках

Построение линий влияния усилий в многопролетных балках, учитывая, что в этом случае на них действует только одна перемещающаяся по системе сила (груз), начинается с движения груза по той простой балке, к которой относится искомое усилие. Построение линий влияния усилий в простых балках рассмотрено выше. Для движения груза по остальным балкам можно использовать условия взаимодействия работы простых балок в системе многопролетных балок, которые несложно выявить из анализа работы таких систем:

- при переходе груза через шарнир, соединяющий простые балки, все усилия в многопролетной балке остаются неизменными (одинаковыми), так как действие груза не изменяется;

- при положении груза над опорой груз полностью воспринимается этой опорой (реакция ее будет равна величине груза), и все остальные усилия во всей многопролетной балке будут отсутствовать (равны нулю);

- при движении груза по балкам, которые передают действие этого груза на нижерасположенные по поэтажной схеме балки, линии влияния усилий в этих (нижерасположенных) балках будут изменяться линейно (связано это с тем, что передача действия груза осуществляется через реакции в шарнирах, которые являются опорными реакциями для вышележащих балок и которые при движении по ним груза изменяются линейно (7.1, б, в), (7.2, б, в);

- при движении груза по простым балкам, расположенным на поэтажной схеме ниже балки, к которой относится рассматриваемое усилие, груз не передается на эту балку (груз по поэтажной схеме не передается вверх) и рассматриваемое усилие будет нулевым.

Таким образом для построения линии влияния усилия в многопролетной балке необходимо сначала построить линию влияния усилия в простой балке, к которой относится рассматриваемое усилие, а затем, в соответствии с указанными условиями взаимодействия и работы простых балок в системе многопролетной, построить линии влияния усилия при движении груза по остальным простым балкам многопролетной балки.

Рассмотрим статически определимую многопролетную балку, представленную на рис. 7.3, а. Поэтажная схема этой балки показана на рис. 7.3, б.

Опорная реакция R_C относится к балке BCD , поэтому построение линий влияния реакции начинаем с движения груза по этой балке. И строится линия влияния R_C также, как в простой двухопорной балке по зависимостям (7.1),

(7.2) (см. л. в. R_B на рис. 7.2). После этого рассматриваем движение единичного

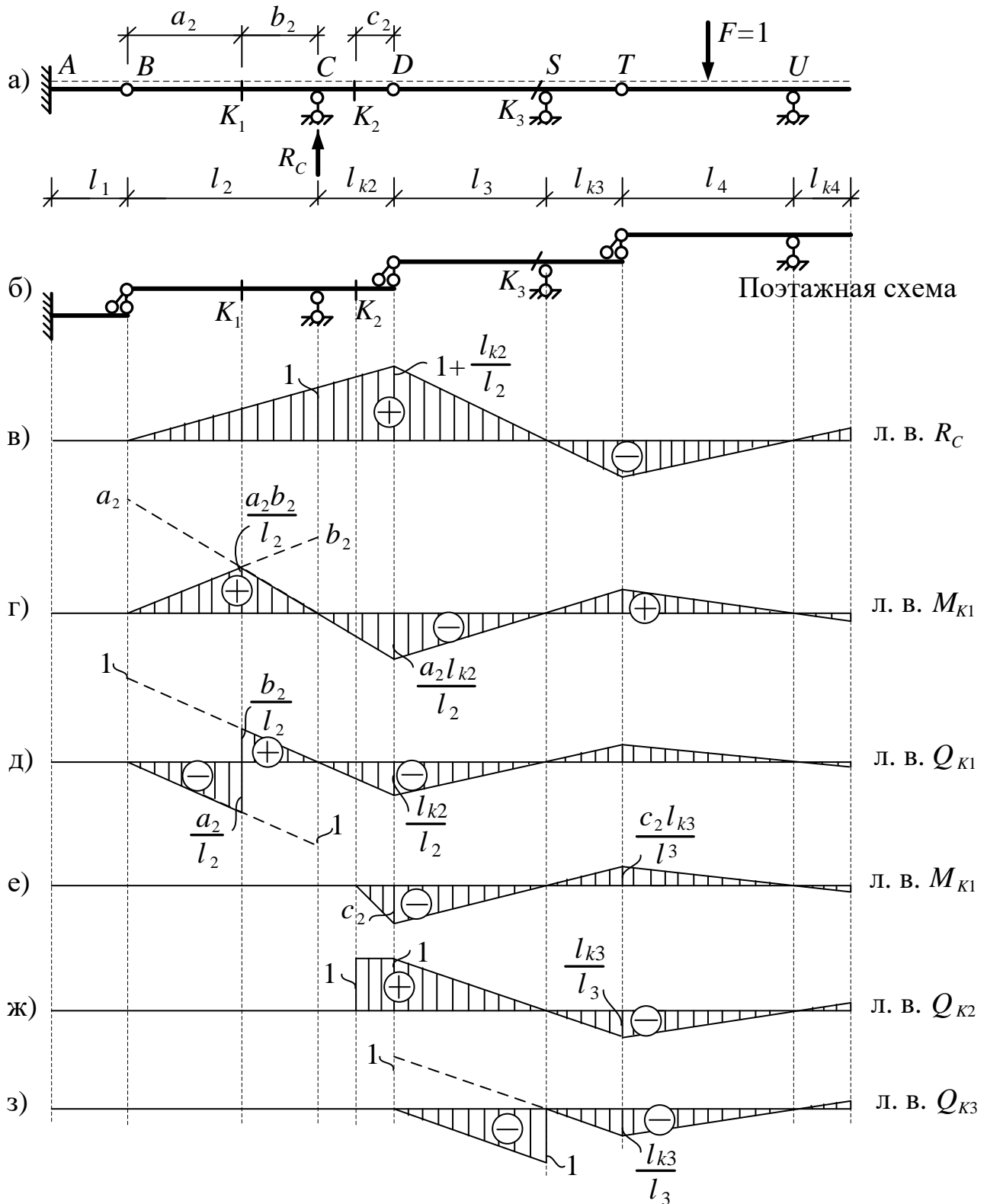


Рис. 7.3

груза, например, на балке DST . При переходе через шарнир D ордината линии влияния $1 + \frac{l_{k2}}{l_2}$ остается неизменной. При расположении груза над опорой S он полностью воспринимается этой опорой и все остальные усилия во всей многопролетной балке, включая реакцию R_C равны нулю (нулевая ордината

под опорой B). Учитывая, что при движении груза по балке DST линия влияния реакции R_C , которая относится к ниже расположенной по поэтажной схеме баки, должна изменяться линейно, соединяем точки, полученные при откладывании ординат под опорами D и E этой балки, прямо линией и продолжаем эту линию на консоль балки ST (рис. 7.3, в). При движении груза по балке TU , процедура построения линии влияния R_C такая же, как и при движении груза по балке DST . Осталось рассмотреть движение груза по балке AB , которая является схемой баки и расположена по поэтажной схеме ниже балки BCD , к которой относится искомое усилие. Так как усилие от нагрузки на ниже расположенных балках вверх (на верхние балки) не передается, то линия влияния R_C на этом участке будет нулевой (рис. 7.3, в).

Линии влияния изгибающего момента и поперечной силы в сечениях K_1 и K_2 в балке BCD строятся аналогично (рис. 7.3, д, е, ж). При построении линий влияния усилий в сечении K_2 (рис. 7.3, е, ж) необходимо учитывать, что сечение находится на консоли балки BCD и при движении груза по этой балке линии влияния усилий строятся как для сечений в консольных балках (рис. 7.1).

Построение линий влияния усилий в сечении K_3 должно начинаться с рассмотрения движения груза по балке DST , и так как сечение находится в пролете этой балки, процедура построения линий влияния усилий в сечении K_3 такова же, как для сечения K_1 в двупропорной балке (рис. 7.2). При движении груза по выше расположенной балке TU линии влияния усилий в сечении K_3 строятся на основе условий взаимодействия и работы простейших балок в многопролетной, рассмотренных выше. При движении груза по нижним балкам AB и BCD усилия в сечении K_3 будут равны нулю. На рис. 7.3, з представлена линия влияния поперечной силы в сечении K_3 .

Аналогично построены линии влияния двух опорных реакций и усилий в двух сечениях для балки с конкретными размерами, представленной на рис. 7.4.

Определение усилий по линиям влияния от внешних нагрузок

Для статически определимых систем, у которых линии влияния имеют кусочно-линейный характер изменения, общее правило для определения усилий по их линиям влияния от действия сосредоточенных сил, равномерно распределенных нагрузок и сосредоточенных моментов имеет вид

$$S = \sum_{i=1}^n F_i y_i + \sum_{j=1}^s q_j a_j + \sum_{k=1}^t m_k \operatorname{tg} \alpha_k, \quad (7.5)$$

где: n, s, t – число соответственно сосредоточенных сил F_i , равномерно распределенных нагрузок q_j и сосредоточенных моментов m_k ; y_i – ордината линии

Рис. 7.4

влияния усилия под сосредоточенной силой; Ω_j – площадь линии влияния усилия под равномерно распределенной нагрузкой; $\operatorname{tg} \alpha_k$ – тангенс угла наклона участка линии влияния усилия под сосредоточенным моментом по отношению к базовой оси.

Сосредоточенные силы F_i и равномерно распределённые нагрузки q_j здесь принимаются положительными, если они действуют вниз, а сосредоточенные моменты m_k положительны, если они действуют по часовой стрелке;

ординаты y_i и площади Ω_j линий влияния усилий берутся со знаками линий влияния соответственно под силами и равномерно распределёнными нагрузка-

ми, а $\operatorname{tg} \alpha_k$ положителен для возрастающей функции линии влияния (см., например, участки BCD и TU для линии влияния R_C , представленной на рис. 7.3,в) и отрицателен для убывающей функции (участок DST на той же л.в.).

Важным при определении усилий от внешних нагрузок является следующее свойство прямолинейного участка линии влияния:

на прямолинейном участке линии влияния усилие от системы сил может быть определено произведением равнодействующей этой системы сил на ординату линии влияния под равнодействующей

$$S = R y_R. \quad (7.6)$$

Рассматриваемое свойство упрощает определение усилий от действия любых нагрузок, действующих на прямолинейных участках линий влияния, при условии, что можно легко найти равнодействующие этих нагрузок и точки их приложения. Так, в случае равномерно распределённой нагрузки её равнодействующая равна произведению интенсивности нагрузки на длину участка и приложена в середине этого участка. Достаточно просто определяются усилия на линейных участках линий влияния и от нагрузок, распределённых по реугольной и по трапецидальной зависимостям. Нагрузку, распределённую по трапецидальной зависимости, следует разбивать на равномерно распределённую и треугольную, либо на две треугольные нагрузки.

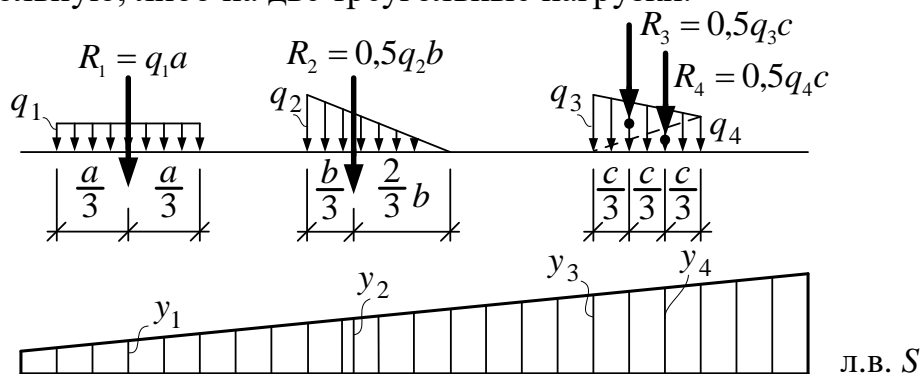


Рис. 7.4

Например, усилие S от нагрузок, представленных на рис. 7.5, можно вычислить по выражению

$$S = (q_1 a) y_1 + (0,5 q_2 b) y_2 + (0,5 q_3 c) y_3 + (0,5 q_4 c) y_4 .$$

Вычислим по линиям влияния усилия, для которых построены линии влияния в балке на рис. 7.4, от внешней нагрузки, представленной там же, и сравним их со значениями, взятыми из эпюр усилий, построенных для этой же балки от действия той же нагрузки на рис. 6.1:

$$R_D = 9,4 \cdot 0,333 + 9,4 \cdot 0,667 + 2,4,4 \cdot 0,982 - 5 \cdot 0,491 = 15,587 \text{ кН};$$

$$R_F = 2,4,4 \cdot 0,333 + 5 \cdot 1,333 = 9,595 \text{ кН};$$

$$M_1 = -1,1 \cdot 1,55 \cdot 1,55/2 - 9,4 \cdot 0,517 - 9,4 \cdot 1,033 + 2,4,4 \cdot 0,489 - 5 \cdot 0,244 = -12,808 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Q_1 = 9,4 \cdot 0,25 - 5,4 \cdot 1,1 \cdot 0,625 - 1,1 \cdot 1,55 \cdot 0,108 - 9,4 \cdot 0,072 - 9,4 \cdot 0,143 + 2,4,4 \cdot 0,068 - 5 \cdot 0,034 = -3,139 \text{ кН};$$

$$M_2 = 9,4 \cdot 1,033 + 9,4 \cdot 0,517 - 2,4,4 \cdot 0,489 + 5 \cdot 0,244 = 11,487 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Q_2 = -9,4 \cdot 0,333 - 2,0 \cdot 4,4 \cdot 0,315 + 5 \cdot 0,158 = 7,427 \text{ кН.}$$

Сравнение значений усилий, полученных по линиям влияния и взятых из эпюр:

Обозначение усилий	Значения усилий, полученные		Расхождение результатов	
	по эпюрам	по л. в.	абсолютное	относительное, в %
R_D	15,587	15,587	0	0
R_F	9,595	9,6	0,005	0,052
M_1	12,812	12,808	0,004	0,030
M_2	11,49	11,487	0,003	0,026
Q_1	3,142	3,139	0,003	0,088
Q_2	7,413	4,427	0,014	0,194

3.8. Особенности расчета трехшарнирных арок на вертикальные нагрузки

Трехшарнирная система, в которой два диска, шарнирно соединенных друг с другом, представляют собой криволинейные стержни, называется трехшарнирной аркой. В трехшарнирных арках, как и в трехшарнирных рамах, возникает четыре составляющие опорных реакций, которые определяются из четырех уравнений равновесия арки в целом и отдельных ее частей (рис. 8.1,а):

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum M_C^{\text{лев}} = 0; \quad \sum X = 0.$$

При этом при действии на трехшарнирные арки только вертикальных нагрузок горизонтальные реакции (распор) слева и справа равны друг другу, а вертикальные реакции определяются аналогично опорным реакциям в простой двухопорной балке, нагруженной той же нагрузкой (рис. 8.1,б).

Внутренние силы в сечениях арок определяются на основе тех же подходов, которые используются в рамах и которые изложены в разделах 1–4.

Можно усилия в сечениях трехшарнирных арок определять и по формулам:

$$M_k = M_k^o - H \cdot y_k; \quad Q_k = Q_k^o \cos \varphi_k - H \cdot \sin \varphi_k; \\ N_k = -(Q_k^o \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k), \quad (8.1)$$

где M_k^o , Q_k^o – изгибающий момент и поперечная сила в сечении k простой двухшарнирной балки (см. рис. 8.1,б), имеющей тот же пролет и нагруженной той же нагрузкой, что и арка; H – величина горизонтальных реакций арки (распор); φ_k – угол наклона касательной к оси арки в сечении k по отношению к горизонтальной оси x ; y_k – ордината центра сечения k относительно оси x , проходящей через опоры (см. рис. 8.1,а).

Заметим, что при заданной системе координат с началом в левой опоре арки (рис. 8.1,а) $\sin \varphi_k$ для левой полуарки положительны, а для правой – отрицательны; $\cos \varphi_k$ для обеих полуарок положительны.

В качестве примера рассмотрим арку параболического очертания, представленную на рис. 8.1. Вычислим усилия в сечениях K_1 и K_2 арки.

Вначале определим опорные реакции от заданной внешней нагрузки:

$$\sum M_A = 0; \quad 12 \cdot 2 + (3 \cdot 8) \cdot 6 + 10 \cdot 12 + 8 \cdot 17 + (4 \cdot 3) \cdot 18,5 - R_B \cdot 20 = 0; \quad R_B = 32,3 \text{ кН;}$$

$$\sum M_B = 0; \quad -12 \cdot 18 - (3 \cdot 8) \cdot 14 - 10 \cdot 8 - 8 \cdot 3 - (4 \cdot 3) \cdot 1,5 + R_A \cdot 20 = 0; \quad R_A = 33,7 \text{ кН};$$

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0; \quad 33,7 \cdot 10 - 12 \cdot 8 - (3 \cdot 8) \cdot 4 + H \cdot 4 = 0; \quad H = 36,25 \text{ кН}.$$

Проверяем правильность нахождения опорных реакций:

$$\sum Y = 0; \quad 33,7 + 32,3 - 12 - 3 \cdot 8 - 10 - 8 - 3 \cdot 4 = 0; \quad 66 - 66 = 0;$$

$$\sum M_C^{\text{праб}} = 0; \quad 10 \cdot 2 + 8 \cdot 7 + (4 \cdot 3) \cdot 8,5 + 36,25 \cdot 4 - 32,3 \cdot 10 = 0; \quad 323 - 323 = 0.$$

Определяем ординаты и параметры углов наклона касательных к горизонтали для сечений:

Сечение K_1 : $x_{K_1} = 4 \text{ м}; \quad y_{K_1} = \frac{4f}{l^2} x_{K_1}(l - x_{K_1}) = \frac{4 \cdot 4}{20^2} \cdot 4 \cdot (20 - 4) = 2,56 \text{ м};$

$$\text{tg } \varphi_{K_1} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_{K_1}) = \frac{4 \cdot 4}{20^2} (20 - 2 \cdot 4) = 0,48; \quad \sin \varphi_{K_1} = 0,4327; \quad \cos \varphi_{K_1} = 0,9015;$$

Сечение K_2 : $x_{K_2} = 15 \text{ м}; \quad y_{K_2} = \frac{4f}{l^2} x_{K_2}(l - x_{K_2}) = \frac{4 \cdot 4}{20^2} \cdot 15 \cdot (20 - 15) = 3 \text{ м};$

$$\text{tg } \varphi_{K_2} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_{K_2}) = \frac{4 \cdot 4}{20^2} (20 - 2 \cdot 15) = -0,4; \quad \sin \varphi_{K_2} = -0,3714; \quad \cos \varphi_{K_2} = 0,9285.$$

3) Определяем усилия в сечениях по формулам (8.1):

Сеч. K_1 : $M_{K_1}^0 = 33,7 \cdot 4 - 12 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 104,8 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad Q_{K_1}^0 = 33,7 - 12 - 3 \cdot 2 = 15,7 \text{ кН};$

$$M_{K_1} = 104,8 - 36,25 \cdot 2,56 = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad - \text{растянутые волокна} - \text{снизу};$$

$$Q_{K_1} = 15,7 \cdot 0,9015 - 36,25 \cdot 0,4327 = -1,532 \text{ кН};$$

$$N_{K_1} = -(15,7 \cdot 0,4327 + 36,25 \cdot 0,9015) = -39,473 \text{ кН};$$

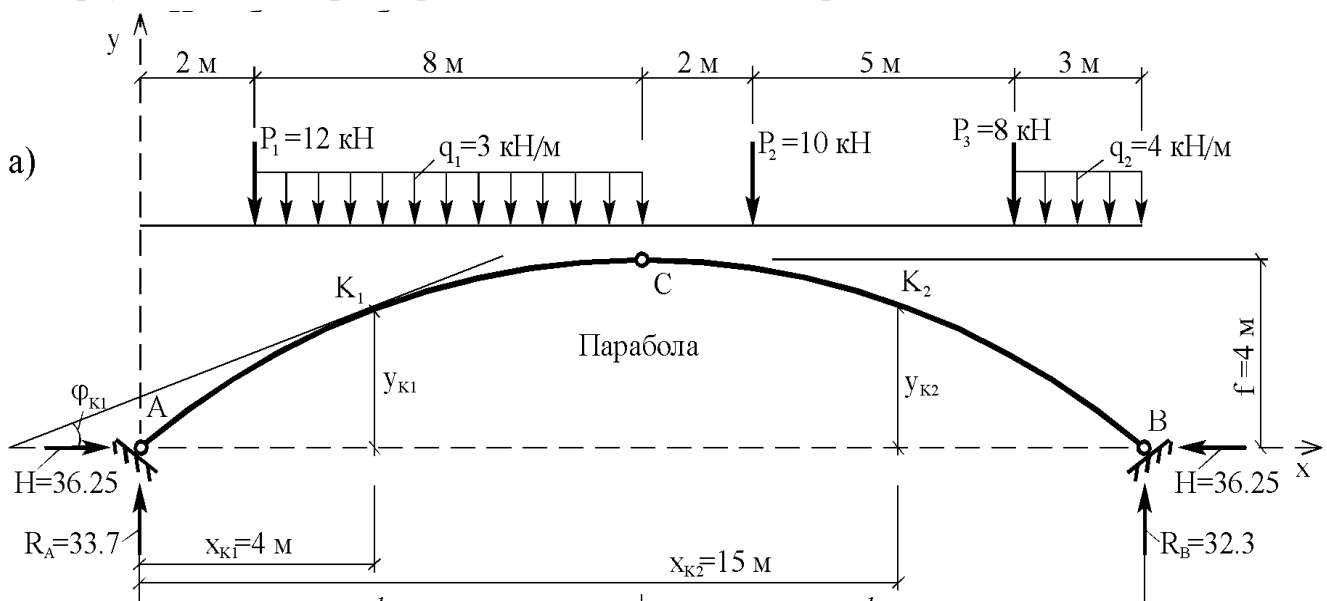
Сечение K_2 :

$$M_{K_2} = (32,3 \cdot 5 - 8 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 3,5) - 36,25 \cdot 3 = -5,25 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad - \text{растян. волокна} - \text{сверху};$$

$$Q_{K_2} = (-32,3 + 8 + 4 \cdot 3) \cdot 0,9285 - 36,25 \cdot (-0,3714) = 2,043 \text{ кН};$$

$$N_{K_2} = -[(-32,3 + 8 + 4 \cdot 3) \cdot (-0,3714) + 36,25 \cdot 0,9285] = -38,226 \text{ кН}.$$

Учитывая, что оси арок криволинейны, эпюры усилий в арках также изменяются по криволинейным зависимостям, и точное представление их формы достаточно сложно. Эпюры усилий в арках обычно строят по некоторому числу ординат, разбивая пролет арки на определенное число (чаще всего равных) частей и вычисляя ординаты эпюр в граничных точках, соединяя их затем плавными кривыми. При этом обязательно необходимо вычислять ординаты эпюр усилий и в характерных сечениях – под сосредоточенными силами и мо-



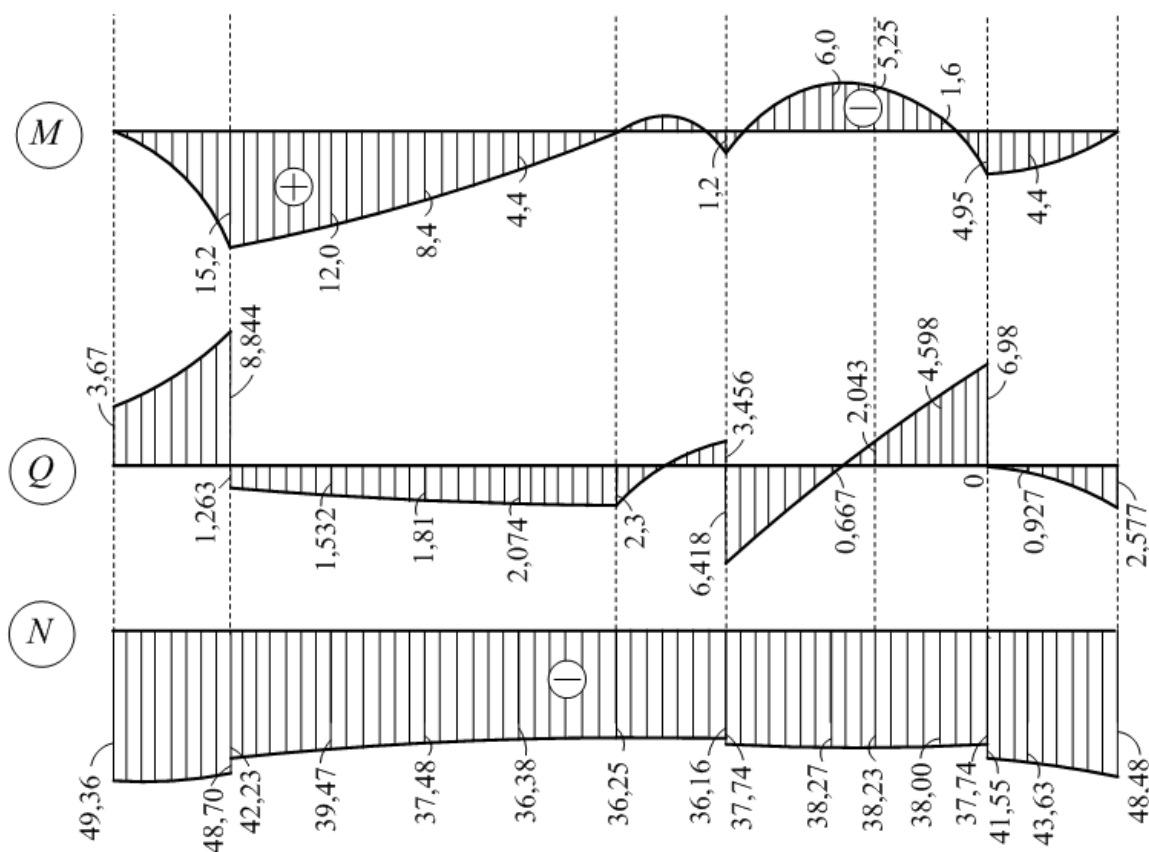


Рис. 8.1.

форму эпюры усилий. На рис. 8.1 представлены результаты расчета арки при разбивке пролета на десять равных частей. Представленные значения усилий в расчетных и характерных сечениях можно использовать для самостоятельного изучения процедуры расчета арок, учитывая, что результаты известны.

3.9. Определение усилий в фермах

Статически определимая шарнирная ферма – это геометрически неизменяемая система, расчетная схема которой состоит из прямых стержней, соединен-

ных в узлах шарнирно (рис. 3.24). Число степеней свободы у нее, определенное, например, по формуле $W = 2U - C - C_0$, равно нулю. При узловой передаче нагрузок стержни шарнирных ферм работают только на растяжение-сжатие. К таким расчетным схемам могут быть приведены и стропильные фермы с жестким соединением элементов в узлах, в которых при узловой передаче нагрузок величины изгибающих моментов и поперечных сил в стержнях незначительны (и ими соответственно можно пренебречь). Жесткие узлы на расчетных схемах таких ферм заменяются шарнирными.

Определим ряд понятий для ферм, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Расстояние между опорами называют пролетом фермы (l), наибольший вертикальный размер – высотой фермы (h).

Совокупность элементов (стержней) фермы, образующих ее верхний и нижний контуры, называют соответственно верхним и нижним поясами фермы (рис. 3.24). Стержни, расположенные между поясами и соединяющие их, называют решеткой фермы. Среди стержней решетки различают раскосы и стойки. Расстояния между соседними узлами поясов фермы (по горизонтали) называют панелями. Различают панели нижнего и верхнего поясов.

Передача нагрузок в узлы ферм осуществляется через, так называемые, передаточные балочки, в качестве которых в реальных сооружениях могут выступать перекрытия по прогонам, балкам; плиты покрытия и т. п. На расчетных схемах передаточные балочки представляются в виде простых двухопорных балок с пролетом, равным длине панелей загруженного пояса фермы.

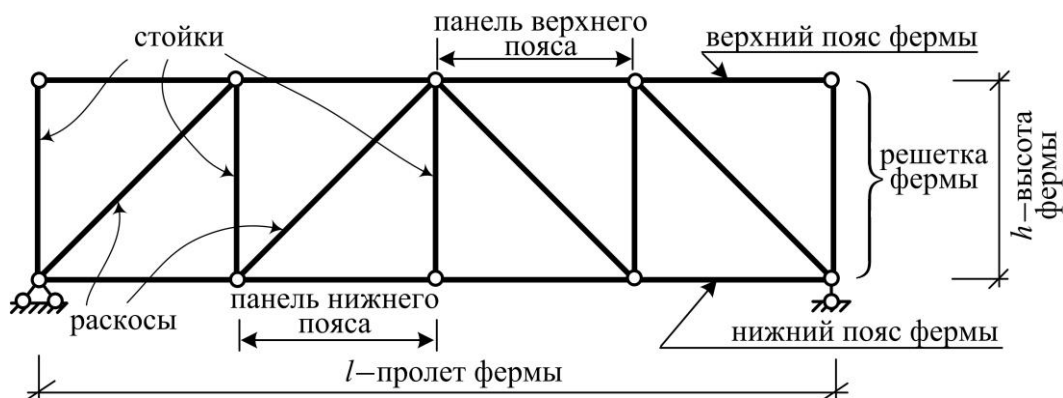


Рис. 3.24. Расчетная схема фермы и ее элементы

Основным методом определения усилий в стержнях статически определимых ферм является метод сечений. Ферма сквозным или замкнутым сечением (рис. 3.25) разрезается (разделяется) на две или несколько частей так, чтобы был рассечен стержень, в котором определяется усилие. После этого рассматривается равновесие одной из частей, действие на которую отброшенной части (частей) фермы заменяется пока неизвестными продольными силами. Направляют эти продольные силы обычно от узлов (от сечений), что соответствует положительным для них направлениям, при которых в стержнях возникает растяжение (рис. 3.25б). Из уравнений равновесия определяются искомые продольные силы и устанавливается истинный знак усилий (если усилие получилось отрицательным, значит оно будет направлено в противоположную сто-

рону и в стержне будет иметь место сжатие). Метод сечений для ферм реализуется с помощью способов вырезания узлов, моментной точки и проекций.

Способ вырезания узлов. Замкнутым сечением вырезается узел фермы. Усилия в рассеченных стержнях, соединяющихся в узле, представляют систему сил, сходящихся в одной точке, для равновесия которой можно составить два независимых уравнения в виде сумм проекций сил на две оси:

$$\Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \text{или} \quad \Sigma Z_1 = 0; \quad \Sigma Z_2 = 0. \quad (3.1)$$

Направлять эти оси можно произвольно, исключая только их параллельность. С точки зрения рациональности расчета выбирать направления осей следует так, чтобы в каждое из уравнений (3.1) входило по возможности только одно неизвестное усилие. Вырезать можно те узлы, в которых число неизвестных усилий не превышает двух и эти усилия не направлены по одной прямой. В отдельных случаях возникает необходимость вырезания узлов и с большим числом неизвестных – например, если это позволяет найти усилие хотя бы в одном

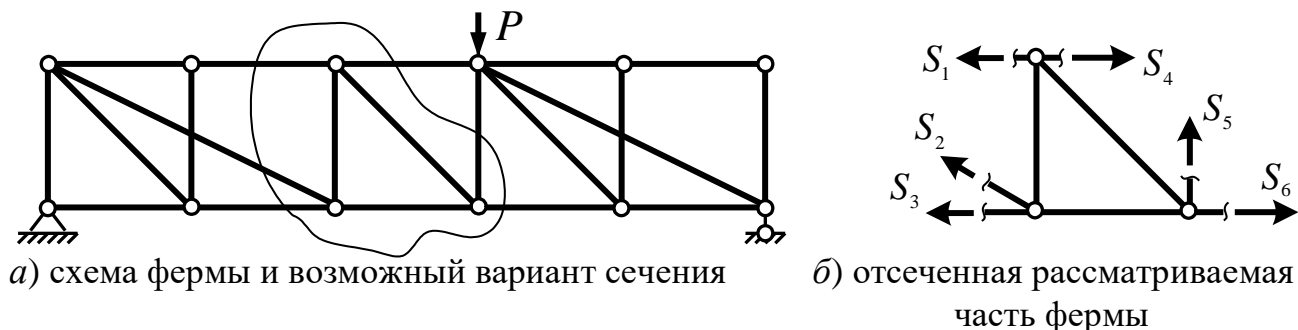


Рис. 3.25. Применение метода сечений

из стержней (в случае, если в трехстержневом узле два стержня направлены по одной прямой, то можно найти усилие в третьем стержне – см. узлы 2 и 7 на рис. 3.26), либо позволяет найти зависимость между некоторыми усилиями, которая будет потом использоваться в дальнейших расчетах.

Например, для фермы на рис. 3.26 сначала можно вырезать узел 1 (рис. 3.26,б), из рассмотрения равновесия которого найдем:

$$\Sigma Y = 0; \quad S_{1-3} \sin \alpha - P = 0; \quad S_{1-3} = \frac{P}{\sin \alpha};$$

$$\Sigma X = 0; \quad S_{1-2} + S_{1-3} \cos \alpha = 0; \quad S_{1-2} = -S_{1-3} \cos \alpha = -\frac{P}{\sin \alpha} \cos \alpha = -P \operatorname{ctg} \alpha.$$

Угол α и его тригонометрические функции $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ находятся из геометрических соображений.

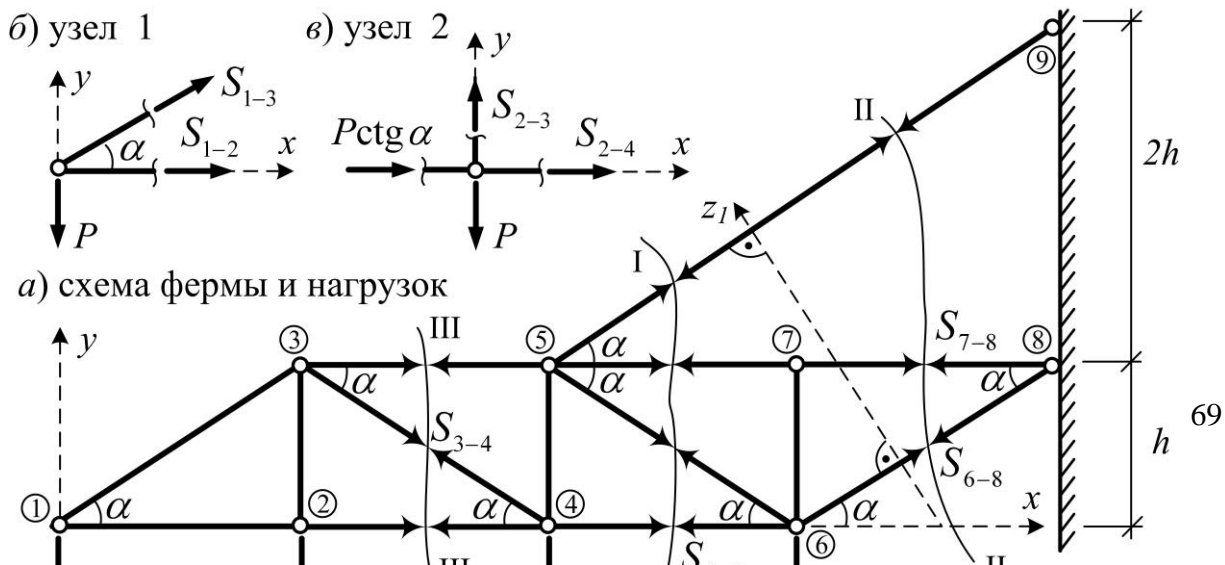


Рис. 3.26

Затем вырезаем узел 2 (рис. 3.26в). При этом в стержне 1–2 прикладываем уже известное усилие $S_{1-2} = -P \operatorname{ctg} \alpha$. Из рассмотрения равновесия узла находим:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; & \quad P \operatorname{ctg} \alpha + S_{2-4} = 0; & \quad S_{2-4} = -P \operatorname{ctg} \alpha; \\ \Sigma Y = 0; & \quad S_{2-3} - P = 0; & \quad S_{2-3} = P. \end{aligned}$$

Дальнейшая процедура расчета фермы на рис. 3.26 предполагает вырезание узлов 3 и 4, из рассмотрения равновесия которых найдутся усилия в стержнях 3–4, 3–5, 4–5 и 4–6. Вырезав узел 7, из уравнения $\Sigma Y = 0$ можно найти еще усилие в стержне 7–6, которое в данном случае будет нулевым. Для определения усилий в остальных стержнях, если не определять опорные реакции, способ вырезания узлов здесь не применим, так как в каждом из оставшихся узлов сходится более двух стержней с неизвестными усилиями.

Способ вырезания узлов позволяет сформулировать **признаки «нулевых» стержней**, с помощью которых легко находить стержни, в которых усилия равны нулю:

1) в двухстержневом незагруженном узле, в котором стержни не лежат на одной прямой (рис. 3.27, поз. 1), усилия в обоих стержнях равны нулю:

$$\begin{aligned} \Sigma Z_1 = 0; & \quad -S_2 \cos \alpha = 0; & \quad S_2 = 0; \\ \Sigma Z_2 = 0; & \quad -S_1 \cos \beta = 0; & \quad S_1 = 0; \end{aligned}$$

2) в трехстержневом незагруженном узле, в котором два стержня лежат на одной прямой, а третий под углом к ним (рис. 3.27, поз. 2), усилие в третьем стержне равно нулю, а усилия в первых двух стержнях равны друг другу:

$$\Sigma Y = 0; \quad S_3 \sin \alpha = 0; \quad S_3 = 0; \quad \Sigma X = 0; \quad -S_1 + S_2 + 0 = 0; \quad S_1 = S_2;$$

3) в двухстержневом узле, в котором стержни не лежат на одной прямой и по направлению одного из стержней приложена сила (рис. 3.27, поз. 3), усилие во втором стержне будет равно нулю, а усилие в первом – указанной внешней силе:

$$\begin{aligned} \Sigma Z_1 = 0; & \quad -S_2 \cos \alpha = 0; & \quad S_2 = 0; \\ \Sigma Z_2 = 0; & \quad -S_1 - P = 0; & \quad S_1 = -P. \end{aligned}$$

Достоинство способа – его простота. *Недостатками* являются:

1) то, что часто нельзя сразу (без предварительного последовательного расчета ряда узлов и иногда довольно большого их количества) найти усилие в ин-

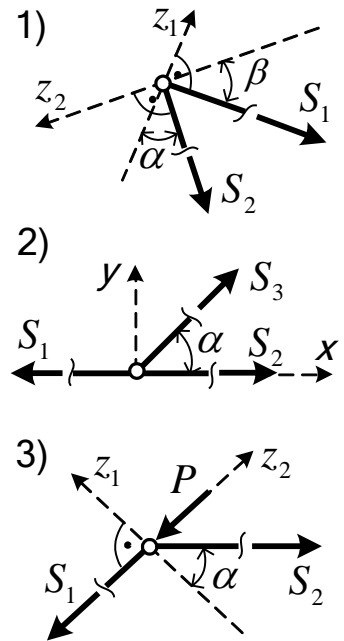


Рис. 3.27

тересующем нас стержне внутри фермы;

2) то, что в процессе последовательного вырезания узлов погрешности расчетов передаются от предыдущих узлов к последующим, постепенно накапливаясь и увеличиваясь.

Способ моментной точки. Ферма рассекается на две части или вырезается часть ее таким образом (если это, конечно, возможно), чтобы оси всех рассеченных стержней с неизвестными усилиями, кроме одного (того, в котором ищется усилие), пересекались в одной точке; эта точка принимается за моментную и относительно ее составляется сумма моментов всех сил для рассматриваемой части фермы; из полученного уравнения определяется искомое усилие.

Например, для фермы на рис. 3.26 для определения усилия в стержне 4–6 необходимо провести сечение I–I и рассмотреть равновесие левой части фермы. Моментной для усилия S_{4-6} будет точка в узле 5, в котором пересекаются оставшиеся три стержня, рассеченные сечением I–I, то есть стержни 5–6, 5–7 и 5–9. Искомое усилие найдется из уравнения:

$$\Sigma M_5^{лев} = 0; \quad -P \cdot 2d - P \cdot d - S_{4-6} \cdot h = 0; \quad S_{4-6} = -\frac{3d}{h} P.$$

Усилие в стержне 6–8 найдем, проведя сечение II–II и рассмотрев равновесие левой части фермы, с учетом того, что моментной точкой в этом случае будет также точка в узле 5, в которой пересекаются оси стержней 5–9 и 7–8, разрезанные сечением вместе со стержнем 6–8:

$$\Sigma M_5^{лев} = 0; \quad -2P \cdot d + P \cdot d - P \cdot d - S_{6-8} \cos \alpha \cdot h - S_{6-8} \sin \alpha \cdot d = 0;$$

$$S_{6-8} = -\frac{2d}{h \cos \alpha + d \sin \alpha} P.$$

Способ проекций. Ферма рассекается на две части или вырезается часть ее таким образом (если это, конечно, возможно), чтобы все стержни с неизвестными усилиями, кроме одного (того, в котором ищется усилие), были параллельны друг другу. Для рассматриваемой части фермы составляется сумма проекций всех сил на ось, перпендикулярную к указанным параллельным стержням. Из полученного уравнения определяется искомое усилие.

Например, для фермы на рис. 3.26 для определения усилия в стержне 7–8 можно использовать уже проведенное ранее сечение II–II; стержни 6–8 и 5–9, рассеченные сечением вместе со стержнем 7–8, параллельны друг другу; поэтому, если составить уравнение проекций всех сил, например, левой части фермы на ось Z_1 , перпендикулярную стержням 6–8 и 5–9, то неизвестные усилия в этих стержнях не войдут в рассматриваемое уравнение равновесия (их проекции на ось Z_1 равны нулю); в уравнении будет только одно неизвестное – усилие S_{7-8} , которое и найдется из решения уравнения:

$$\Sigma Z_1 = 0; \quad -4P \cos \alpha - S_{7-8} \sin \alpha = 0; \quad S_{7-8} = -4P \operatorname{ctg} \alpha.$$

Аналогично можно найти усилие в стержне 3–4, проведя сечение III–III и

составив для левой части фермы сумму проекций сил на вертикальную ось y (стержни 3–5 и 2–4 горизонтальны):

$$\Sigma Y = 0; \quad -2P - S_{3-4} \sin \alpha = 0; \quad S_{3-4} = -\frac{2P}{\sin \alpha}.$$

Достоинствами способов моментной точки и проекций является то, что в большинстве случаев с их помощью усилия в стержнях можно выразить только через внешние нагрузки и опорные реакции (не выражая через другие усилия).

Применяя совместно способы моментной точки, проекций и вырезания узлов, для большинства ферм можно найти усилия во всех стержнях.

3.10. Определение перемещений в изгибаемых системах

Определение перемещений в стержневых системах от действия внешних нагрузок удобно выполнять по формуле Мора. Для изгибаемых систем (рам, балок) при этом обычно учитывают только изгибающие моменты (ввиду незначительности влияния на величины перемещений в таких системах поперечных и продольных сил). Формула Мора в этом случае принимает вид:

$$\Delta_{iP} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_P dx}{EJ}; \quad (3.2)$$

где: \bar{M}_i – изгибающие моменты в системе от действия единичной «силы», приложенной в сечении (точке), для которого определяется перемещение, в направлении искомого (i -го) перемещения; M_P – изгибающие моменты в системе от действия заданной нагрузки; EJ – изгибная жесткость стержней (участков) системы; n – число участков, на которые разбивается система для вычисления интегралов Мора; l – длины этих участков.

Порядок определения перемещений по формуле Мора:

1. Определяются изгибающие моменты в системе от действия заданной нагрузки (находятся аналитические зависимости их изменения в пределах каждого участка либо строится эпюра M_P).

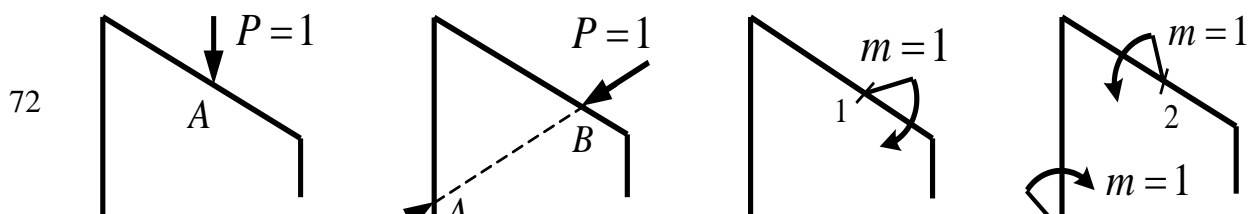
2. В сечении (точке), для которого определяется перемещение, в направлении искомого перемещения прикладывается единичная «сила»; при этом в зависимости от вида определяемого перемещения эта «сила» может быть разной:

а) если определяется линейное (горизонтальное, вертикальное, в произвольном направлении) перемещение, то прикладывается единичная сосредоточенная сила $P = 1$ (рис. 3.28а);

б) если определяется взаимное сближение (расхождение) двух точек, то к этим точкам прикладываются две единичные силы, направленные по прямой, соединяющей указанные точки, навстречу друг другу (друг от друга) (рис. 3.28б);

в) если определяется угол поворота сечения, то прикладывается единичный сосредоточенный момент $m = 1$ (рис. 3.28в);

г) если определяется взаимный угол поворота двух сечений (изменение величины угла между сечениями), то к этим сечениям прикладываются два единичных момента, действующих навстречу друг другу (рис. 3.28г).



а)

б)

в)

г)

Рис. 3.28

3. От действия единичной «силы» (приложенной согласно пункту 2) определяются изгибающие моменты в системе (находятся зависимости изменения изгибающих моментов в пределах каждого участка либо строится эпюра \bar{M}_i).

4. Вычисляется искомое перемещение по формуле Мора (3.2). При этом вычисление интегралов Мора может производиться:

- а) непосредственным интегрированием (что не всегда просто);
- б) по правилу Верещагина;
- в) по формулам трапеций, Симпсона;
- д) численным способом, когда интегрирование заменяется суммированием по малым конечным участкам, и другими способами.

Заметим, что вычисление интегралов Мора по правилу Верещагина, по формулам трапеций и Симпсона часто условно называют «перемножением эпюр».

Правило Верещагина. Для вычисления интеграла Мора $\int_0^l \frac{\bar{M}_i M_P dx}{EJ}$ на участке постоянной жесткости, в пределах которого характер изменения эпюр \bar{M}_i и M_P не меняется, нужно площадь одной из эпюр Ω умножить на ординату, взятую под центром тяжести этой площади из другой эпюры y_c (если одна из эпюр криволинейна, то обязательно берется площадь криволинейной эпюры):

$$\frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_i M_P dx = \frac{1}{EJ} \Omega \cdot y_c. \quad (3.3)$$

При использовании правила Верещагина, таким образом, для эпюры, площадь которой берется, необходимо уметь вычислять эту площадь и уметь находить (знать) положение ее центра тяжести.

Правило знаков: Если центр тяжести «перемножаемой» эпюры и соответствующая ему ордината из другой эпюры расположены по одну сторону от оси стержня (растянутые волокна находятся с одной стороны стержня), то результат «перемножения» принимается со знаком «плюс».

Приведем несколько примеров применения правила Верещагина.

Для эпюр, представленных на рис. 3.29, вычисление интеграла Мора по правилу Верещагина может быть выполнено четырьмя разными способами, которые будут давать один и тот же результат:

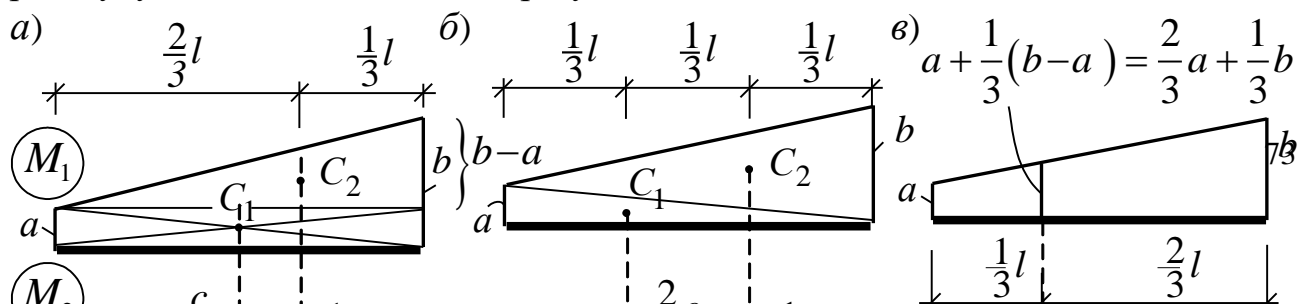


Рис. 3.29

а) при вычислении площади эпюры M_1 и разбивке ее (для быстрого и удобного определения положения центров тяжести) на прямоугольник $a \times l$ и треугольник $(b - a) \times l$ (рис. 3.29а) будем иметь:

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[(a \cdot l) \cdot \frac{c}{2} + \frac{1}{2} (b - a) l \cdot \frac{1}{3} c \right];$$

б) при вычислении площади эпюры M_1 и разбивке ее на два треугольника $a \times l$ и $b \times l$ (рис. 3.29б) получим:

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\left(\frac{a \cdot l}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} c + \left(\frac{b \cdot l}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} c \right];$$

в) при вычислении площади эпюры M_2 (так как обе эпюры M_1 и M_2 линейны, то не имеет значения площадь какой из них брать) (рис 3.29в) можно записать:

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{c \cdot l}{2} \right) \cdot \left[a + \frac{1}{3} (b - a) \right], \text{ или } = \frac{1}{EJ} \left(\frac{c \cdot l}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} a + \frac{1}{3} b \right).$$

если эпюру M_1 разобьем на
прямоугольник и треугольник;

если эпюру M_1 разобьем на
два треугольника.

Формула трапеций – применяется для «перемножения» только линейных эпюр (рис. 3.30):

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \quad (3.4)$$

$$= \frac{l}{6EJ} (2a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + 2b_1 \cdot b_2).$$

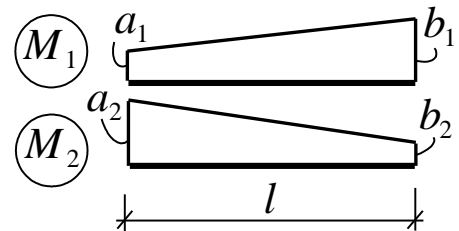


Рис. 3.30

Формула Симпсона может применяться для вычисления интегралов Мора путем соответствующего «перемножения» как линейных эпюр, так и эпюр, одна из которых криволинейна (изменяется по параболическому закону) (рис. 3.31). Формула Симпсона имеет вид:

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{l}{6EJ} (a_1 \cdot a_2 + 4c_1 \cdot c_2 + b_1 \cdot b_2). \quad (3.5)$$

Рис. 3.31 *Правило знаков.* В формулах Симпсона и трапеций произведение «перемножаемых» ординат принимаются со знаком «плюс», если ординаты находятся с одной стороны от оси стержня на обоих эпюрах, и со знаком «минус», если эти ординаты находятся с разных сторон от оси стержня.

Рекомендации к вычислению интегралов Мора в равно-балочных системах:

- для эпюр усилий (изгибающих моментов), имеющих линейный характер изменения и простую форму (прямоугольную, треугольную), предлагается использовать правило Верещагина;
- для эпюр усилий, имеющих линейный характер изменения, но более сложную форму (трапецидальную), рекомендуется использовать формулу трапеций;
- для эпюр усилий (изгибающих моментов), одна из которых криволинейна, необходимо использовать формулу Симпсона.

При этом отметим, что формула Симпсона является наиболее общей и ее можно применять и для всех случаев обоих линейных эпюр усилий.

Следует заметить, что при использовании для вычисления интегралов Мора указанных способов обе «перемножаемые» эпюры на участке должны удовлетворять следующим требованиям:

- жесткость стержня на участке должна быть постоянной;
- зависимости изменения обеих эпюр (характер их изменения) не должны изменяться в пределах участка, или, по другому, – в пределах участка «перемножения» эпюры не должны иметь изломов, разрывов (скачков) и переходов к другим зависимостям изменения усилий.

Эпюра изгибающих моментов от действия заданной внешней нагрузки имеет вид, показанный на рис. 3.32б.

Если одно из этих требований не соблюдается, то такой участок следует разбить на более мелкие участки, и сделать это надо таким образом, чтобы указанные требования выполнялись. Границами рассматриваемых участков интегрирования в равно-стержневых системах будут точки (сечения) излома и разветвления стержней, приложения сосредоточенных нагрузок (сил, моментов), действия опорных реакций, начала и конца распределенных нагрузок.

Вычисление перемещений от действия заданных нагрузок по формуле Мора (3.2), производится, таким образом, путем суммирования результатов вычисления интегралов Мора рассмотренными способами по всем участкам одновременной непрерывности эпюр системы.

Рассмотрим определение вертикального перемещения точки *C* от действия заданной нагрузки в трехшарнирной раме, представленной на рис. 3.32а.

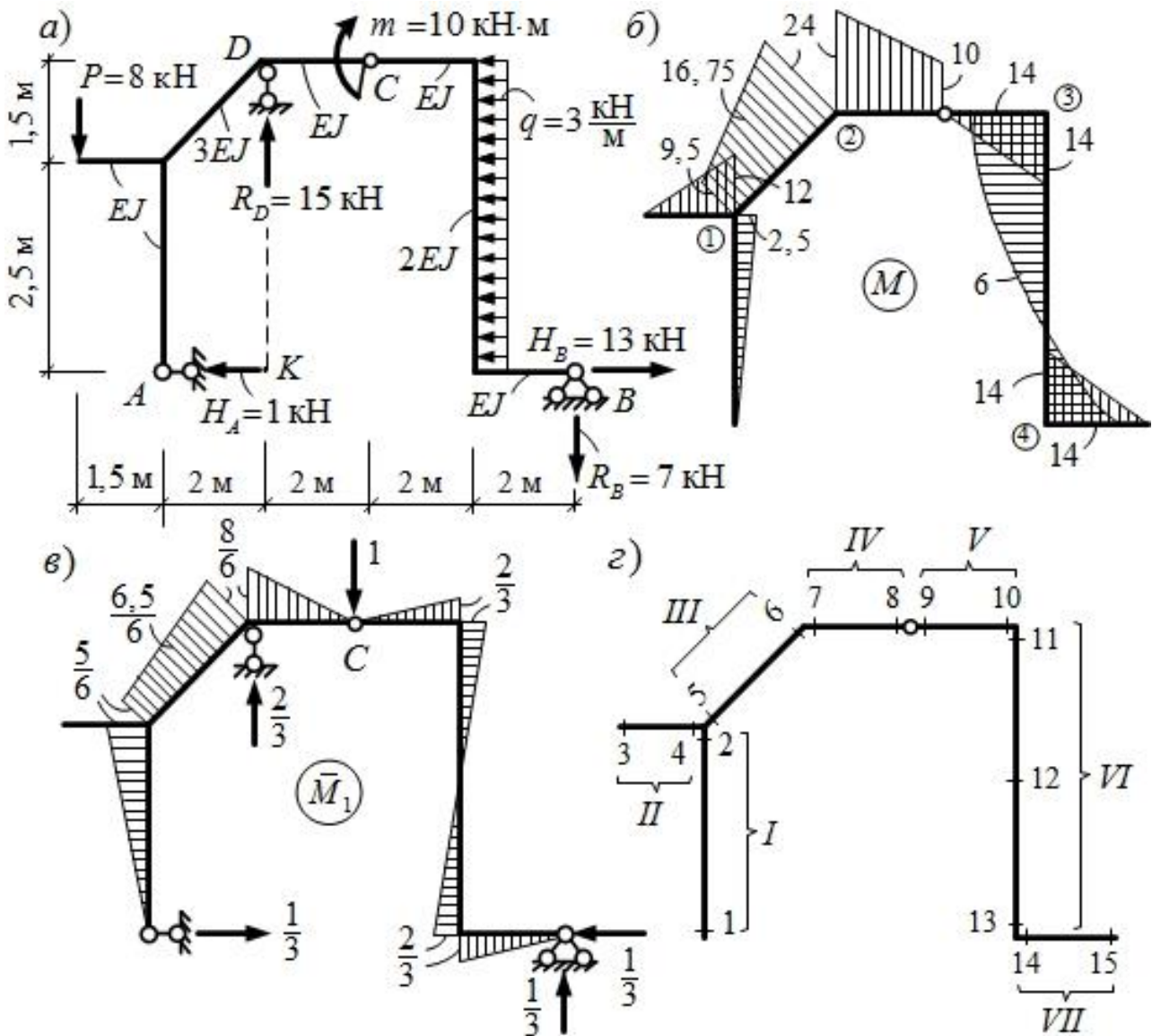


Рис. 3.32

Вычисление опорных реакций и построение эпюры изгибающих моментов в раме выполняем на основе подходов, изложенных в разделах 3.1–3.3.

Эпюра изгибающих моментов от действия заданной нагрузки имеет вид, показанный на рис. 3.32б.

Так как определяется вертикальное перемещение точки C , то в этой точке в вертикальном направлении прикладываем единичную сосредоточенную силу и направляем ее вниз, предполагая, что точка C будет смещаться вниз.

От действия этой силы строим единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 (рис. 3.32 в). После этого выделяем в раме участки одновременной непрерывности эпюр, в пределах которых жесткость стержней постоянна и обе эпюры изменяются непрерывно (рис. 3.32 г), и вычисляем искомое перемещение по формуле Мора (3.2)

$$\Delta_C^{верм} = \Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ} = -\frac{1}{EJ} \left(\frac{2,5 \cdot 2,5}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} + 0 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2,5}{6 \cdot 3EJ} \left(9,5 \cdot \frac{5}{6} + 4 \cdot \frac{6,5}{6} \cdot 16,75 + 24 \cdot \frac{8}{6} \right) + \frac{2}{6EJ} \left(2 \cdot 24 \cdot \frac{8}{6} + \frac{8}{6} \cdot 10 + 0 \cdot 24 + 2 \cdot 10 \cdot 0 \right) - \\
& - \frac{1}{EJ} \left(\frac{14 \cdot 2}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{6 \cdot 2EJ} \left(-14 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot 0 \cdot 6 - 14 \cdot \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{EJ} \left(\frac{14 \cdot 2}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10,333}{EJ}.
\end{aligned}$$

Отметим, что на участках I, V и VII вычисление производилось по правилу Верещагина (3.3), на участке IV – по формуле трапеций (3.4), а на участках III и VI – по формуле Симпсона (3.5). На участке II единичная эпюра изгибающих моментов (рис. 3.32в) нулевая, поэтому и результат вычисления интеграла Мора – ноль.

Значение перемещения положительно, следовательно, точка C действительно перемещается вниз.

Рассмотрим пример определения перемещений еще в одной раме, представленной на рис. 3.33. Определим угол поворота сечения 1 и взаимное сближение (или расхождение) узлов T и C.

Эпюра изгибающих моментов от действия заданной внешней нагрузки имеет вид, показанный на рис. 3.34.

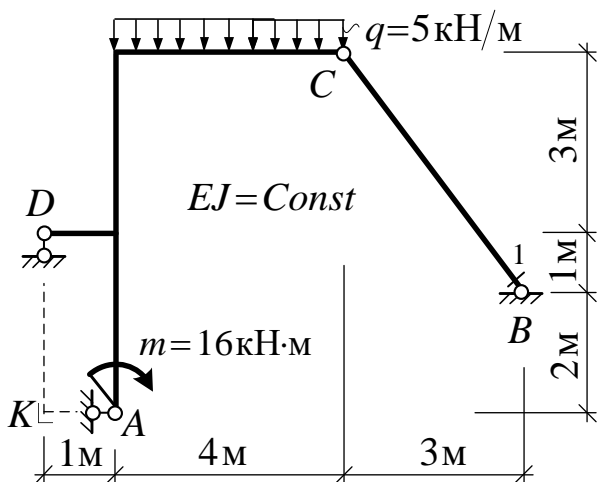


Рис. 3.33

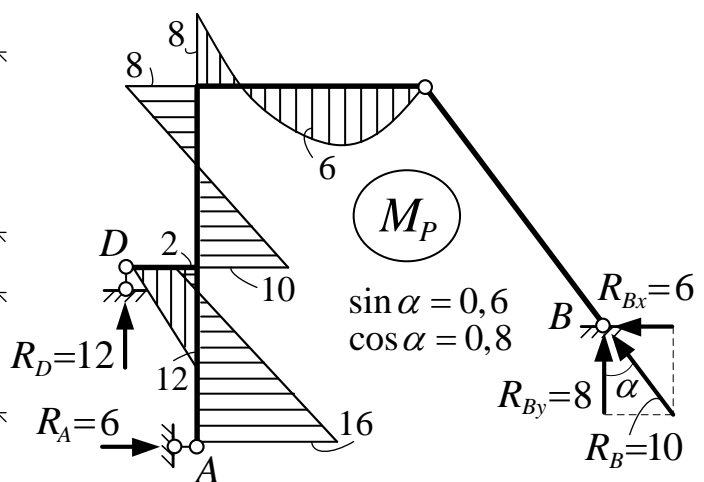


Рис. 3.34

В сечении 1, угол поворота которого определяется, прикладываем единичный момент и строим от его действия единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 (рис. 3.35). Вычисляем искомое перемещение по формуле Мора:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 = \Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ} = & - \frac{1}{EJ} \left(\frac{12 \cdot 1}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,158 + \frac{1}{EJ} \left(\frac{0,395 \cdot 2}{2} \right) \cdot \left(2 - \frac{1}{3} \cdot 18 \right) + \\
& + \frac{4}{6EJ} (-10 \cdot 0,237 - 4 \cdot 1 \cdot 0,4345 + 8 \cdot 0,632) + \frac{4}{6EJ} (8 \cdot 0,632 - 4 \cdot 6 \cdot 0,316 + 0) = - \frac{2,945}{EJ}.
\end{aligned}$$

Получаем, что сечение 1 в раме поворачивается по часовой стрелке, а не против часовой стрелки, как предполагалось.

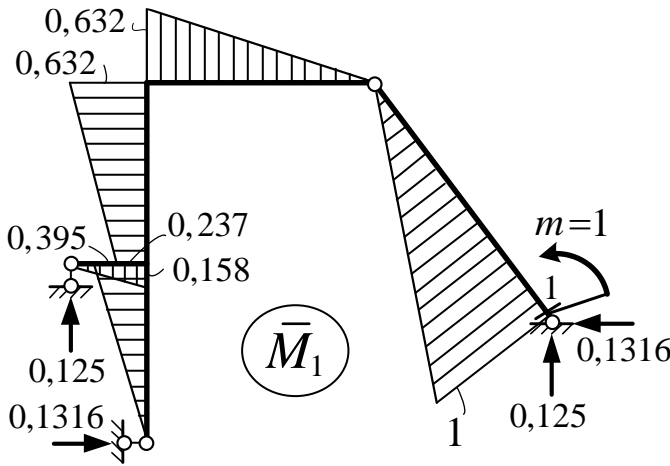


Рис. 3.35

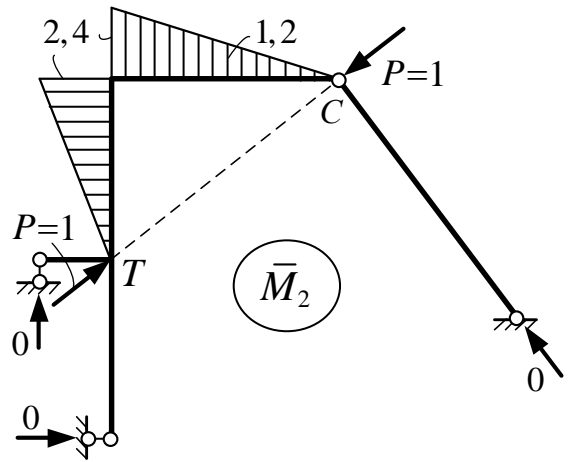


Рис. 3.36

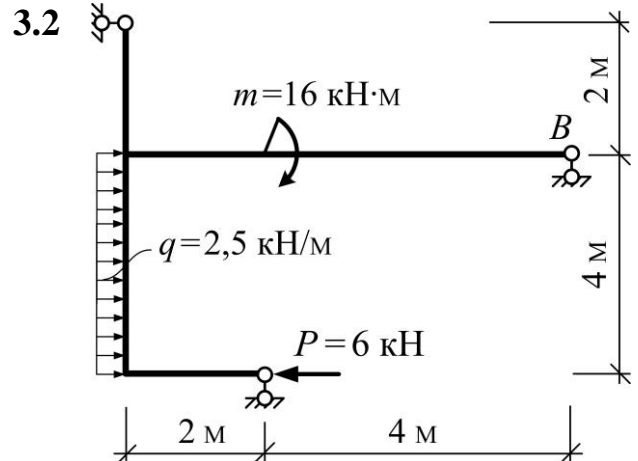
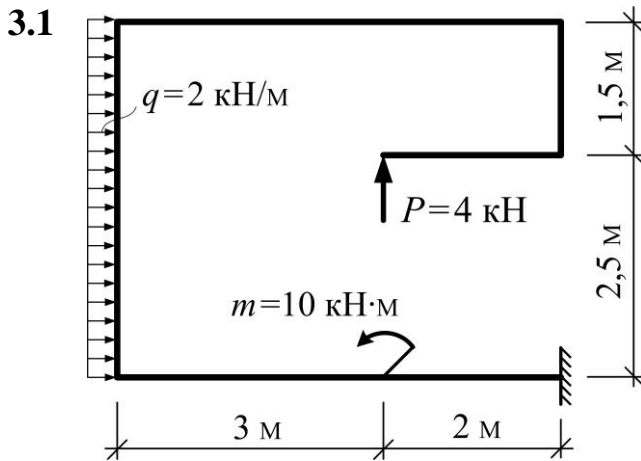
Для определения взаимного сближения (расхождения) узлов T и C к этим узлам прикладываем по единичной силе, которые направляем по прямой, соединяющей узлы T и C навстречу друг другу. От действия этих единичных сил строим единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_2 (рис. 3.36). Искомое перемещение вычисляем по формуле Мора:

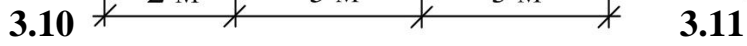
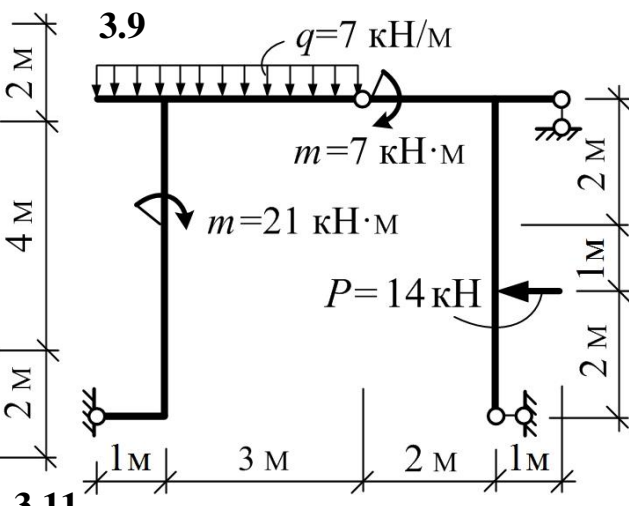
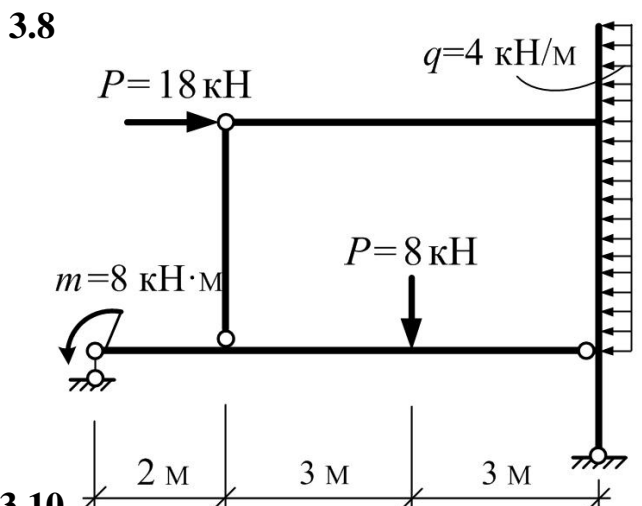
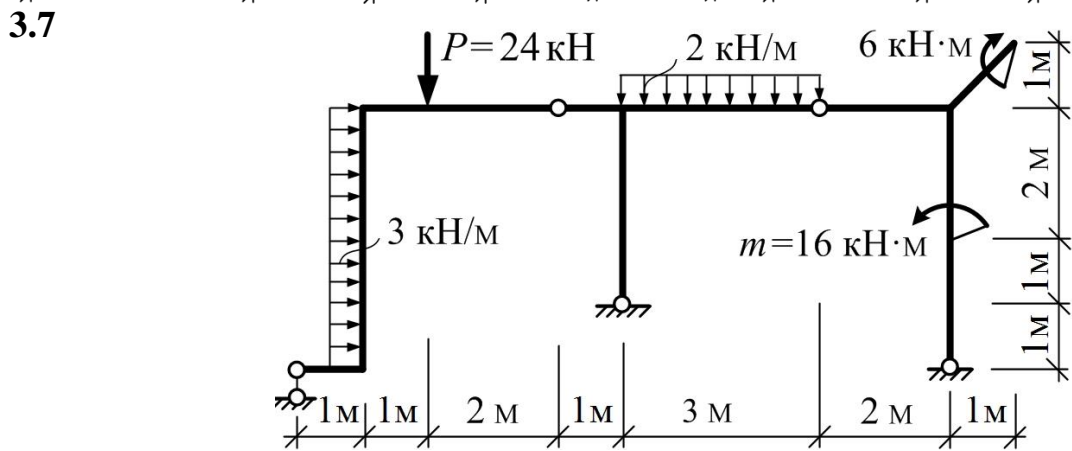
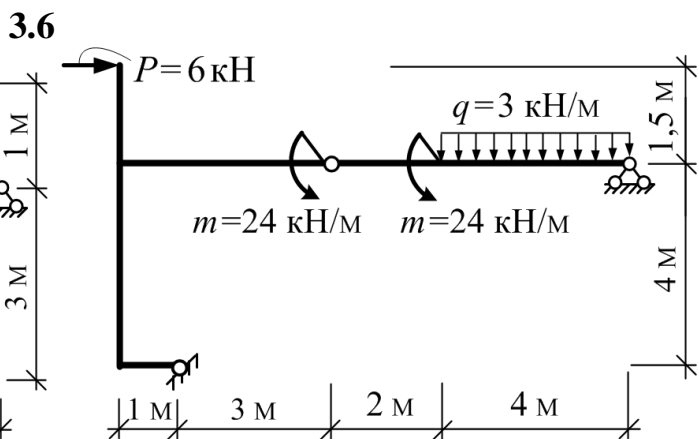
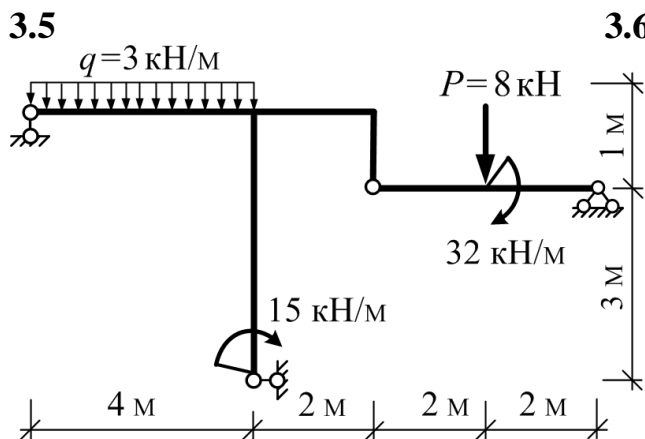
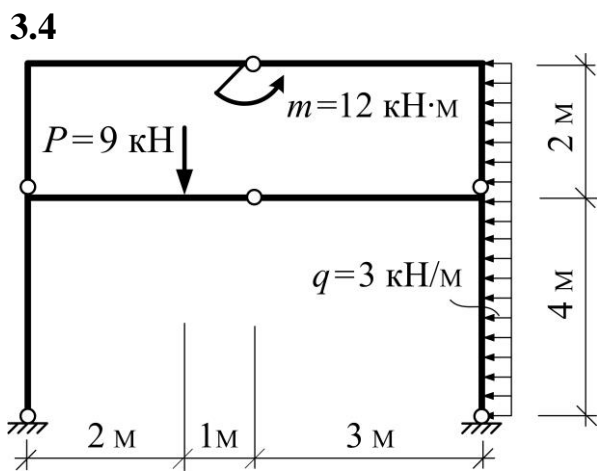
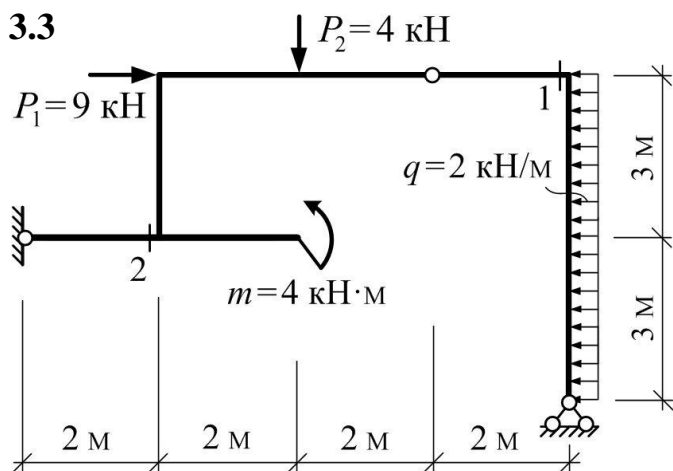
$$\Delta_{T,C} = \Delta_{2P} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_P ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2,4 \cdot 3}{2} \left(8 - \frac{1}{3} 18 \right) + \frac{4}{6EJ} (8 \cdot 2,4 - 4 \cdot 6 \cdot 1,2 + 0) = \frac{0,8}{EJ}.$$

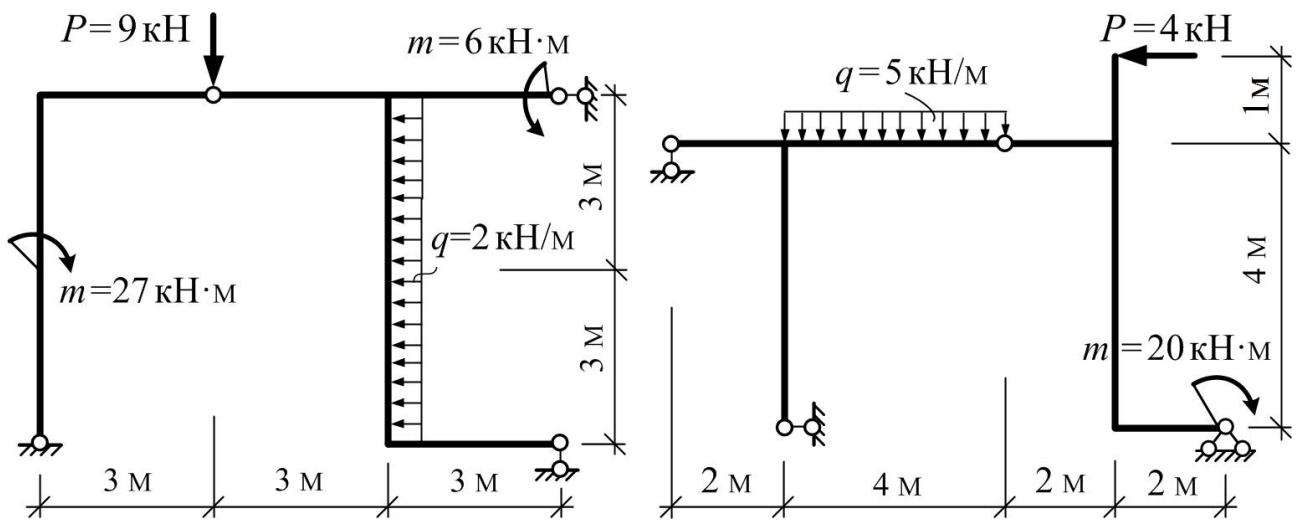
Узлы T и C сблизятся (приблизятся друг к другу).

3.11. Задачи для самостоятельного решения

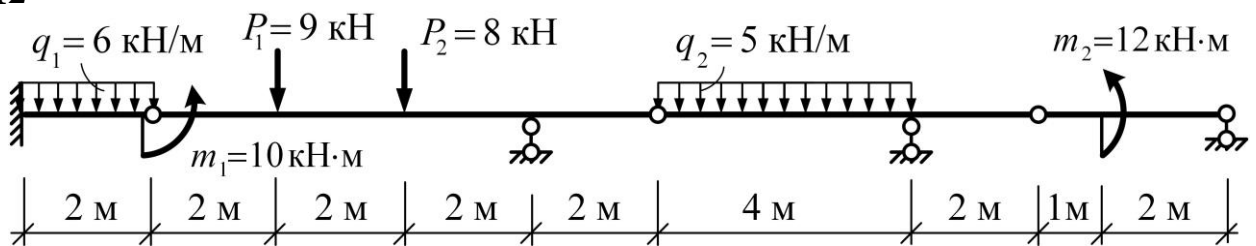
Построить эпюры M , Q и N в рамах (задачи 3.1–3.10) и в балке (задача 3.11).







3.12

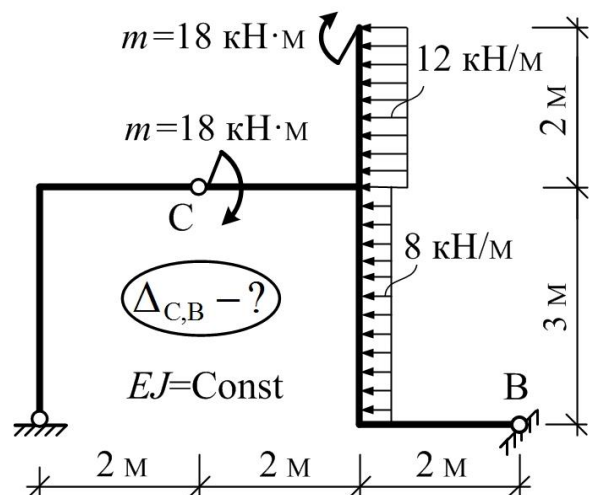
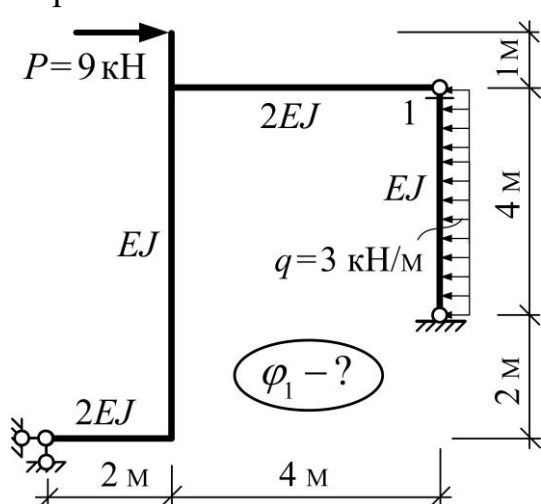


3.13. Определить горизонтальное перемещение точки B в раме, представленной в задаче 3.2 от действия приложенной там нагрузки, приняв жесткость всех стержней рамы постоянной ($EJ = \text{Const}$).

3.14. Определить взаимный угол поворота сечений 1 и 2 в раме, представленной в задаче 3.3 от действия приложенной там нагрузки, приняв жесткость всех стержней рамы постоянной ($EJ = \text{Const}$).

3.15. Определить угол поворота сечения 1 в раме, представленной внизу слева.

3.16. Определить взаимное сближение точек C и B в раме, представленной внизу справа.



Ответы на данные задачи по результатам их решения представлены в конце пособия в разделе «Ответы на задачи для самостоятельного решения» (с. 92–96).

СОДЕРЖАНИЕ

1. Основные понятия	3
1.1. Строительная механика и ее задачи	3
1.2. Расчетная схема сооружения	3
1.3. Нагрузки и воздействия на расчетные схемы	6
1.4. Классификация сооружений	6
1.5. Основные допущения, принципы и понятия	7
2. Кинематический анализ сооружений	7
3. Расчет статически определимых систем	19
3.1. Внутренние силы и их определение	19
3.2. Статически определимые рамы, их виды	22
3.3. Расчет простых рам	23
3.4. Особенности расчета трехшарнирных рам	31
3.5. Расчет многопролетных статически определимых балок	33
3.6. Определение усилий в фермах	37
3.7. Определение перемещений в изгибаемых системах	41
3.8. Задачи для самостоятельного решения	78
4. Расчет статически неопределимых рам методом сил	49
4.1. Идея метода сил	49
4.2. Степень статической неопределимости	50
4.3. Выбор основной системы метода сил	50
4.4. Система канонических уравнений метода сил	54
4.5. Вычисление коэффициентов и свободных членов уравнений	56
4.6. Проверки коэффициентов и свободных членов канонических уравнений	56
4.7. Решение системы канонических уравнений	57
4.8. Построение окончательных эпюр усилий и их проверки	57
4.9. Порядок расчета рам методом сил	60
4.10. Пример расчета	61
4.11. Задачи для самостоятельного решения	66
5. Расчет статически неопределимых рам методом перемещений	67
5.1. Подходы и допущения, положенные в основу метода перемещений	67
5.2. Определение степени кинематической неопределимости рам	68
5.3. Основная система метода перемещений	70
5.4. Канонические уравнения метода перемещений	71
5.5. Табличные эпюры метода перемещений	73
5.6. Построение единичных и грузовых эпюр в основной системе	77
5.7. Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода перемещений	79
5.8. Проверки коэффициентов и свободных членов канонических уравнений	82
5.9. Построение окончательных эпюр усилий и их проверки	83
5.10. Пример расчета	84
5.11. Задачи для самостоятельного решения	91
Список литературы, рекомендуемой для изучения дисциплины	91
Ответы на задачи для самостоятельного решения	92

Учебное издание

Игнатюк Валерий Иванович
Сыроквашко Иван Степанович

Строительная механика

Пособие

по дисциплине «Строительная механика»
для студентов строительных специальностей

Ответственный за выпуск Игнатюк В.И.
Редактор Боровикова Е.А.
Компьютерный набор и верстка Игнатюк В.И.
Корректор Никитчик Е.В.

Издательство БрГТУ.
Лицензия № от 09.01.2015.
Подписано к печати 03.01.2015. Формат 60×84/16.
Бумага Снегурочка. Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 5,83. Уч.-изд. л. 6,25. Тираж 200 экз.
Заказ № . Отпечатано на ризографе Учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, Брест, ул. Московская, 267.