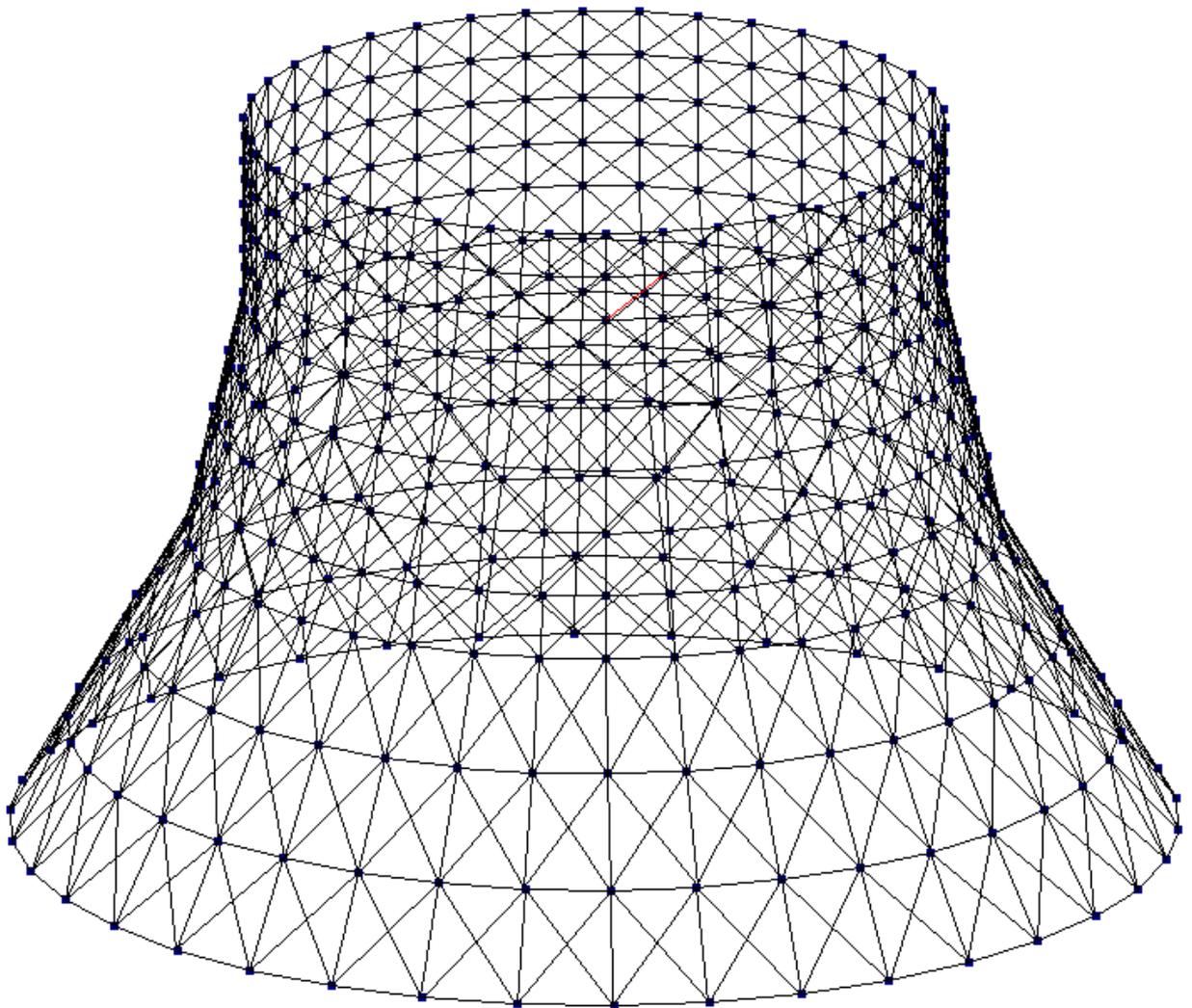


*В. И. Игнатюк*

---

**Метод**  
**конечных элементов**  
*в расчетах стержневых систем*



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования  
«Брестский государственный технический университет»

В. И. Игнатьюк

**МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
В РАСЧЕТАХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

Учебное пособие

Брест 2007

УДК 624.07(07)

ББК 38.5я73

И 26

**Р е ц е н з е н т ы:**

кафедра строительной механики Белорусского национального технического университета (заведующий кафедрой – доктор технических наук, профессор А.А. Борисевич);

заведующий кафедрой строительных конструкций, оснований и фундаментов Белорусского государственного университета транспорта – доктор технических наук, профессор И.А. Кудрявцев;

доцент кафедры «Строительная механика» Белорусского государственного университета транспорта – кандидат технических наук, доцент С.А. Воробьев.

**Игнатюк В. И.**

**И26    Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем: Учебное пособие.** – Брест: БГТУ, 2007. – 172 с.: ил.

ISBN

Изложены основы метода конечных элементов для расчета плоских и пространственных стержневых систем на статические нагрузки и основы их динамического расчета. Рассматривается расчет плоских стержневых систем – рам, балок, ферм и пространственных стержневых систем – систем перекрестных балок, пространственных ферменных структур и произвольных пространственных стержневых систем. Представлены теоретические основы метода, учебные компьютерные программы расчета для ПЭВМ, приведены примеры расчетов.

Для студентов вузов специальности “Промышленное и гражданское строительство”, может быть полезна аспирантам и работникам проектных организаций.

УДК 624.07(07)

ББК 38.5я73

© Игнатюк В. И., 2007

ISBN 978-985-493-076-3

© Издательство БГТУ, 2007

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы все более широкое использование в расчетах самых различных сооружений и конструкций находит метод конечных элементов (МКЭ). Этот метод является одним из основных и наиболее мощных инструментов численного исследования напряженно-деформированного состояния конструкций и сооружений при действии различных нагрузок и воздействий, что объясняется тем, что МКЭ позволяет решать задачи с очень большим числом неизвестных, возможностью высокой степени автоматизации всех процессов при использовании этого метода, особенно при использовании современной компьютерной техники, наличием ряда компьютерных программ, реализующих этот метод.

Метод конечных элементов позволяет производить расчеты самых сложных конструкций и сооружений, с его помощью можно более полно учесть (увеличивая число неизвестных) геометрические формы и реальные условия работы конструкций. При этом метод конечных элементов отличаются достаточная простота, физическая наглядность, высокая логичность и универсальность.

В учебной и научной литературе методу конечных элементов уделено большое внимание, однако в большинстве своем оно посвящено расчету континуальных систем [1, 3, 5, 10, 11, 14, 16, 18, 21, 23, 25]. Вопросы же расчета методом конечных элементов стержневых систем, на которых проще всего познавать и изучать этот метод, изложены в большинстве литературы [4, 12, 13, 14, 20, 22] кратко, отсутствует необходимая детализация, достаточное число примеров расчета, анализ особенностей применения метода, в том числе с использованием ЭВМ.

Данное учебное пособие написано с целью оказания помощи в изучении основ метода конечных элементов в применении к расчету плоских и пространственных стержневых систем. На их примерах обсуждаются принципы метода конечных элементов и получены зависимости, которые справедливы в большинстве случаев и для континуальных систем. Рассматриваются особенности расчета различных видов плоских (балок, ферм, рам) и пространственных (систем перекрестных балок, пространственных ферм, структур, произвольных рамных си-

стем) стержневых систем. Рассматривается также расчет таких систем методом конечных элементов с использованием ряда программ для ПЭВМ. Материал в пособии излагается по схеме – последовательно от простого ко все более сложному, что, по мнению автора, должно способствовать пониманию и усвоению метода расчета в процессе его изучения.

Учебное пособие написано на базе курса лекций по дисциплине «Современные методы расчета сложных строительных систем», читаемого в Брестском государственном техническом университете для специальности 70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» со специализацией 70 02 01 02 «Конструкции зданий и сооружений».

Автор выражает глубокую благодарность и признательность рецензентам учебного пособия – кафедре «Строительная механика» Белорусского национального технического университета, заведующему этой кафедрой, доктору технических наук, профессору А.А. Борисевичу, заведующему кафедрой «Строительные конструкции, основания и фундаменты» Белорусского государственного университета транспорта, доктору технических наук, профессору И.А. Кудрявцеву и доценту кафедры «Строительная механика» Белорусского государственного университета транспорта, кандидату технических наук, доценту С.А. Воробьеву – за большое внимание к рукописи, за полезные замечания, сделанные при рецензировании, и за ценные советы, которые помогли устранить многие недостатки изложения.

# 1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ И ПОДХОДЫ В МКЭ

## 1.1. Основные положения и принципы

Сущность метода конечных элементов (МКЭ) отражается в его названии и заключается при его использовании в разделении конструкций и сооружений тем или иным способом на ряд частей, отдельных элементов достаточной конфигурации – конечных элементов. Размеры этих элементов обычно малы по сравнению с размерами всей конструкции, сооружения, но имеют конечные значения. В этом основное отличие метода конечных элементов от методов теории упругости, где при составлении разрешающих уравнений тело делится на бесконечно малые элементы и его поведение описывается системой дифференциальных зависимостей. В МКЭ сооружение делится на элементы конечной величины и описывается системой алгебраических уравнений.

Конечные элементы (КЭ) предварительно должны быть рассмотрены отдельно – определяются точки и способы взаимодействия конечных элементов между собой и зависимости между параметрами взаимодействия в этих точках и поведением конечных элементов во внутренних их областях, то есть должно быть подробно исследовано напряженно-деформированное состояние конечных элементов.

Связь конечных элементов между собой описывается уравнениями равновесия и условиями неразрывности перемещений.

Таким образом, конструкция или сооружение, имеющие бесконечное число степеней свободы, в методе конечных элементов заменяется системой с конечным числом степеней свободы. При этом замена исходной конструкции совокупностью дискретных элементов подразумевает равенство энергий этой конструкции и ее дискретной модели, на которой базируется получение основных разрешающих уравнений метода.

При использовании метода конечных элементов следует четко различать три группы уравнений:

- 1) статические, устанавливающие связь между узловыми нагрузками (внешними силами) и узловыми усилиями (внутренними силами);
- 2) физические, связывающие между собой внутренние силы и деформации элементов;
- 3) геометрические, описывающие связь между деформациями элементов и узловыми перемещениями.

Полученная дискретная модель сооружения, конструкции, как система взаимосвязанных между собой конечных элементов, описывается системой урав-

нений высокого порядка. Для исключения части искомых параметров и уменьшения порядка разрешающих уравнений можно использовать классические методы строительной механики – метод перемещений, метод сил или смешанный метод. В зависимости от принятого метода и неизвестных метод конечных элементов может реализовываться в трех формах:

**1. В форме метода перемещений.** За основные неизвестные здесь принимаются перемещения узлов. Для их определения составляются уравнения равновесия узловых точек. Узловые усилия, входящие в эти уравнения, выражаются с помощью матриц жесткости через узловые перемещения. В результате для определения основных неизвестных – перемещений узлов – получаем систему неоднородных алгебраических уравнений.

**2. В форме метода сил.** За основные неизвестные принимаются узловые усилия взаимодействия между конечными элементами. Для их определения составляются уравнения совместности перемещений в узловых точках. Компоненты узловых перемещений выражаются через узловые усилия. В результате получаем систему алгебраических уравнений относительно узловых усилий.

**3. В форме смешанного метода,** в которой неизвестными частично принимаются перемещения узлов, а частично узловые усилия взаимодействия конечных элементов.

Чаще всего порядок системы уравнений в МКЭ в форме метода сил оказывается выше, чем в форме метода перемещений, а получение ряда зависимостей в форме метода перемещений проще, чем в форме метода сил. Поэтому при расчете конструкций и сооружений чаще используется МКЭ в форме метода перемещений, как более универсальный и удобный [14, 16, 21], и поэтому далее в пособии будет рассматриваться только эта форма метода конечных элементов, то есть МКЭ в форме метода перемещений.

В методе конечных элементов принята векторно-матричная форма представления всех величин, уравнений и выполнения операций. Основными понятиями и величинами в МКЭ являются **вектор узловых перемещений**, **вектор узловых нагрузок** (узловых внешних сил) и **матрица жесткости**, записываемые как для всей системы, так и для отдельных конечных элементов. Матрица жесткости системы связывает между собой вектор узловых перемещений и вектор узловых нагрузок системы. Матрица жесткости конечного элемента связывает перемещения его концов и реактивные усилия по его концам. Эта матрица квадратная, симметрична относительно главной диагонали, а размер ее соответствует числу неизвестных перемещений узлов системы (конечного элемента), то есть числу степеней свободы системы (КЭ).

Учитывая матричную форму выполнения операций, все записи в МКЭ должны быть четкими, однозначными и понятными. Векторы-столбцы (вектора) величин будем обозначать фигурными скобками. Например, векторы нагрузок и перемещений для узла в пространстве имеют вид

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix}; \quad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix}. \quad (1.1)$$

Величины внешних узловых сил и усилий, которые по своему действию могут быть и силами, и моментами, а также величины перемещений, которые могут быть и линейными, и угловыми, обычно обозначают одним символом с соответствующим цифровым индексом. Так, в выражениях (1.1)  $P_1$  соответствует  $P_x$ ,  $P_2$  соответствует  $P_y$ ,  $P_3 \rightarrow P_z$ ,  $P_4 \rightarrow M_x$  и т.д.; аналогично  $\Delta_1$  соответствует  $\Delta_x$ ,  $\Delta_2 \rightarrow \Delta_y$ ,  $\Delta_3 \rightarrow \Delta_z$ ,  $\Delta_4 \rightarrow \varphi_x$  и т. д. Важным здесь является и порядок нумерации – один и тот же номер индекса должен соответствовать усилию, перемещению подобного типа в направлении соответствующей оси.

Матрицы жесткости, являющиеся квадратными матрицами, будем обозначать квадратными скобками –  $[K]$ .

Первым шагом на пути определения векторов сил и перемещений является задание узловых точек и их расположения относительно некоторых координатных осей. В методе конечных элементов следует различать глобальные (общие) и локальные (местные) системы координат. **Глобальная (общая)** система координат задается для всей конструкции, включающей все конечные элементы, на которые эта конструкция разделена. **Локальные (местные)** системы координат связываются с отдельными конечными элементами и для каждого конечного элемента будут своими.

Так как конечные элементы в конструкции различным образом ориентированы друг относительно друга, то и локальные оси координат также будут различно ориентированы. Начало координат локальных осей принимается обычно в одном из узлов КЭ, при этом ось  $x'$  направляется по стержню от начала к концу – для стержневых КЭ (рис. 1.1а), либо по направлению одной из сторон, граней – для плоских и пространственных КЭ (рис. 1.1б). Во всех системах координат будем использовать правую систему декартовых координат.

Глобальные оси координат далее будем обозначать буквами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  без

штрихов и индексов, а локальные оси – теми же буквами, но со штрихами –  $x', y', z'$ , а также часто и с индексами внизу –  $x_s', y_s', z_s'$ , указывающими к какому КЭ ( $s$ -ому) эта локальная (местная) система координат относится (рис. 1.1). Если для конечного элемента будет рассматриваться только одна из координатных систем и будет однозначно понятно, что это локальная координатная система, то в ряде случаев для простоты и наглядности получаемых зависимостей будем опускать штрихи для локальной системы координат.

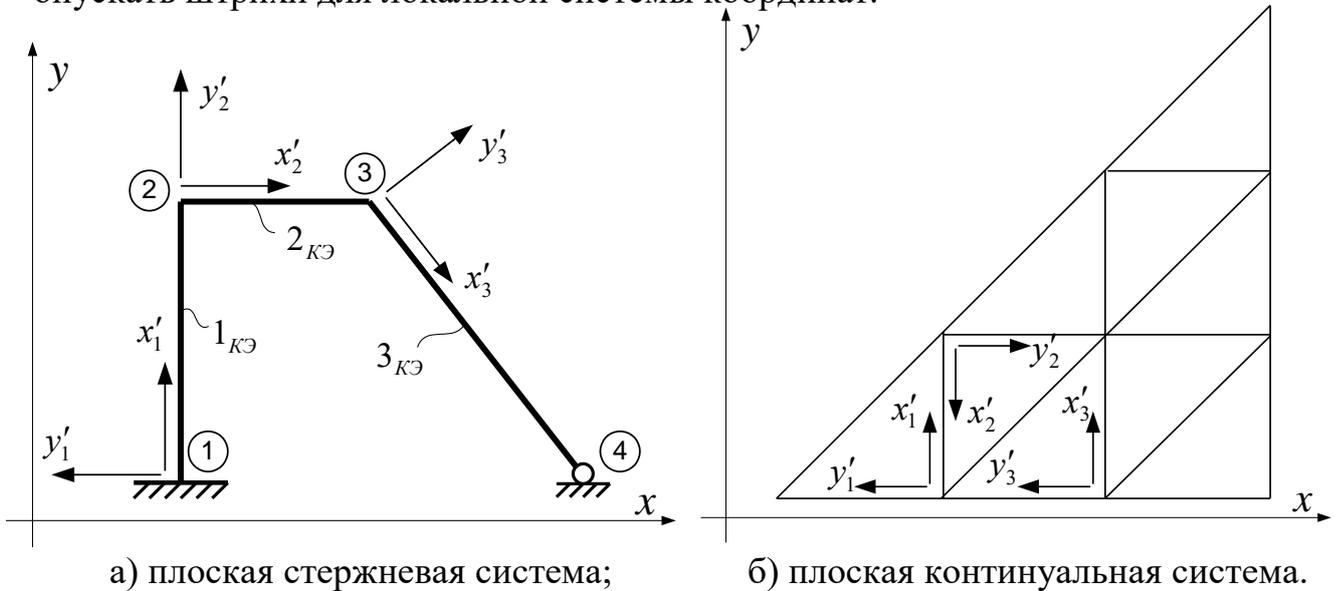


Рис. 1.1

Зная положение осей глобальной и локальной систем координат, несложно преобразовать зависимости из одной системы координат в другую, что далее нужно будет делать и будет выполняться.

Отметим также, что перемещения узлов дискретной модели в глобальной системе координат будем обозначать большой буквой  $\Delta$ , а перемещения узлов для конечных элементов в глобальных системах координат – малой буквой  $\delta$  без штриха, а в локальной системе координат этой же буквой со штрихом –  $\delta'$ .

## 1.2. Основные этапы расчета

При использовании МКЭ можно выделить следующие этапы расчета:

1. Дискретизация расчетной схемы конструкции, сооружения, то есть ее разбиение (разделение) на конечные элементы той или иной формы и выбор узлов соединения КЭ между собой, перемещения которых принимаются за основные неизвестные метода конечных элементов. От количества КЭ, их формы и выбора мест их соединения (узлов) часто в очень большой степени зависит как трудоемкость расчета, так и его точность.

2. Рассмотрение отдельно каждого конечного элемента – определение зави-

симостей перемещений в области конечных элементов от перемещений их узлов, являющихся неизвестными МКЭ, и на основе физических соотношений составление матриц жесткости КЭ. Это важный этап, определяющий точность расчета.

Поле перемещений в каждом конечном элементе представляется через систему аппроксимирующих функций, выраженных через перемещения в узловых точках. Деформации и напряжения в элементе могут быть представлены через узловые перемещения, если аппроксимирующие функции подставить в геометрические соотношения, а их, в свою очередь, – в зависимости, характеризующие свойства материала.

Поведение того или иного элемента при деформировании описывается уравнениями, связывающими перемещения и силы в узловых точках. Эти уравнения получаются обычно с использованием принципа Лагранжа или эквивалентного ему условия минимума полной потенциальной энергии. В результате получаем и, так называемые, матрицы жесткости элементов, через которые и выражается связь узловых перемещений и усилий.

3. Соединение конечных элементов в общий “ансамбль”, как можно более точно имитирующий заданную систему и ее работу. Для этого необходимо все конечные элементы системы объединить в единое целое, для чего используются условия равенства узловых перемещений соседних элементов, которые позволяют получить уравнения, характеризующие жесткостные свойства всей системы и в результате включающие в себя общую (глобальную) матрицу жесткости системы. Число неизвестных в этих уравнениях равно числу искомым перемещений в узловых точках. Получение этих уравнений может быть выполнено и при использовании вариационного принципа Лагранжа или минимизации потенциальной энергии всей системы.

4. Решение системы уравнений метода конечных элементов и определение основных неизвестных метода – перемещений узлов дискретной модели системы (при использовании метода конечных элементов в форме метода сил определяются усилия взаимодействия между конечными элементами).

5. Определение внутренних усилий в каждом из конечных элементов и соответственно во всей системе. Выполняется на основе полученных перемещений узлов системы и соответственно перемещений узлов конечных элементов с использованием матриц жесткости конечных элементов и аппроксимирующих функций для перемещений внутри конечных элементов.

### 1.3. Расчетная дискретная модель системы

Дискретизация расчетной схемы сооружения, конструкции является первым шагом на пути к решению задачи. Искусство разбиения системы на конечные элементы зависит от имеющегося опыта, инженерного понимания структуры и работы системы [21]. Несовременное разбиение будет приводить к значительным погрешностям расчета, если даже все остальные этапы метода выполнены с достаточной точностью.

Использование слишком мелких элементов, хотя, как правило, и повышает точность, но приводит к увеличению общей трудоемкости расчета. Об этом следует всегда помнить, хотя современная компьютерная техника позволяет решать системы больших порядков достаточно быстро и точно. В областях системы, где ожидается резкое изменение параметров напряженно-деформированного состояния, следует применять более мелкую сетку конечных элементов. Там же, где ожидаемый результат должен изменяться по области сравнительно слабо, можно использовать при дискретизации более крупные конечные элементы.

Выбор типа и формы конечных элементов, а также числа их узловых точек зависит [3, 5, 21] от характера рассматриваемой задачи и от требуемой точности решения. Так, в расчетах стержневых конструкций и сооружений они разбиваются на одномерные конечные элементы, являющиеся по существу обычными стержнями, которые соединяются между собой по концам в узлах. При этом, если рассматривать, например, плоскую ферму с шарнирным соединением стержней в узлах (рис. 1.2) при действии узловых нагрузок, то за конечные элементы могут быть приняты стержни такой фермы (рис. 1.5а), которые будут работать только на растяжение-сжатие, а каждый узел дискретной модели будет

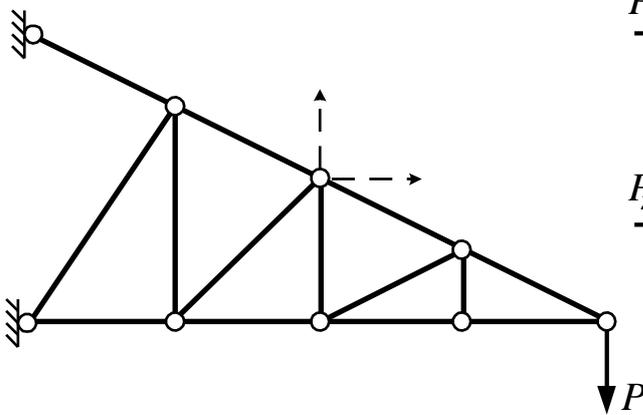


Рис. 1.2

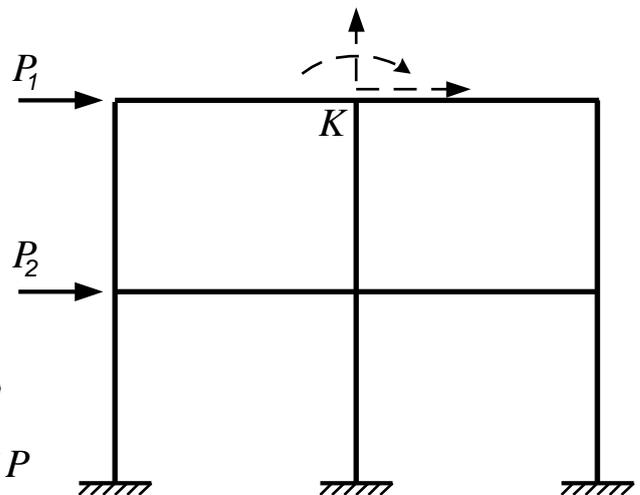


Рис. 1.3

иметь по два независимых линейных перемещения (на рис. 1.2 для одного из узлов обозначены пунктирными стрелками), которые и принимаются за неизвестные МКЭ; при этом дискретная модель будет подобна реальной конструкции.

Для узлов пространственных ферм будем иметь три перемещения; при этом конечный элемент здесь будет также работать, естественно, только на растяжение-сжатие (см. рис. 1.5б).

Если стержни фермы на рис. 1.2 будут соединены между собой в узлах жестко, также как, например, в рамах на рис. 1.1а или на рис. 1.3, то общий вид дискретной модели в целом также остается прежним, но характер взаимодействия между стержнями (конечными элементами) в узловых точках усложняется – в узлах дополнительно в качестве неизвестных появляются углы поворота узлов (см. узел *K* на рис. 1.3); конечные элементы для таких систем имеют вид, представленный на рис. 1.5в, и в них наряду с продольными усилиями появляются изгибающие моменты и поперечные силы.

В каждом из узлов пространственной стержневой системы (см., например, рис. 1.4) будет уже шесть неизвестных перемещений – три линейных перемещения узлов и три угла поворота их относительно трех взаимно перпендикулярных осей (для одного из узлов обозначены пунктирными стрелками).

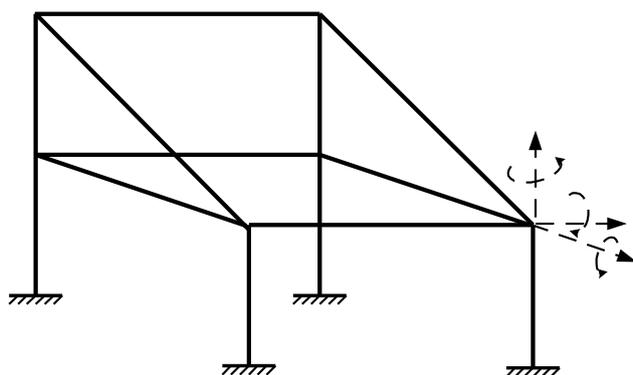


Рис. 1.4

Общее число неизвестных резко возрастает. Конечный элемент пространственной стержневой системы показан на рис. 1.5г, и в сечениях его будут возникать продольные силы, крутящие моменты, изгибающие моменты и поперечные силы в двух плоскостях  $x'z'$  и  $y'z'$ .

При решении плоских задач теории упругости (плоское напряженное состояние) разбиение области производится обычно на плоские четырехугольные либо треугольные конечные элементы; в каждом из узлов дискретной модели и конечных элементов здесь рассматривается обычно по два линейных перемещения (рис. 1.1б, 1.5д и 1.5е).

При решении задач изгиба пластин принимаются тонкие плоские прямоугольные или треугольные конечные элементы (рис. 1.5ж), а для оболочек – оболочечные конечные элементы (рис. 1.5з). Для трехмерных массивных тел в качестве конечных элементов могут приниматься пирамиды, тетраэдры, прямоугольные параллелепипеды и т.д. (см. например, рис. 1.5и, к). Число неизвест-

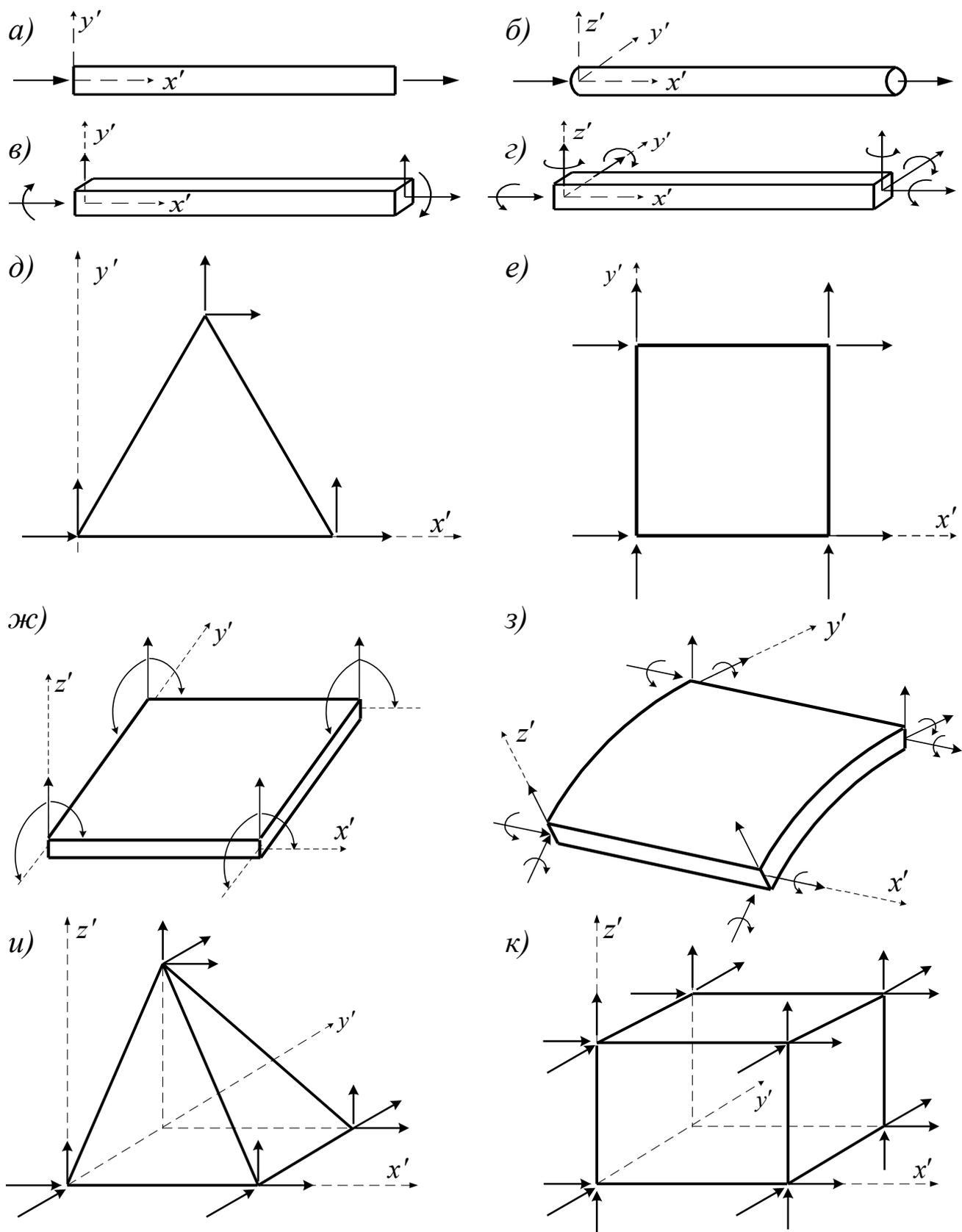


Рис. 1.5. Основные виды конечных элементов:

а, б) ферменные плоский и пространственный; в, г) стержневые плоский и пространственный; д, е) плосконапряженные треугольный и прямоугольный; ж) изгибаемый пластинчатый; з) тонкостенный оболочечный; и, к) сплошные трехмерные.

ных перемещений в узлах дискретных моделей таких систем зависит от характера решаемых задач.

При замене рассматриваемой конструкции, сооружения совокупностью дискретных элементов необходимо стараться обеспечить как можно большую идентичность в работе и поведении конструкции и ее дискретной модели. Для некоторых конструкций можно подобрать такую дискретную модель, которая будет точно описывать (естественно, в рамках принятых гипотез и предположений) поведение исходной конструкции. Это характерно для конструкций, которые по своей структуре состоят из отдельных элементов с дискретным соединением их между собой. И в первую очередь это, конечно, относится к стержневым системам как плоским, так и пространственным.

Если же в реальной конструкции вдоль границ конечных элементов имеются непрерывные связи между собой, а при построении дискретной модели мы принимаем соединение этих элементов друг с другом только в узлах, то дискретная модель будет только приближенно отражать поведение исходной конструкции. Степень соответствия (или адекватность) расчетной модели и самой конструкции при этом зависит от многих факторов, о которых уже говорилось и о которых здесь не упоминалось. Достижение точного результата в таких случаях не просто, и чаще всего речь идет о максимально возможном приближении к точному результату. Поэтому для таких задач необходимо рассматривать вопросы сходимости решений и искать пути повышения этой сходимости [3, 5, 11, 14].

#### **1.4. Аппроксимация перемещений**

Одной из наиболее ответственных и важных операций метода конечных элементов является построение интерполирующих функций для отображения зависимости перемещений внутри области конечного элемента через величины узловых перемещений [3, 5, 21]. Необходимо выбрать (найти) такие аппроксимирующие функции перемещений, на основе которых при учете граничных условий можно получить выражения для перемещений, как можно более точно описывающие напряженно-деформированное состояние конечного элемента.

Аппроксимирующими функциями перемещений следует задаваться так, чтобы:

- а) удовлетворялись граничные условия для конечных элементов;
- б) число неизвестных констант равнялось числу узловых перемещений для конечных элементов;

в) изменение перемещений и усилий внутри элемента было максимально близким к действительному;

г) не было разрывов перемещений и усилий на границах между конечными элементами, или по крайней мере эти разрывы были как можно меньшими.

Удовлетворение граничных условий предполагает, что при подстановке в аппроксимирующие функции координат границ элементов перемещения будут отвечать тем связям, которые имеются на концах элементов, то есть по направлениям опорных связей соответствующие перемещения должны быть равны нулю, при отсутствии связей перемещения наоборот должны быть (не должны равняться нулю), а нулю должны равняться изгибающий момент, поперечная и продольная силы (при отсутствии соответствующих сосредоточенных нагрузок), и т. п.

Условия неразрывности легко выполняются в случае одномерных тел (стержни, балки), для которых границами разделяющими конечные элементы, являются только узлы (а точнее – проходящие через них плоские поперечные сечения). В случаях двухмерных и трехмерных тел, когда границами деления элементов являются линии, плоскости или поверхности, кинематические граничные условия сопряжения элементов в зонах между точками, в которых устанавливаются узлы соединения КЭ между собой, совпадают не всегда. Для повышения точности, то есть для более точного удовлетворения кинематических условий сопряжения элементов, иногда узлы соединения КЭ устанавливают не только в угловых точках элементов, но и на гранях или внутри граничных плоскостей элементов. Для этой же цели в узлах модели требуют удовлетворения не только кинематических условий (условий непрерывности перемещений – линейных и угловых), но и условий непрерывности некоторых старших производных от перемещений, например, производных, входящих в выражения для напряжений, если по условиям задачи известно, что напряжения в рассматриваемых областях являются непрерывными функциями. Такие подходы повышают точность и кинематических (по перемещениям), и статических (по усилиям) условий сопряжения конечных элементов в системе.

Ниже приведены аппроксимирующие функции перемещений внутри конечных элементов через перемещения принятых для них узловых точек (узлов)  $\delta_i$  для ряда наиболее распространенных конечных элементов, которые широко используются для решения упругих задач строительной механики и теории упругости (оси местной системы координат и перемещения в местной системе координат здесь представлены без штрихов):

1. Стержневой элемент, работающий на растяжение-сжатие:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x; \quad (1.2)$$

Рис. 1.6

2. Плоский балочный элемент (работающий только на поперечные нагрузки):

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3; \quad (1.3)$$

$$\varphi = \frac{dw}{dx} = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2;$$

Рис. 1.7

3. Плоский стержневой элемент, работающий и на изгиб, и на растяжение-сжатие:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x;$$

$$w = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3; \quad (1.4)$$

$$\varphi = \frac{dw}{dx} = \alpha_4 + 2\alpha_5 x + 3\alpha_6 x^2;$$

Рис. 1.8

4. Пространственный стержневой элемент, работающий на растяжение-сжатие, изгиб и кручение:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x;$$

$$w = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3;$$

$$v = \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 x^2 + \alpha_{10} x^3;$$

$$\theta = \alpha_{11} + \alpha_{12} x; \quad (1.5)$$

$$\varphi_y = \frac{dw}{dx} = \alpha_4 + 2\alpha_5 x + 3\alpha_6 x^2;$$

$$\varphi_z = \frac{dv}{dx} = \alpha_8 + 2\alpha_9 x + 3\alpha_{10} x^2,$$

Рис. 1.9

где  $u = u(x)$  – перемещение сечений стержня вдоль оси  $x$ ;

$\theta = \theta(x)$  – угол закручивания стержня относительно оси  $x$ ;

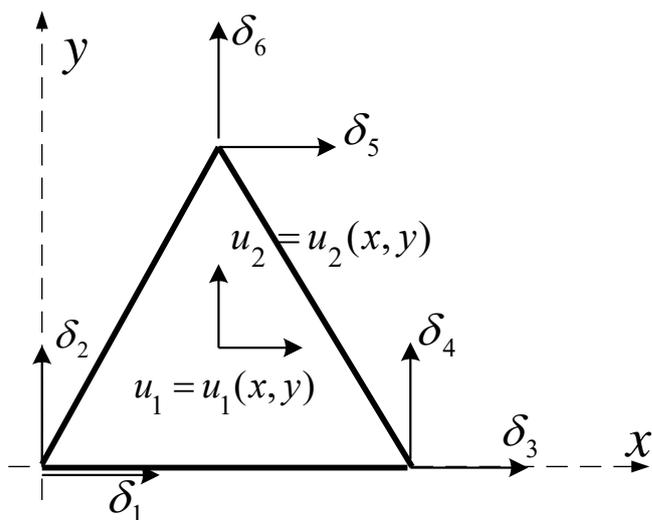
$w = w(x)$  – прогибы стержня в плоскости  $xz$ ;

$v = v(x)$  – прогибы стержня в плоскости  $xу$ ;

$\varphi_y(x), \varphi_z(x)$  – повороты сечений стержня при изгибе относительно осей

$у$  и  $z$  соответственно.

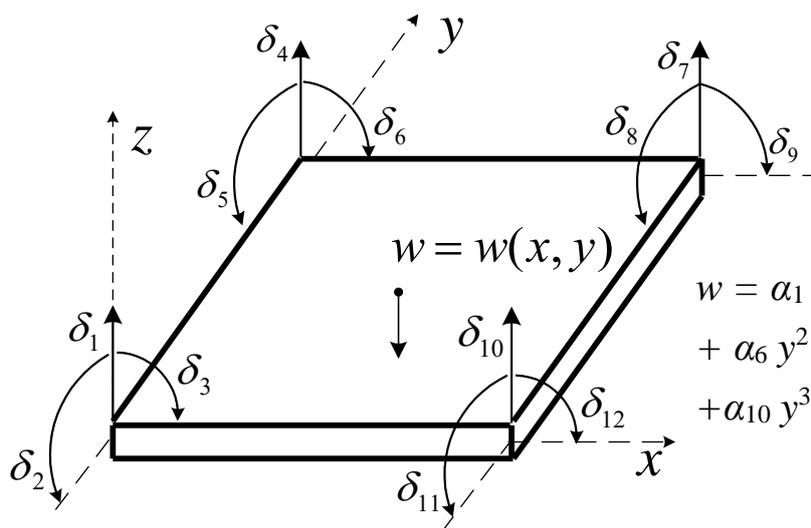
5. Плоский треугольный элемент, работающий на растяжение-сжатие:



$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \\ u_2 &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Рис. 1.10

6. Прямоугольный элемент изгибаемой пластины:



$$\begin{aligned} w &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \\ &+ \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \\ &+ \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Рис. 1.11

## 2. Расчет методом конечных элементов плоских стержневых систем

### 2.1. Расчетная дискретная модель

Для стержневых систем разбивку конструкции на конечные элементы при переходе от заданной системы к расчетной дискретной модели будем осуществлять так, чтобы (рис. 2.1):

- конечные элементы были как можно более простыми и однотипными – обычно это прямолинейный стержень конечной длины;
- жесткостные параметры в пределах длины каждого элемента оставались постоянными;
- внешние сосредоточенные нагрузки (силы и моменты) действовали только в узлах соединения конечных элементов;
- распределенные равномерно либо по трапециидальному закону нагрузки действовали по всей длине рассматриваемого конечного элемента.

Если на некотором стержне жесткость или интенсивность распределенной нагрузки имеют переменный характер по его длине, то этот стержень разбивают на несколько участков (конечных элементов), на каждом из которых жесткость стержня считается постоянной, а интенсивность нагрузки принимается распределенной равномерно либо по трапециидальному закону. При достаточном количестве участков такой стержень можно хорошо аппроксимировать системой рассматриваемых конечных элементов.

Внешние нагрузки (сосредоточенные силы и распределенные нагрузки) на расчетной дискретной модели обычно представляются в виде двух составляющих, действующих в направлениях осей  $x$  и  $y$  общей системы координат.

Конечные элементы, одинаковые или разные по форме и размерам, связываются между собой в точках, расположенных на границах КЭ и называемых узловыми точками (узлами).

За узлы дискретной расчетной стержневой модели в соответствии с выше сказанным принимаются:

- точки излома и соединения (разветвления) стержневых систем;
- точки приложения сосредоточенных внешних воздействий (сил, моментов);
- точки начала и конца внешних распределенных нагрузок;
- точки изменения жесткостных характеристик стержней.

Если заданная система содержит криволинейные стержни, то каждый из них целесообразно заменить ломаным стержнем, то есть набором прямолинейных стержневых конечных элементов, соединенных последовательно друг с

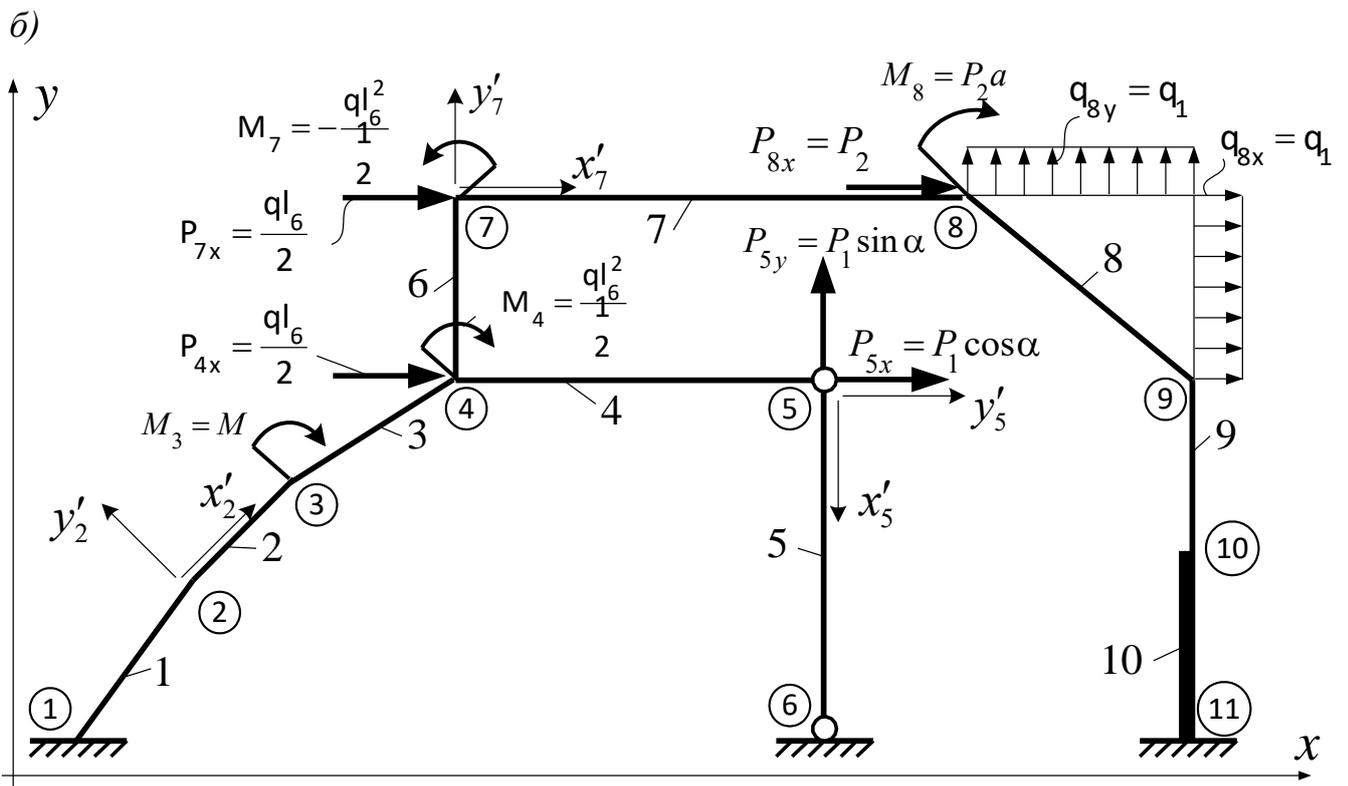
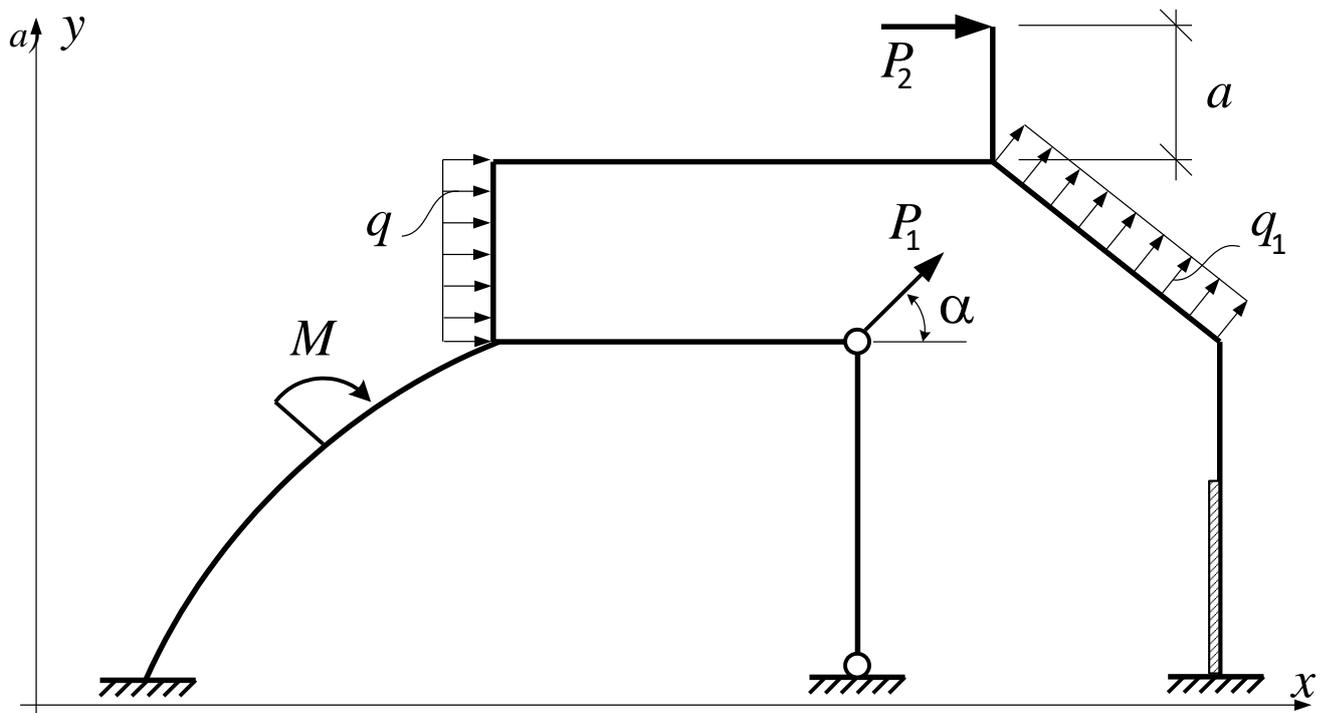


Рис. 2.1. Расчетная схема рамы (а) и ее дискретная модель (б)

Обозначено: ①, ②, ..., ⑪ – номера узлов (число узлов –  $n = 11$ );  
 1, 2, ..., 10 – номера стержней (конечных элементов) (число КЭ = 10).

другом (см. рис. 2.1 б). Число заменяющих прямолинейных конечных элемен-

тов принимается таким, чтобы криволинейный стержень аппроксимировался с достаточной для практики точностью.

Заметим также, что в случае, если заданная система включает в себя статически определимые части (например, прямолинейные или ломаные консоли и т.п.), внутренние усилия в сечениях которых несложно определить методами расчета статически определимых систем, то при переходе к расчетной дискретной модели системы эти части можно и целесообразно отбросить, заменив их действие на остальную конструкцию соответствующими усилиями (см. рис. 2.1б), которые по отношению к ней далее будут выступать в качестве внешних нагрузок.

В расчетах плоских стержневых систем методом конечных элементов можно выделить четыре основных типа стержневых конечных элементов, отличающихся друг от друга способами присоединения их концов к узловым точкам, то есть условиями закрепления концов (рис. 2.2).

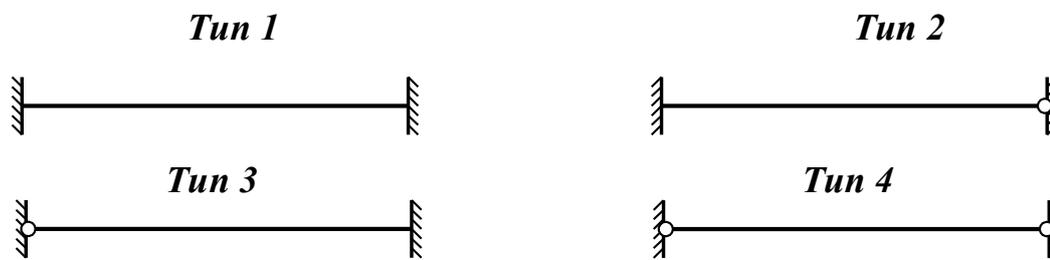


Рис. 2.2

В методе конечных элементов в перемещениях, как уже указывалось, за неизвестные принимаются перемещения узлов, в которых соединяются конечные элементы в соответствии с расчетной моделью. Решение задачи МКЭ состоит в определении перемещений этих узлов, которые будут определять как соответствующие им реакции узлов, так и внутренние усилия в конечных элементах. Расчет же каждого из конечных элементов на перемещения ограничивающих его узлов можно выполнить, как будет показано ниже, отдельно.

## 2.2. Напряженно-деформированное состояние плоского стержневого конечного элемента

Жесткий узел на плоскости имеет три степени свободы и соответственно три перемещения – два линейных и одно угловое (угол поворота). Соответственно плоский стержневой КЭ в общем случае имеет по концам шесть независимых перемещений – по три в начальном и конечном узлах (рис. 2.3). **Положительными направлениями для перемещений** здесь и далее приняты:

для линейных перемещений – направления, совпадающие с направлениями осей координат, для угла поворота – по часовой стрелке. Конечный элемент здесь будем рассматривать в местной системе координат (штрихи в обозначениях осей, перемещений и усилий опустим).

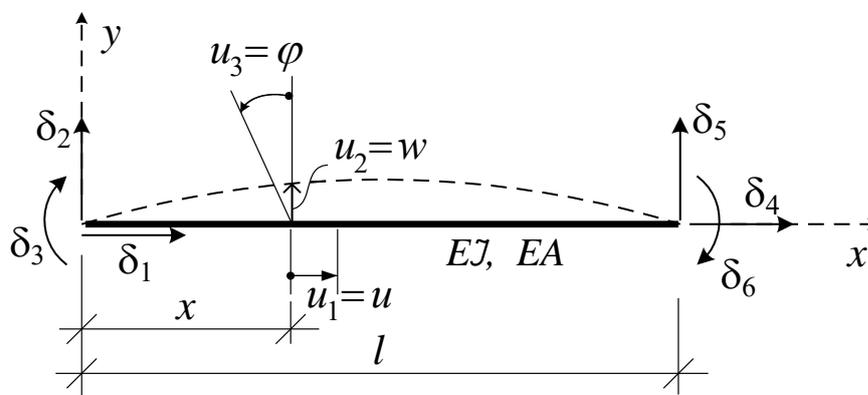


Рис. 2.3

Аппроксимация перемещений внутри элемента для рассматриваемого КЭ выполняется выражениями (1.4):

$$\begin{aligned} u_1 = u &= \alpha_1 + \alpha_2 x; \\ u_2 = w &= \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3; \\ u_3 = \varphi &= \frac{du_2}{dx} = \alpha_4 + 2\alpha_5 x + 3\alpha_6 x^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

С учетом соединения плоских стержневых конечных элементов между собой в узлах может быть четыре типа КЭ (см. рис. 2.2).

Получим зависимости для перемещений внутри КЭ, например, для элемента типа 1, жестко соединяемого по концам в узлах. Граничными условиями для такого элемента будут:

$$\begin{array}{ll} \text{а) при } x=0 & u = \delta_1; \\ & w = \delta_2; \\ & \varphi = -\delta_3; \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{б) при } x=l & u = \delta_4; \\ & w = \delta_5; \\ & \varphi = -\delta_6. \end{array} \quad (2.2)$$

Подставив эти граничные условия в (2.1), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \delta_1 = \alpha_1; \\ \delta_2 = \alpha_3; \\ -\delta_3 = \alpha_4; \\ \delta_4 = \alpha_1 + \alpha_2 l; \\ \delta_5 = \alpha_3 + \alpha_4 l + \alpha_5 l^2 + \alpha_6 l^3; \\ -\delta_6 = \alpha_4 + 2\alpha_5 l + 3\alpha_6 l^2. \end{cases} \quad (2.3)$$

решая которую, найдем значения коэффициентов  $\alpha_i$ :

$$\alpha_1 = \delta_1; \quad \alpha_2 = \frac{\delta_4 - \delta_1}{l}; \quad \alpha_3 = \delta_2; \quad \alpha_4 = -\delta_3; \quad (2.4)$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{l^2}(-3\delta_2 + 2\delta_3 l + 3\delta_5 + \delta_6 l); \quad \alpha_6 = \frac{1}{l^3}(2\delta_2 - 3\delta_3 l - 2\delta_5 - \delta_6 l).$$

Подставляя эти выражения в (2.1) и выполнив группировку слагаемых с одинаковыми  $\delta_i$ , получим выражения для перемещений внутри КЭ через перемещения узлов в виде:

$$u_1 = \Phi_1 \delta_1 + \Phi_4 \delta_4; \quad u_2 = \Phi_2 \delta_2 + \Phi_3 \delta_3 + \Phi_5 \delta_5 + \Phi_6 \delta_6; \quad (2.5)$$

$$u_3 = \frac{d\Phi_2}{dx} \delta_2 + \frac{d\Phi_3}{dx} \delta_3 + \frac{d\Phi_5}{dx} \delta_5 + \frac{d\Phi_6}{dx} \delta_6;$$

где

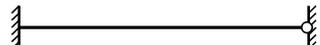
$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= 1 - \frac{x}{l}; & \Phi_2(x) &= 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}; \\ \Phi_3(x) &= -x + \frac{2x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2}; & \Phi_4(x) &= \frac{x}{l}; \\ \Phi_5(x) &= \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}; & \Phi_6(x) &= \frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

– так называемые эрмитовы функции или функции Эрмита (особенностью этих функций является то, что в крайних точках  $-x = 0$ ;  $x = l$  – они принимают по абсолютной величине только два значения – ноль либо единицу). Напомним, что выражения (2.6) представляют функции Эрмита для КЭ типа 1 (рис. 2.2).

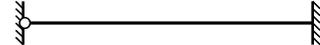
Выполнив аналогичные процедуры для конечных элементов типов 2, 3 и 4, несложно получить выражения для перемещений внутри КЭ через узловые перемещения для КЭ типов 2, 3 и 4 (рис. 2.2). Общая форма записи полученных выражений при этом будет полностью совпадать с (2.5). Разница будет заключаться в виде (в содержании) самих функций Эрмита, которые для различных типов элементов будут разными. При этом функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_4$  остаются одинаковыми (2.6) для всех типов элементов:

$$\Phi_1(x) = 1 - \frac{x}{l}; \quad \Phi_4(x) = \frac{x}{l}.$$

Функции же  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ ,  $\Phi_5$  и  $\Phi_6$  для 2 ÷ 4 типов КЭ будут иметь вид (цифра в скобках сверху указывает на тип КЭ):

– для КЭ типа 2 (  ):

$$\Phi_2^{(2)} = 1 - \frac{3x^2}{2l^2} + \frac{x^3}{2l^3}; \quad \Phi_3^{(2)} = -x + \frac{3x^2}{2l} - \frac{x^3}{2l^2}; \quad \Phi_5^{(2)} = \frac{3x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{2l^3}; \quad \Phi_6^{(2)} = 0; \quad (2.7)$$

– для КЭ типа 3 (  ):

$$\Phi_2^{(3)} = 1 - \frac{3x}{2l} + \frac{x^3}{2l^3}; \quad \Phi_3^{(3)} = 0; \quad \Phi_5^{(3)} = \frac{3x}{2l} - \frac{x^3}{2l^3}; \quad \Phi_6^{(3)} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2l^2}; \quad (2.8)$$

– для КЭ типа 4 (  ):

$$\Phi_2^{(4)} = 1 - \frac{x}{l}; \quad \Phi_3^{(4)} = 0; \quad \Phi_5^{(4)} = \frac{x}{l}; \quad \Phi_6^{(4)} = 0.$$

Общее выражение перемещений в области конечных элементов для всех типов КЭ (2.5) можно записать в матричной форме в виде:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \frac{dw}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 & \Phi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_2 & \Phi_3 & 0 & \Phi_5 & \Phi_6 \\ 0 & \frac{d\Phi_2}{dx} & \frac{d\Phi_3}{dx} & 0 & \frac{d\Phi_5}{dx} & \frac{d\Phi_6}{dx} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = [\Phi] \cdot \{\delta\}, \quad (2.9)$$

где  $[\Phi]$  – матрица функций Эрмита;  $\{\delta\}$  – вектор узловых перемещений КЭ в местной системе координат.

Внутренние усилия в стержне определяются, как известно, соотношениями:

$$N = EA \frac{du}{dx}; \quad M = EJ \frac{d^2w}{dx^2}; \quad Q = \frac{dM}{dx} = EJ \frac{d^3w}{dx^3}, \quad (2.10)$$

которые в матричной форме с учетом (2.9) можно записать в виде:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EJ & 0 \\ 0 & 0 & EJ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d\Phi_1}{dx} & 0 & 0 & \frac{d\Phi_4}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2\Phi_2}{dx^2} & \frac{d^2\Phi_3}{dx^2} & 0 & \frac{d^2\Phi_5}{dx^2} & \frac{d^2\Phi_6}{dx^2} \\ 0 & \frac{d^3\Phi_2}{dx^3} & \frac{d^3\Phi_3}{dx^3} & 0 & \frac{d^3\Phi_5}{dx^3} & \frac{d^3\Phi_6}{dx^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} =$$

$$= [D] \cdot [d] \cdot [\Phi] \cdot \{\delta\}, \quad \text{где } [d] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d^3}{dx^3} \end{bmatrix}; \quad (2.11)$$

$[D]$  – матрица упругих постоянных (жесткостей);

$[d]$  – матрица дифференцирования.

### 2.3. Соотношение между усилиями и перемещениями конечного элемента. Матрица жесткости КЭ

Наличие связей между конечными элементами в системе дискретной модели сооружения вызывает в узловых точках усилия взаимодействия, которых для плоского стержневого элемента (соответственно перемещениям узлов) будет шесть – по три в начальном и конечном узлах стержня (рис. 2.4). Каждый конечный элемент оказывается нагруженным этими усилиями, которые по отношению к нему могут рассматриваться как внешние нагрузки. Между усилиями и перемещениями КЭ существует определенная зависимость, которая может быть записана в виде

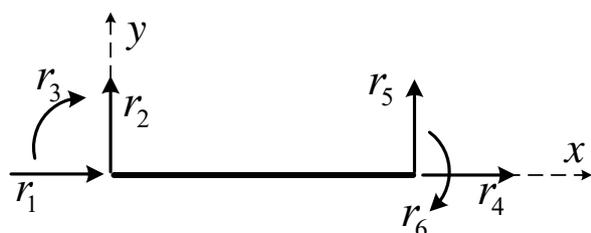


Рис. 2.4

отношению к нему могут рассматриваться как внешние нагрузки. Между усилиями и перемещениями КЭ существует определенная зависимость, которая может быть записана в виде

$$\{r_9\} = [K_9] \cdot \{\delta_9\}, \quad (2.12)$$

где матрица  $[K_9]$  выражается через упругие и геометрические параметры стержня и называется **матрицей жесткости** конечного элемента;  $\{r_9\}$ ,  $\{\delta_9\}$  – векторы соответственно усилий и перемещений по концам стержня (КЭ).

Для получения рассматриваемых (2.12) соотношений и для отдельных конечных элементов, и для всей системы обычно используется один из вариационных принципов строительной механики – если задача решается в перемещениях, то это обычно принцип Лагранжа, который формулируется следующим образом:

**Ⓢ Для системы, находящейся в равновесии, из всех возможных перемещений, удовлетворяющих заданным граничным условиям, в действительности имеют место те, при которых полная потенциальная энергия принимает минимальное значение.**

Аналитически этот принцип можно записать в виде:

а) для всей системы

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_i} = 0, \quad i = 1 \dots \tilde{n}, \quad (2.13)$$

где  $\tilde{n}$  – число всех неизвестных перемещений узлов в системе;

б) для отдельного конечного элемента

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_i} = 0, \quad i = 1 \dots n_s, \quad (2.13')$$

где  $n_s$  – число узловых перемещений по концам КЭ (для плоского стержневого КЭ (рис. 2.3) –  $n_s = 6$ , для балочного КЭ –  $n_s = 4$ , для КЭ плоской фермы –  $n_s = 4$ ).

Потенциальная энергия  $\Pi$  для плоского стержневого конечного элемента записывается в виде суммы энергии деформации стержня  $U$  и изменения потенциальной энергии внешних сил (в качестве которых по отношению к КЭ выступают силы  $r_i$ ), равной работе  $A$  этих внешних сил с обратным знаком:

$$\Pi = U - A = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} + \int_0^l \eta \frac{Q^2 dx}{2GA} + \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EA} - \sum P_i \delta_i. \quad (2.14)$$

Энергией деформации сдвига обычно пренебрегают, поэтому второе слагаемое в (2.14) далее опустим.

Вывод зависимостей выполним для КЭ типа 1. Подставим в (2.14) зависимости внутренних усилий (2.10) и соответственно зависимости (2.5) с учетом (2.6), после чего выполним интегрирование полученных выражений:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{EJ}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{EA}{2} \int_0^l \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx - \sum_1^6 r_i \delta_i = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{12x}{l^3} - \frac{6}{l^2} \right) \delta_2 + \left( \frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) \delta_3 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) \delta_5 + \left( \frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) \delta_6 \right]^2 dx + \frac{EA}{2} \int_0^l \left( -\frac{1}{l} \delta_1 + \frac{1}{l} \delta_4 \right)^2 dx - \sum r_i \delta_i = EJ \left( \frac{6}{l^3} \delta_2^2 - \right. \\ & \left. - \frac{6}{l^2} \delta_2 \delta_3 - \frac{12}{l^3} \delta_2 \delta_5 - \frac{6}{l^2} \delta_2 \delta_6 + \frac{2}{l} \delta_3^2 + \frac{6}{l^2} \delta_3 \delta_5 + \frac{2}{l} \delta_3 \delta_6 + \frac{6}{l^3} \delta_5^2 + \frac{6}{l^2} \delta_5 \delta_6 + \frac{2}{l} \delta_6^2 \right) + \\ & + \frac{EA}{2l} (\delta_1^2 - 2\delta_1 \delta_4 + \delta_4^2) - (r_1 \delta_1 + r_2 \delta_2 + r_3 \delta_3 + r_4 \delta_4 + r_5 \delta_5 + r_6 \delta_6). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Применив к (2.15) принцип Лагранжа (2.13')

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_i} = 0, \quad (i=1...6)$$

получим систему шести алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{EA}{l} \delta_1 + 0 \cdot \delta_2 + 0 \cdot \delta_3 - \frac{EA}{l} \delta_4 + 0 \cdot \delta_5 + 0 \cdot \delta_6 - r_1 = 0; \\ 0 \cdot \delta_1 + \frac{12EJ}{l^3} \delta_2 - \frac{6EJ}{l^2} \delta_3 + 0 \cdot \delta_4 - \frac{12EJ}{l^3} \delta_5 - \frac{6EJ}{l^2} \delta_6 - r_2 = 0; \\ 0 \cdot \delta_1 - \frac{6EJ}{l^2} \delta_2 + \frac{4EJ}{l} \delta_3 + 0 \cdot \delta_4 + \frac{6EJ}{l^2} \delta_5 + \frac{2EJ}{l} \delta_6 - r_3 = 0; \\ -\frac{EA}{l} \delta_1 + 0 \cdot \delta_2 + 0 \cdot \delta_3 + \frac{EA}{l} \delta_4 + 0 \cdot \delta_5 + 0 \cdot \delta_6 - r_4 = 0; \\ 0 \cdot \delta_1 - \frac{12EJ}{l^3} \delta_2 + \frac{6EJ}{l^2} \delta_3 + 0 \cdot \delta_4 + \frac{12EJ}{l^3} \delta_5 + \frac{6EJ}{l^2} \delta_6 - r_5 = 0; \\ 0 \cdot \delta_1 - \frac{6EJ}{l^2} \delta_2 + \frac{2EJ}{l} \delta_3 + 0 \cdot \delta_4 + \frac{6EJ}{l^2} \delta_5 + \frac{4EJ}{l} \delta_6 - r_6 = 0, \end{array} \right. \quad (2.16)$$

которая в матричной форме имеет вид

$$[K] \cdot \{\delta\} - \{r\} = 0 \quad (2.16')$$

и выражает искомую зависимость для КЭ ( $s$ -го) между узловыми усилиями и перемещениями для отдельного ( $s$ -го) КЭ в местной системе координат

$$\{r'_s\} = [K'_s] \cdot \{\delta'_s\}. \quad (2.17)$$

Следует заметить, что и в общей системе координат рассматриваемая зависимость для конечного элемента будет иметь такой же вид

$$\{r_s\} = [K_s] \cdot \{\delta_s\} \quad (2.18)$$

с той разницей, что узловые силы и перемещения, а также матрица жесткости конечного элемента будут соответствовать общей системе координат.

Аналогичную зависимость можно получить и для системы (ее дискретной модели) в целом, если рассматривать потенциальную энергию всей системы и применить к ней условия (2.13):

$$\{r\} = [K] \cdot \{\Delta\}, \quad (2.19)$$

где  $[K]$  будет матрицей жесткости всей системы.

Матрица жесткости рассматриваемого КЭ типа 1 в местной системе координат, таким образом, как следует из (2.16), имеет вид:

$$[K'_y] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} & r_{36} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} & r_{46} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} & r_{56} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} & r_{64} & r_{65} & r_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

где каждый из коэффициентов  $r_{ik}$  по физическому смыслу представляет собой реакцию узла (усилие на конце стержня) в  $i$ -том направлении от единичного перемещения соответствующего узла (конца стержня) в  $k$ -том направлении, то есть эти коэффициенты и по физическому смыслу, и по значениям совпадают (что несложно проверить) с соответствующими коэффициентами метода перемещений.

При неучёте (пренебрежении) продольных деформаций стержней, что часто

используется в расчетах рам, а также справедливо при расчетах многопролетных балок, работающих только на вертикальные нагрузки, матрица жесткости рассматриваемого элемента (рис. 2.5) будет иметь вид (2.21). На рис. 2.5, а также далее на рис. 2.6÷2.8 для каждого из элементов совмещен показ нумераций и направлений перемещений их концов и возникающих по концам реакций, в связи с чем опущены их обозначения  $\delta$  и  $r$ , а стоят только их номера.

Рис. 2.5

$$[K'_9] = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Аналогично можно получить матрицы жесткости и для элементов остальных типов (рис. 1.2). Схемы этих элементов и вид их матриц жесткости в местной системе координат представлены соответственно на рис. 2.6÷2.8 и в выражениях (2.22) ÷ (2.24).

Tun 2

Рис. 2.6

$$[K'_9] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l^3} & -\frac{3EJ}{l^2} & 0 & -\frac{3EJ}{l^3} & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l} & 0 & \frac{3EJ}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^3} & \frac{3EJ}{l^2} & 0 & \frac{3EJ}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (2.22)$$

Tun 3

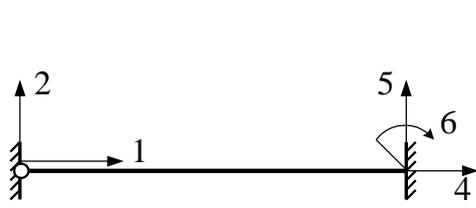


Рис. 2.7

$$[K'_9] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EJ}{l^3} & -\frac{3EJ}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EJ}{l^3} & \frac{3EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l} \end{bmatrix}; \quad (2.23)$$

*Тун 4*



Рис. 2.8

$$[K'_9] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

При неучете продольных деформаций для КЭ типов 2 и 3 в выражениях (2.22), (2.23) выпадут (станут нулевыми) (по аналогии с получением выражения (2.21) для элемента типа 1) соответственно 1-ый и 4-ый столбцы и 1-ая и 4-ая строки.

#### 2.4. Разрешающие уравнения МКЭ

Применение метода конечных элементов к расчету заданной системы приводит к представлению ее в виде совокупности конечных элементов, соединенных между собой в узлах и работающих на заданные нагрузки совместно как единый «ансамбль», единая равновесная конструкция. В каждом узле ( $i$ ) этой системы, естественно, должны соблюдаться уравнения равновесия всех действующих в нем сил (рис. 2.9): нагрузок –  $P_{ix}$ ,  $P_{iy}$ ,  $M_i$ , реакций опорных связей –  $R_{ix}$ ,  $R_{iy}$ ,

$M_{Ri}$ , и реакций узла на все примыкающие к нему стержни –  $r_{ix}$ ,  $r_{iy}$ ,  $M_{ri}$ . Последние определяются как суммы реакций узла на действие всех стержней, примыкающих к этому ( $i$ -ому) узлу:

$$r_{ix} = \sum_{s \in i} r_{ix}^s; \quad r_{iy} = \sum_{s \in i} r_{iy}^s; \quad M_{ri} = \sum_{s \in i} M_{ri}^s \quad (2.25)$$

Например, для узла  $i$ , представленного на рис. 2.9, в котором соединяется два стержня  $s$  и  $s+1$ , величины этих реакций будут равны:

$$r_{ix} = r_{ix}^s + r_{ix}^{s+1}; \quad r_{iy} = r_{iy}^s + r_{iy}^{s+1}; \quad M_{ri} = M_{ri}^s + M_{ri}^{s+1}.$$

Нагрузки и все реакции (для узла и для стержней) на рис. 2.9 показаны действующими в направлениях, принятых для них положительными:

– силы  $P_{ix}$ ,  $P_{iy}$ , и реакции опор в узле  $R_{ix}$ ,  $R_{iy}$ , будем считать положительными, если направления их действия совпадают соответственно с направлениями осей  $x$  и  $y$ ;

– сосредоточенные моменты  $M_i$  и реактивные опорные моменты  $M_{Ri}$  в узле будем считать положительными, если они действуют по часовой стрелке;

– реакции концов стержней на воздействие узлов будем считать положительными, если направления действия реактивных сил  $r_{ix}^y$ ,  $r_{iy}^y$  совпадают с направлениями осей  $x$ ,  $y$  (либо осей  $x'$ ,  $y'$ , если реакции определяются в местной системе координат), а реактивные моменты  $M_{ri}^y$  вращают по часовой стрелке;

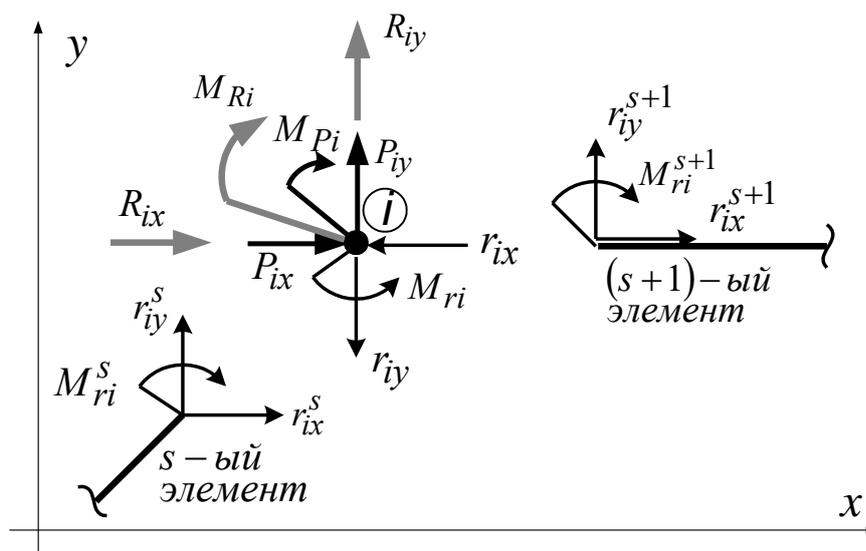


Рис. 2.9. Силы, действующие в узле, и их положительные направления – реакции же узла на действие всех примыкающих к нему стержней в соответствии с третьим законом Ньютона (о действии и противодействии) будем

считать положительными, если  $r_{ix}$  и  $r_{iy}$  действуют в направлениях, противоположных направлениям осей  $x$  и  $y$ , а  $M_{ri}$  – против часовой стрелки.

Тогда уравнения равновесия всех сил, действующих в каждом ( $i$ -том) из узлов, будут иметь вид

$$\begin{cases} -r_{ix} + P_{ix} + R_{ix} = 0; \\ -r_{iy} + P_{iy} + R_{iy} = 0; \\ -M_{ri} + M_i + M_{ri} = 0, \end{cases} \quad (2.26)$$

или в матричной форме

$$-\{r_i\} + \{P_i\} + \{R_i\} = 0. \quad (2.26')$$

Для расчетной модели, состоящей из  $n$  узлов, будем иметь следующую систему уравнений

$$-\{r\} + \{P\} + \{R\} = 0, \quad (2.27)$$

где  $\{r\}$  – вектор (матрица–столбец) компонентов суммарных реакций всех узлов системы на все примыкающие к ним стержни;

$\{P\}$  – вектор (матрица–столбец) всех действующих в узлах системы внешних нагрузок;

$\{R\}$  – вектор (матрица–столбец) действующих в узлах опорных реакций (если в узле нет опорных связей, то соответствующие им величины будут нулевыми).

В развернутой форме указанные матрицы имеют вид

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ M_{r1} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \\ M_{r2} \\ \dots \\ \dots \\ r_{nx} \\ r_{ny} \\ M_{rn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ \dots \\ \dots \\ r_{\tilde{n}} \end{Bmatrix}; \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_1 \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_2 \\ \dots \\ \dots \\ P_{nx} \\ P_{ny} \\ M_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ \dots \\ \dots \\ P_{\tilde{n}} \end{Bmatrix}; \quad \{R\} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ M_{R1} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ M_{R2} \\ \dots \\ \dots \\ R_{nx} \\ R_{ny} \\ M_{Rn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ \dots \\ \dots \\ R_{\tilde{n}} \end{Bmatrix}, \quad (2.28)$$

где  $n$  – число узлов в рассматриваемой системе;  $\tilde{n}$  – общее число соответствующих сил в узлах – эта величина для стержневых систем может изменяться от  $\tilde{n} = 3n$  для рам с жесткими узлами до  $\tilde{n} = 2n$  для балок и ферм.

Неизвестными в методе конечных элементов в форме метода перемещений являются линейные и угловые перемещения узлов, знание которых, как и в классическом методе перемещений, дает нам возможность определить усилия в системе. Вектор (матрица-столбец) перемещений всех узлов системы имеет следующий вид

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \varphi_1 \\ \dots \\ \dots \\ \Delta_{nx} \\ \Delta_{ny} \\ \varphi_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \Delta_{\bar{n}} \end{Bmatrix}. \quad (2.29)$$

Для линейно-деформируемых систем, которые мы рассматриваем, между внутренними усилиями и перемещениями существует линейная зависимость, которая в матричной форме представляется выражением (2.19)  $\{r\} = [K] \cdot \{\Delta\}$ , а в развернутой форме имеет следующий вид

$$\begin{cases} r_1 = k_{11} \cdot \Delta_1 + k_{12} \cdot \Delta_2 + k_{13} \cdot \Delta_3 + \dots + k_{1\bar{n}} \cdot \Delta_{\bar{n}}; \\ r_2 = k_{21} \cdot \Delta_1 + k_{22} \cdot \Delta_2 + k_{23} \cdot \Delta_3 + \dots + k_{2\bar{n}} \cdot \Delta_{\bar{n}}; \\ \dots \\ \dots \\ r_{\bar{n}} = k_{\bar{n}1} \cdot \Delta_1 + k_{\bar{n}2} \cdot \Delta_2 + k_{\bar{n}3} \cdot \Delta_3 + \dots + k_{\bar{n}\bar{n}} \cdot \Delta_{\bar{n}}. \end{cases} \quad (2.30)$$

С учетом этого выражения уравнение равновесия (2.27) в матричной форме тогда будет

$$-[K] \cdot \{\Delta\} + \{P\} + \{R\} = 0, \quad (2.31)$$

где  $[K]$  – матрица жесткости системы, имеющая вид

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1\bar{n}} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2\bar{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{\bar{n}1} & k_{\bar{n}2} & k_{\bar{n}3} & \dots & k_{\bar{n}\bar{n}} \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Элемент матрицы жесткости  $k_{mj}$  представляет собой реакцию в  $m$ -том направлении (величину реакции  $r_m$ ) от смещения узла в  $j$ -том направлении на единичную величину  $\Delta_j = 1$ . Вследствие неразрывности деформаций в узлах, описываемой условиями совместности, перемещения узлов будут равняться перемещениям концов стержней, примыкающих к рассматриваемому узлу

$$\{\Delta_i\} = \{\delta_{si}\}.$$

Смещение же узла в некотором направлении вызовет деформации всех примыкающих к этому узлу стержней, и, следовательно, величина возникающей в этом узле реакции должна включать реакции от всех этих стержней. Поэтому коэффициент  $k_{mj}$  вычисляют, задавая смещение  $\Delta_j = 1$  и суммируя реакции от всех элементов, примыкающих к узлу  $i_m$ , к которому относится  $m$ -ое направление реакции (и перемещения):

$$k_{mj} = \sum_{s \in i_m} r_{mj}^s. \quad (2.33)$$

Здесь  $i_m$  – номер узла, к которому относится  $m$ -ое направление реакции, а знак  $\in$  говорит о суммировании по всем элементам, которые примыкают к  $i_m$ -му узлу. Заметим, что величины  $k_{mj}$  и  $r_{mj}^s$  здесь определяются в общей системе координат.

Анализ системы уравнений (2.31) показывает, что она содержит два типа уравнений. Часть из них представляют собой сумму проекций сил на оси (или сумму моментов), в направлениях которых в узлах действуют жесткие опорные связи. В этих направлениях перемещения, естественно, равны нулю. В остальной же части уравнений будут равны нулю величины опорных реакций, так как в соответствующих им направлениях нет опорных связей. Для определения неизвестных перемещений узлов достаточно решения второй группы уравнений. Первая же часть уравнений позволяет определить опорные реакции внешних связей, что можно сделать и позже – после получения окончательных эпюр внутренних усилий. И так как основной задачей данного этапа расчета является определение перемещений узлов системы, то уравнения (2.31) с учетом выше сказанного записывают обычно в следующем виде

$$[E_1] \cdot \{-[K] \cdot \{\Delta\} + \{P\}\} = 0, \quad (2.34)$$

опуская матрицу реакций опорных связей  $\{R\}$  и вводя диагональную матрицу  $[E_1]$  вида

$$[E_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

с числом элементов по диагонали, равным общему числу элементов вектора  $\{\Delta\}$ , причем каждому диагональному элементу матрицы  $[E_1]$  соответствует узел и направление его перемещения в том же порядке, как и в матрице  $\{\Delta\}$ . Диагональные элементы матрицы  $[E_1]$  могут принимать два значения— 0 либо 1. Нулю принимаются равными элементы, которые соответствуют перемещениям узлов в направлениях, в которых эти перемещения явно отсутствуют (вследствие наличия в этих направлениях опорных связей). Остальные элементы принимаются равными единице.

Заметим, что матрица  $[E_1]$  содержит нулевые строки и является особенной: ее наличие обращает в ноль и соответствующие строки системы алгебраических уравнений (2.34), которую в этом случае следует рассматривать как систему уравнений относительно неизвестных компонентов матрицы перемещений  $\{\Delta\}$  без нулевых строк.

Часто уравнение (2.34) записывают, опуская и диагональную матрицу  $[E_1]$ , имея в виду, что решить эту систему уравнений можно только после подстановки в нее перемещений опорных узлов (учета граничных условий), и учитывая, что равенство нулю отдельных компонентов перемещений опорных узлов эквивалентно уменьшению числа уравнений равновесия и вычеркиванию соответствующих строк и столбцов системы уравнений. В результате получим систему разрешающих уравнений в виде

$$- [K^*] \cdot \{\Delta^*\} + \{P^*\} = 0. \quad (2.36)$$

Эта система уравнений будет такой же, как и система уравнений (2.34).

Заметим, что вектор внешних нагрузок  $\{P\}$  записывается в общей системе координат и в каждом ( $i$ -том) узле представляет собой сумму соответствующих внешних сосредоточенных нагрузок  $\{\bar{P}_i\}$  и узловых нагрузок  $\{P_{iq}\}$  от равномерно распределенных нагрузок  $q$ , действующих на примыкающие к узлу стержни (если эти нагрузки, конечно, есть):

$$\{P\} = \{\bar{P}\} + \{P_q\}. \quad (2.37)$$

Величины узловых нагрузок, от действия на конечные элементы равномерно распределенных нагрузок, в местной системе координат можно найти, воспользовавшись схемами, представленными на рис. 2.10. Значения узловых нагрузок здесь равны с обратным знаком реакциям для рассматриваемых типов

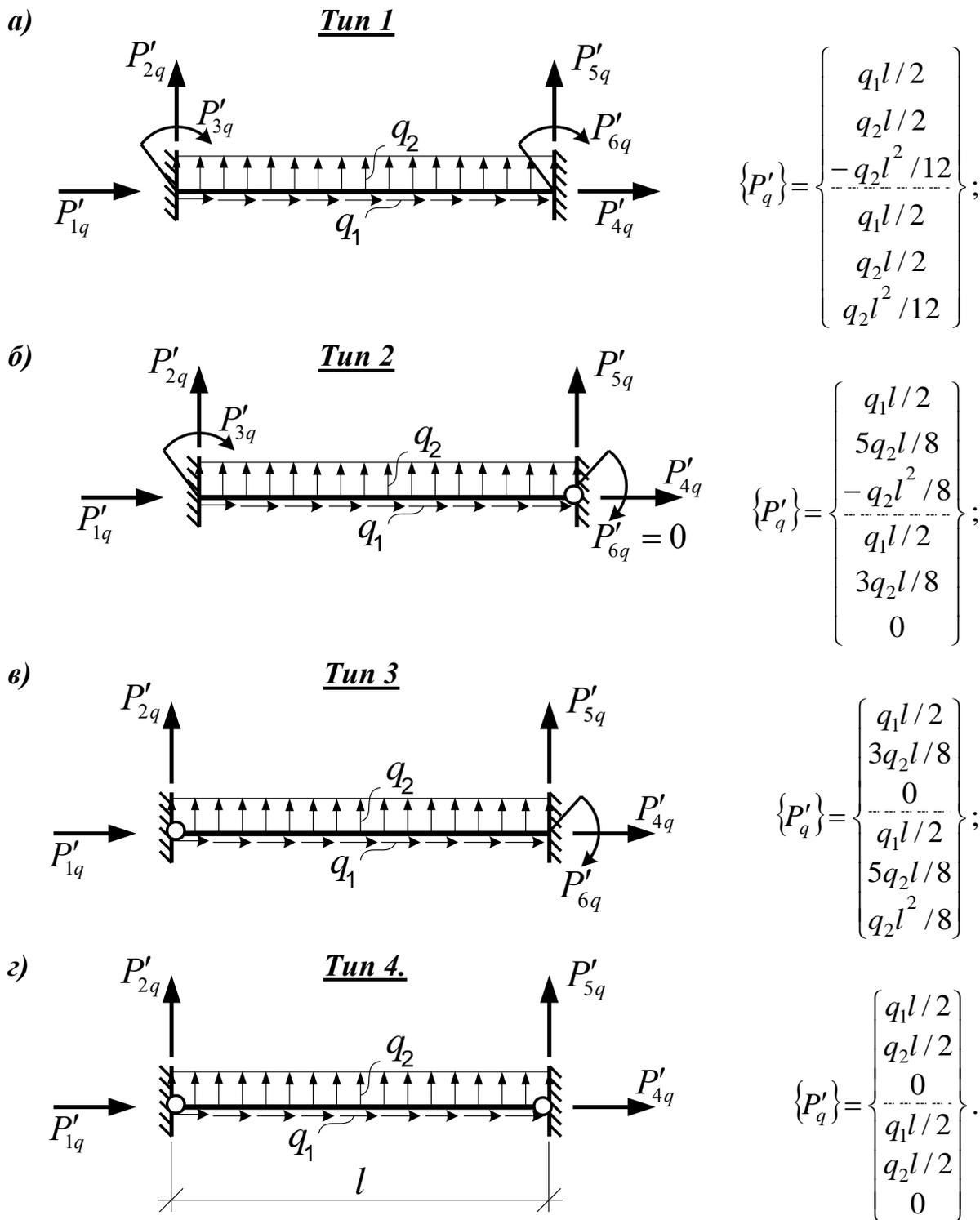
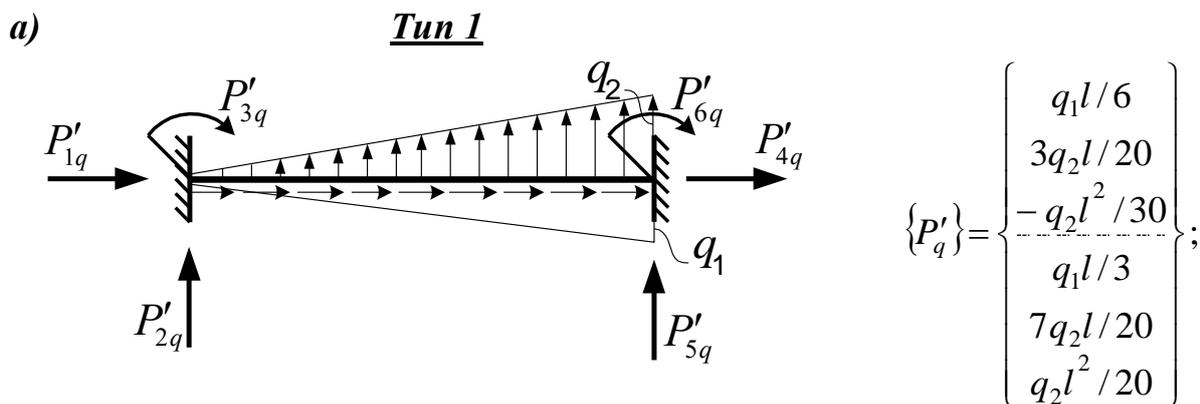


Рис. 2.10. Схемы представления равномерно распределенных нагрузок в виде узловых нагрузок



**Примечание:** При действии треугольной нагрузки наоборот ( $q_2$  слева, а справа – ноль) поменяются местами и значения нагрузок  $P'_q$  в матрице  $\{P'_q\}$ .

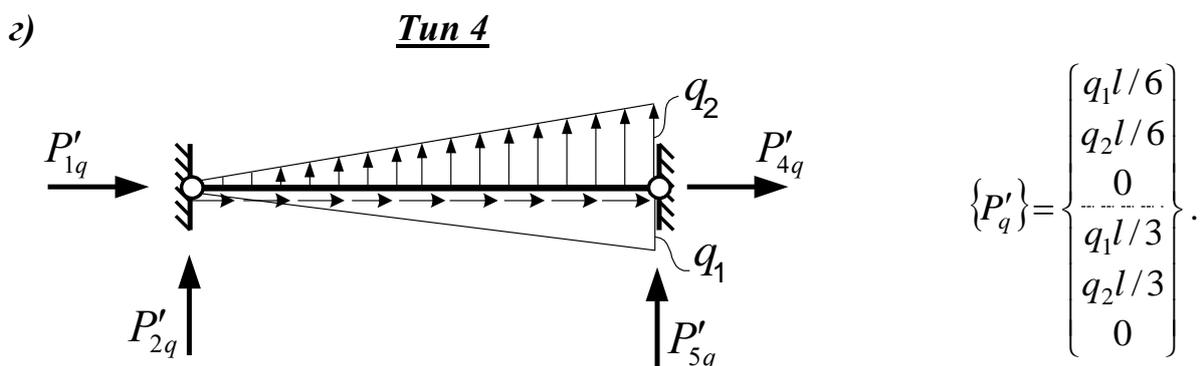
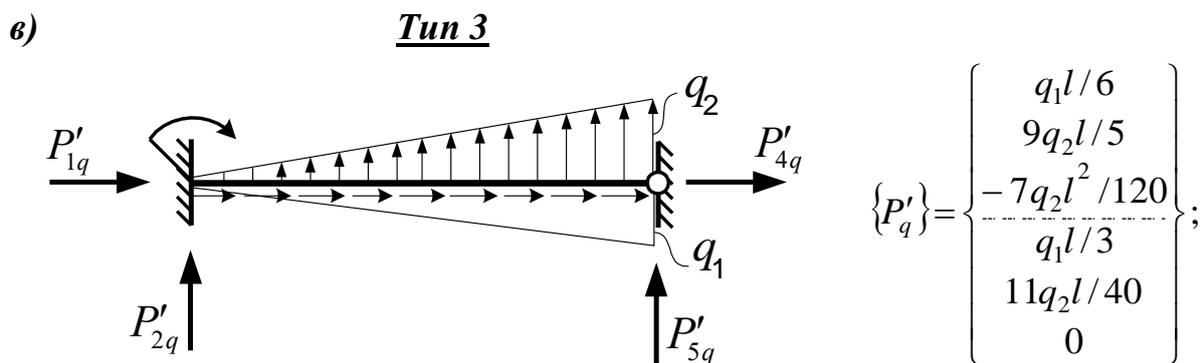
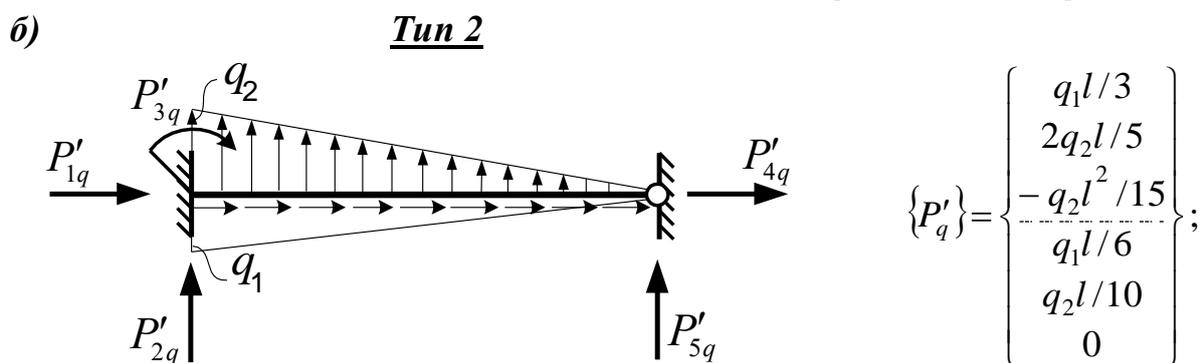


Рис. 2.11. Схемы представления нагрузок, распределенных по треугольным законам, в виде узловых нагрузок

**Примечание:** Для КЭ типа 3 матрицы  $\{P'_q\}$  несложно получить на основе анализа схемы матриц  $\{P'_q\}$  для КЭ типа 2. элементов, величины которых несложно

типов элементов, величины которых несложно вычислить или можно взять, например, из табличных эпюр метода перемещений. Аналогично можно получить и узловые нагрузки от нагрузок, распределенных по треугольным законам (см. рис. 2.11). При действии на стержни нагрузок, изменяющихся по трапециидальным законам, величины узловых нагрузок  $P'_q$  получим на основе принципа независимости действия сил алгебраическим сложением нагрузок от равномерно распределенных нагрузок и от нагрузок, распределенных по треугольным законам.

Для перехода от узловых нагрузок в местной системе координат к узловым нагрузкам в общей системе координат необходимо сосредоточенные узловые силы разложить на оси  $x$ ,  $y$  и вычислить их суммарные значения (проекции всех сил в каждом из узлов на эти оси); сосредоточенные же моменты, действующие в узлах, с переходом от одной системы координат к другой не изменяются.

Преобразование узловых нагрузок из местной системы координат в общую можно выполнять также с помощью зависимостей

$$\{P_q\} = [T_\alpha]^T \cdot \{P'_q\}; \quad \{P\} = [T_\alpha]^T \cdot \{P'\}, \quad (2.38)$$

которые используют матрицу преобразования координат  $[T_\alpha]$ . Эта матрица будет получена в следующем разделе – см. (2.40). Представленные зависимости (2.38) несложно получить по аналогии с получением соотношений (2.41). Заметим, что в выражения (2.38) входит транспонированная матрица преобразования координат –  $[T_\alpha]^T$ .

Для определения неизвестных перемещений узлов расчетной схемы необходимо, таким образом, решить систему уравнений (2.34) (либо, что то же самое, (2.36)). Однако для выполнения этой процедуры нужно иметь матрицу жесткости системы  $[K]$ , которая определяет жесткостные (упругие) свойства сооружения в целом. Эту матрицу можно получить, как уже указывалось (см. раздел 2.3 и (2.19)), на основе принципа Лагранжа (2.13). Однако проще, как показывает анализ матрицы жесткости системы, элементы которой исходя из их физического смысла определяются выражением (2.33), формировать эту матрицу через матрицы жесткости конечных элементов, составляющих расчетную дискретную модель. При этом матрицы жесткости конечных элементов должны быть представлены, конечно, в общей системе координат. Поэтому ниже остановимся на получении матриц жесткости отдельных конечных элементов расчетной дискретной модели в общей системе координат.

## 2.5. Преобразование координат

Для получения разрешающей системы уравнений формирование матрицы жесткости  $[K]$  расчетной модели необходимо выполнять в глобальной (общей) системе координат, для чего надо уметь преобразовывать матрицы жесткости отдельных КЭ из местных систем координат в общую. Для выяснения этой процедуры рассмотрим отдельный конечный элемент системы, для которого перемещения и реакции его концов представим как в местной, так и в общей системах координат (рис. 2.12), (рис. 2.13).

Перемещения концов стержня (КЭ) в местной системе координат связаны с перемещениями его концов в общей системе координат, как следует из рис. 2.12, выражениями

$$\begin{cases} \delta'_1 = \delta_1 \cos \alpha + \delta_2 \sin \alpha ; \\ \delta'_2 = -\delta_1 \sin \alpha + \delta_2 \cos \alpha ; \\ \delta'_3 = \delta_3 ; \\ \delta'_4 = \delta_4 \cos \alpha + \delta_5 \sin \alpha ; \\ \delta'_5 = -\delta_4 \sin \alpha + \delta_5 \cos \alpha ; \\ \delta'_6 = \delta_6 , \end{cases}$$

которые можно записать в виде

$$\begin{cases} \delta'_1 = \delta_1 \cos \alpha + \delta_2 \sin \alpha + \delta_3 \cdot 0 + \delta_4 \cdot 0 + \delta_5 \cdot 0 + \delta_6 \cdot 0 ; \\ \delta'_2 = -\delta_1 \sin \alpha + \delta_2 \cos \alpha + \delta_3 \cdot 0 + \delta_4 \cdot 0 + \delta_5 \cdot 0 + \delta_6 \cdot 0 ; \\ \delta'_3 = \delta_1 \cdot 0 + \delta_2 \cdot 0 + \delta_3 \cdot 1 + \delta_4 \cdot 0 + \delta_5 \cdot 0 + \delta_6 \cdot 0 ; \\ \delta'_4 = \delta_1 \cdot 0 + \delta_2 \cdot 0 + \delta_3 \cdot 0 + \delta_4 \cos \alpha + \delta_5 \sin \alpha + \delta_6 \cdot 0 ; \\ \delta'_5 = \delta_1 \cdot 0 + \delta_2 \cdot 0 + \delta_3 \cdot 0 - \delta_4 \sin \alpha + \delta_5 \cos \alpha + \delta_6 \cdot 0 ; \\ \delta'_6 = \delta_1 \cdot 0 + \delta_2 \cdot 0 + \delta_3 \cdot 0 + \delta_4 \cdot 0 + \delta_5 \cdot 0 + \delta_6 \cdot 1 , \end{cases}$$

или в матричной форме в виде

$$\{\delta'\} = [T_\alpha] \cdot \{\delta\}, \quad (2.39)$$

где

$$[T_\alpha] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.40)$$

$\alpha$  – угол поворота КЭ по отношению к оси  $x$  общей системы координат против часовой стрелки, то есть по существу это угол поворота местной системы координат по отношению к общей системе координат (при этом положительным здесь принимается угол поворота против часовой стрелки).

Матрицу  $[T_\alpha]$  называют матрицей преобразования координат.

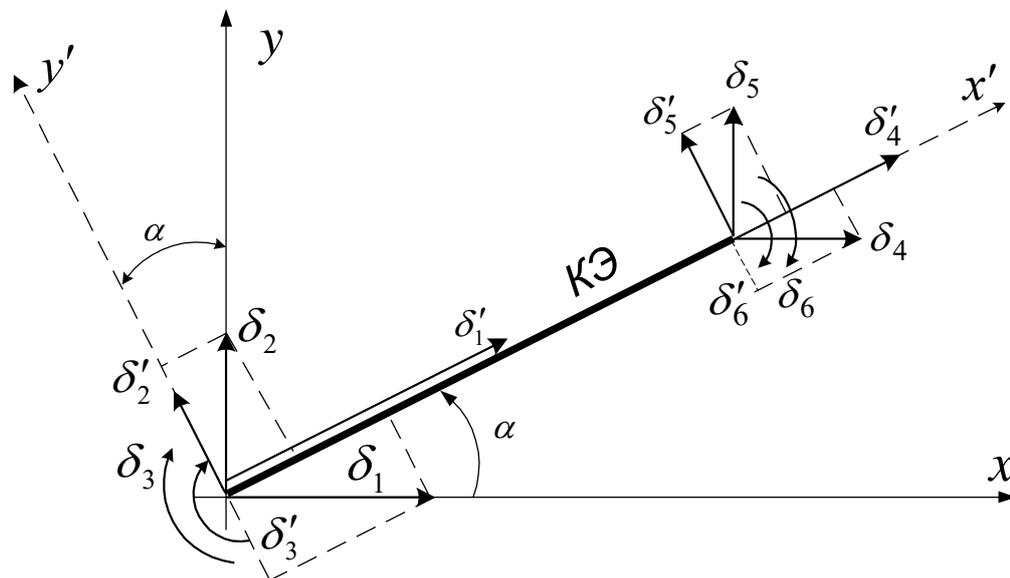


Рис. 2.12. Связь между перемещениями в местной и общей системах координат

Реакции по концам стержневого конечного элемента в общей системе координат определяются через реакции по концам КЭ в местной системе координат (рис. 2.13) выражениями

$$\begin{cases} r_1 = r'_1 \cos \alpha - r'_2 \sin \alpha ; \\ r_2 = r'_1 \sin \alpha + r'_2 \cos \alpha ; \\ r_3 = r'_3 ; \\ r_4 = r'_4 \cos \alpha - r'_5 \sin \alpha ; \\ r_5 = r'_4 \sin \alpha + r'_5 \cos \alpha ; \\ r_6 = r'_6 , \end{cases}$$

или по аналогии с выше представленными зависимостями в матричной форме

$$\{r\} = [T_\alpha]^T \cdot \{r'\}, \quad (2.41)$$

где  $[T_\alpha]^T$  – транспонированная матрица по отношению к  $[T_\alpha]$ .

Подставляя в (2.41) выражение (2.17)

$$\{r'\} = [K'] \cdot \{\delta'\},$$

связующее реакции и перемещения концов конечного элемента в местной системе координат, а затем – выражение (2.39), получим:

$$\{r\} = [T_\alpha]^T \cdot \{r'\} = [T_\alpha]^T \cdot [K'] \cdot \{\delta'\} = [T_\alpha]^T \cdot [K'] \cdot [T_\alpha] \cdot \{\delta\}. \quad (2.42)$$

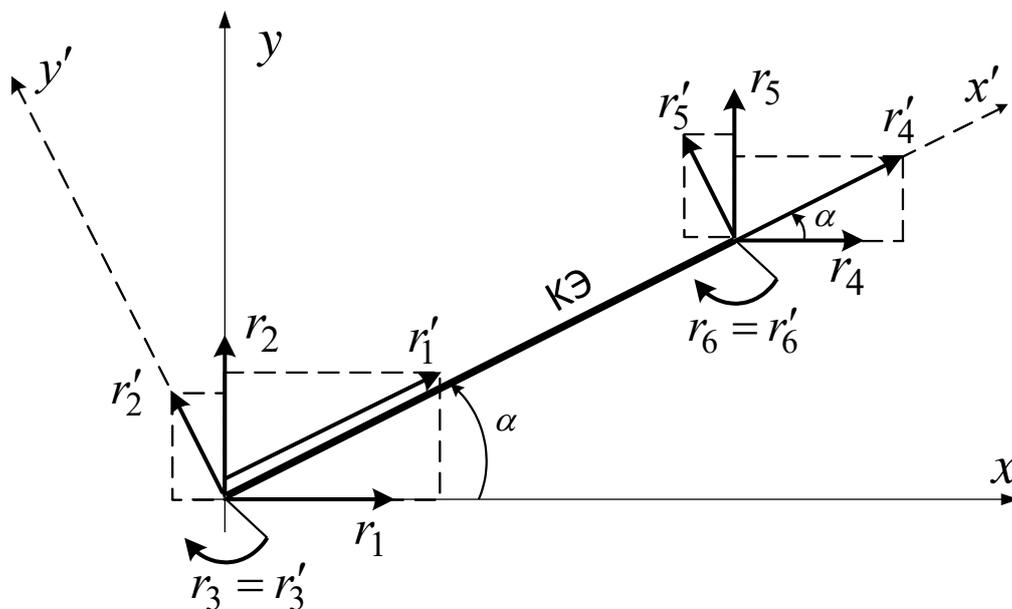


Рис. 2.13. Связь между реакциями в общей и местной системах координат

Сравнивая это выражение с (2.18), найдем зависимость между матрицами жесткости элементов в местной и общей системах координат

$$[K] = [T_\alpha]^T \cdot [K'] \cdot [T_\alpha]. \quad (2.43)$$

Выражение (2.43) даёт возможность по известной матрице жёсткости КЭ в местной системе координат (см. раздел 2.3) получить его матрицу жесткости в общей системе координат.

Выполнив процедуру (2.43) для стержневого конечного элемента, концы которого закреплены от всех линейных и угловых перемещений (тип 1) и матрица жесткости которого в местной системе координат имеет вид (2.20), получим матрицу жесткости такого элемента в общей системе координат в виде (2.44). При неучёте продольных деформаций матрицу жёсткости этого элемента (рис. 2.5) в общей системе координат получим, если в (2.44) отбросим все слагаемые с  $EA$ .

Матрицы жесткости для элементов типов 2 и 3 (рис. 2.2) в общей системе координат, полученные с использованием зависимости (2.43), имеют соответственно вид (2.45) и (2.46). Для элемента с шарнирными закреплениями концов (тип 4 – рис. 2.2) матрицу жесткости в общей системе координат несложно получить из любой из представленных матриц жесткости для элементов типов 1 (2.44), 2 (2.45) и 3 (2.46) путем исключения (обнуления) во всех элементах этих матриц слагаемых с  $EJ$ .

Тип 1



$$[K_{\mathcal{O}}]= \tag{2.44}$$

$\left(\frac{EA}{l}\cos^2\alpha + \frac{12EJ}{l^3}\sin^2\alpha\right)$	$\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EJ}{l^3}\right)\sin\alpha\cos\alpha$	$\frac{6EJ}{l^2}\sin\alpha$	$\left(-\frac{EA}{l}\cos^2\alpha - \frac{12EJ}{l^3}\sin^2\alpha\right)$	$\left(-\frac{EA}{l} + \frac{12EJ}{l^3}\right)\sin\alpha\cos\alpha$	$\frac{6EJ}{l^2}\sin\alpha$
$\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EJ}{l^3}\right)\sin\alpha\cos\alpha$	$\left(\frac{EA}{l}\sin^2\alpha + \frac{12EJ}{l^3}\cos^2\alpha\right)$	$-\frac{6EJ}{l^2}\cos\alpha$	$\left(-\frac{EA}{l} + \frac{12EJ}{l^3}\right)\sin\alpha\cos\alpha$	$\left(-\frac{EA}{l}\sin^2\alpha - \frac{12EJ}{l^3}\cos^2\alpha\right)$	$-\frac{6EJ}{l^2}\cos\alpha$
$\frac{6EJ}{l^2}\sin\alpha$	$-\frac{6EJ}{l^2}\cos\alpha$	$\frac{4EJ}{l}$	$-\frac{6EJ}{l^2}\sin\alpha$	$\frac{6EJ}{l^2}\cos\alpha$	$\frac{2EJ}{l}$
$\left(-\frac{EA}{l}\cos^2\alpha - \frac{12EJ}{l^3}\sin^2\alpha\right)$	$\left(-\frac{EA}{l} + \frac{12EJ}{l^3}\right)\sin\alpha\cos\alpha$	$-\frac{6EJ}{l^2}\sin\alpha$	$\left(\frac{EA}{l}\cos^2\alpha + \frac{12EJ}{l^3}\sin^2\alpha\right)$	$\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EJ}{l^3}\right)\sin\alpha\cos\alpha$	$-\frac{6EJ}{l^2}\sin\alpha$
$\left(-\frac{EA}{l} + \frac{12EJ}{l^3}\right)\sin\alpha\cos\alpha$	$\left(-\frac{EA}{l}\sin^2\alpha - \frac{12EJ}{l^3}\cos^2\alpha\right)$	$\frac{6EJ}{l^2}\cos\alpha$	$\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EJ}{l^3}\right)\sin\alpha\cos\alpha$	$\left(\frac{EA}{l}\sin^2\alpha + \frac{12EJ}{l^3}\cos^2\alpha\right)$	$\frac{6EJ}{l^2}\cos\alpha$
$\frac{6EJ}{l^2}\sin\alpha$	$-\frac{6EJ}{l^2}\cos\alpha$	$\frac{2EJ}{l}$	$-\frac{6EJ}{l^2}\sin\alpha$	$\frac{6EJ}{l^2}\cos\alpha$	$\frac{4EJ}{l}$

Тип 2



$$[K_{\ominus}] = \quad (2.45)$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EJ}{l^3} \sin^2 \alpha\right) & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EJ}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{3EJ}{l^2} \sin \alpha & \left(-\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EJ}{l^3} \sin^2 \alpha\right) & \left(-\frac{EA}{l} + \frac{3EJ}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EJ}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & \left(\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EJ}{l^3} \cos^2 \alpha\right) & -\frac{3EJ}{l^2} \cos \alpha & \left(-\frac{EA}{l} + \frac{3EJ}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & \left(-\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EJ}{l^3} \cos^2 \alpha\right) & 0 \\ \frac{3EJ}{l^2} \sin \alpha & -\frac{3EJ}{l^2} \cos \alpha & \frac{3EJ}{l} & -\frac{3EJ}{l^2} \sin \alpha & \frac{3EJ}{l^2} \cos \alpha & 0 \\ \left(-\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EJ}{l^3} \sin^2 \alpha\right) & \left(-\frac{EA}{l} + \frac{3EJ}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{3EJ}{l^2} \sin \alpha & \left(\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EJ}{l^3} \sin^2 \alpha\right) & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EJ}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ \left(-\frac{EA}{l} + \frac{3EJ}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & \left(-\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EJ}{l^3} \cos^2 \alpha\right) & \frac{3EJ}{l^2} \cos \alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EJ}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & \left(\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EJ}{l^3} \cos^2 \alpha\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Тип 3



$$[K_{\mathcal{E}}] = \quad (2.46)$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \left( \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EJ}{l^3} \sin^2 \alpha \right) & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 & \left( -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EJ}{l^3} \sin^2 \alpha \right) & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{3EJ}{l^2} \sin \alpha \\ \hline \left( \frac{EA}{l} - \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EJ}{l^3} \cos^2 \alpha \right) & 0 & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \left( -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EJ}{l^3} \cos^2 \alpha \right) & -\frac{3EJ}{l^2} \cos \alpha \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \left( -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EJ}{l^3} \sin^2 \alpha \right) & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 & \left( \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EJ}{l^3} \sin^2 \alpha \right) & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{3EJ}{l^2} \sin \alpha \\ \hline \left( -\frac{EA}{l} + \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \left( -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EJ}{l^3} \cos^2 \alpha \right) & 0 & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EJ}{l^3} \cos^2 \alpha \right) & \frac{3EJ}{l^2} \cos \alpha \\ \hline \frac{3EJ}{l^2} \sin \alpha & -\frac{3EJ}{l^2} \cos \alpha & 0 & -\frac{3EJ}{l^2} \sin \alpha & \frac{3EJ}{l^2} \cos \alpha & \frac{3EJ}{l} \\ \hline \end{array}$$

## 2.6. Формирование матрицы жесткости системы

Матрица жесткости отдельного конечного ( $s$ -го) элемента (см. (2.20)÷(2.24), (2.44)÷(2.46)), начало которого находится в узле  $i$ , а конец – в узле  $k$ , имеет следующую структуру

$$[K^y] = [K_s] = \begin{bmatrix} A_{ii}^s & A_{ik}^s \\ A_{ki}^s & A_{kk}^s \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

где  $A_{ii}^s$  – блок реакций на  $i$ -ом конце элемента (узловых усилий в соответствующих связях, соединяющих этот конец элемента с узлом  $i$ ) (рис. 2.9) от перемещений этого же ( $i$ ) конца элемента (и соответственно узла  $i$ );  $A_{kk}^s$  – аналогично, только применительно к концу  $k$  элемента (и к узлу  $k$ );  $A_{ik}^s$  – блок реакций (узловых усилий взаимодействия) на  $i$ -ом конце конечного элемента (и соответственно в  $i$ -ом узле) от перемещений  $k$ -го его конца ( $k$ -го узла);  $A_{ki}^s$  – аналогично  $A_{ik}^s$ , если поменять местами  $i$  и  $k$ .

Таким образом, блок  $A_{ii}^s$  описывает связь реакций и перемещений на  $i$ -ом конце стержня (примыкающем к  $i$ -тому узлу), блок  $A_{kk}^s$  – такую же связь на  $k$ -том конце стержня (примыкающем к  $k$ -тому узлу), а блоки  $A_{ik}^s$ ,  $A_{ki}^s$  связывают реакции и перемещения противоположных концов конечного элемента. Размер этих блоков определяется числом независимых перемещений узлов дискретной модели: для общего случая плоских стержневых систем оно равно трем, для ферм и балок (при отсутствии нагрузок вдоль осей балок) – двум.

При этом при рассмотрении общего случая плоских стержневых систем и в матрицах жесткости конечных элементов, которые присоединяются к узлам шарнирно (типы 2, 3, 4), блоки  $A_{ii}^s$ ,  $A_{ik}^s$ ,  $A_{ki}^s$ ,  $A_{kk}^s$  (2.47), соответствующие шарнирному соединению, целесообразно представлять на основе одного типоразмера  $3 \times 3$ , записывая строки и столбцы, соответствующие отсутствующим перемещениям (углам поворота в шарнирных узлах), равными нулю.

Такое единообразие формы записи позволяет правильно описывать любое присоединение конечных элементов к узлам, в том числе и в случаях, когда к узлам КЭ присоединяются одновременно как жестко, так и шарнирно (рис. 2.14).

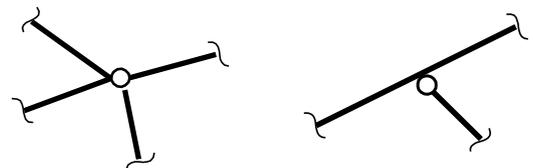


Рис. 2.14.

Матрицу жесткости системы (2.32) в соответствии с вышесказанным также можно структурно разделить на отдельные блоки  $A_{ik}$ , каждый из которых будет описывать реакции в  $i$ -ом узле от перемещений  $k$ -го узла рассматриваемой дискретной модели и в соответствии с числом перемещений и реакций в узле в общем случае плоской стержневой системы будет иметь порядок  $3 \times 3$ :

$$[K] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

При этом необходимо иметь в виду, что перемещение любого из узлов системы будет вызывать, как уже указывалось, деформации всех, присоединяющихся к этому узлу стержней (КЭ), и, следовательно, при определении реакций в этом узле от его же перемещений необходимо учитывать (суммировать) реакции от всех стержней, примыкающих к узлу, то есть блоки  $A_{ii}$  (с равными обоими индексами) матрицы  $[K]$  (в отличие от блоков  $A_{ik}$  – с разными индексами) будут представлять собой сумму соответствующих блоков  $A_{ii}^S$  матриц жесткости конечных элементов, примыкающих к  $i$ -тому узлу, а каждый из элементов  $k_{mj}$  блоков  $A_{ii}$  – сумму реакций  $r_{mj}^S$  от этих элементов (2.33). Положение каждого из блоков  $A_{ik}$  в матрице жесткости системы  $[K]$  (2.48) определяется номерами узлов, где номера строк соответствуют номерам узлов, в которых определяются реакции, а номера столбцов – номерам узлов, от перемещений которых определяются реакции. При этом каждый из блоков  $A_{ik}$  отвечает конкретному стержню с началом в узле  $i$  и концом в узле  $k$ . Если такого стержня ( $i - k$ ) нет, то соответствующий блок  $A_{ik}$  будет нулевым, и это будет говорить о том, что перемещение соответствующего  $k$ -того узла не вызывает непосредственно реакции в  $i$ -том узле.

Положение каждого из элементов  $r_{mj}^S$  блоков  $A_{ik}^S$  в общей матрице жесткости  $[K]$  можно легко определить, если ввести единую для всей расчетной дискретной модели нумерацию всех направлений возможных перемещений узлов (и соответственно реакций в узлах). Число этих перемещений будет определять порядок матрицы жесткости системы  $[K]$ . И если теперь пронумеровать все столбцы и строки матрицы  $[K]$ , то положение элементов  $k_{mj}$  (и  $r_{mj}^S$ ) будет определяться значениями их индексов:  $m$  будет соответствовать номеру строки, а  $j$  –

номеру столбца, на пересечении которых этот коэффициент должен находиться. В соответствии с указанным процесс формирования матрицы жесткости системы можно представить и графически. На рис. 2.15, 2.16 и 2.17 приведены примеры такого представления.

Например, в раме, изображенной на рис. 2.15а, в 3-ем узле, характеризующемся перемещениями в направлениях 7, 8 и 9 (рис. 2.15б), соединяется три стержневых конечных элемента (2, 3 и 4-ый). На схеме матрицы [K]

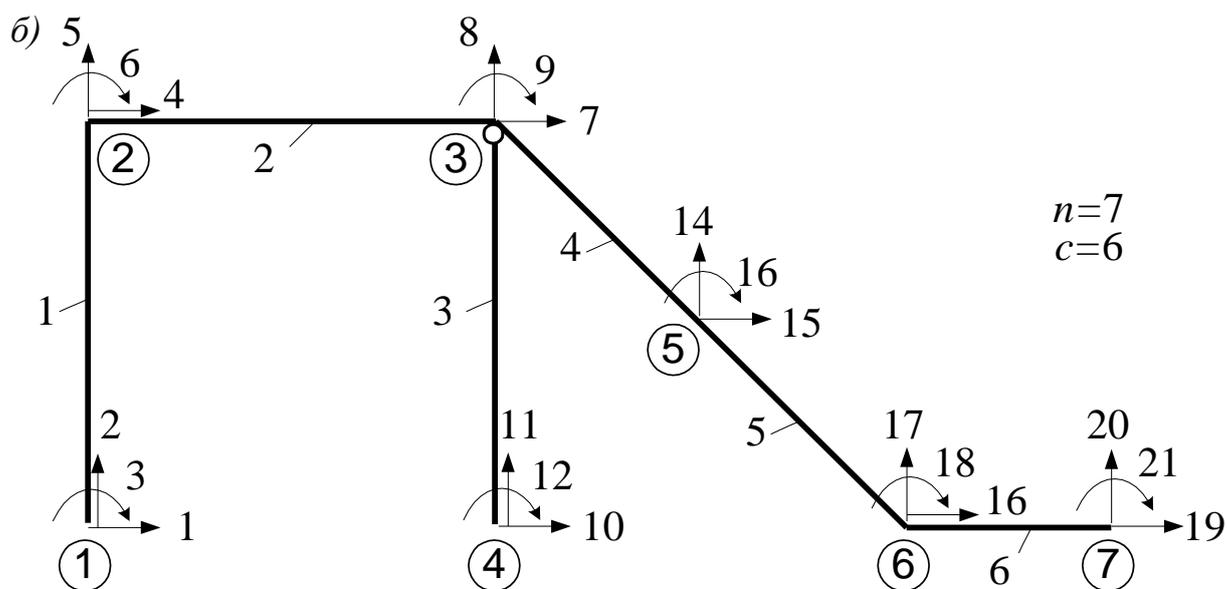
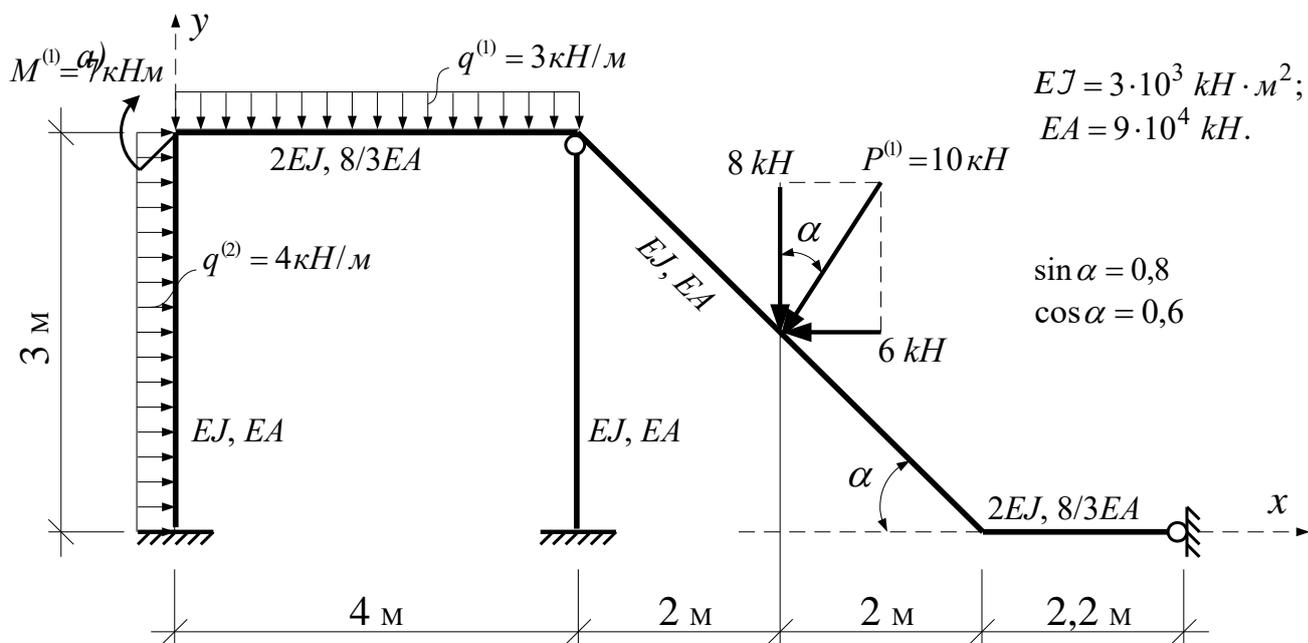


Рис. 2.15. Схема рамы и ее расчетная дискретная модель

(рис. 2.16) для дискретной модели рамы (рис. 2.15б) этому отвечает сумма (наложение) блоков  $A_{33}^2$ ,  $A_{33}^3$ ,  $A_{33}^4$  матриц жесткости соответственно 2, 3 и 4-го элементов в области пересечения 7, 8 и 9 строк и столбцов.

Блок же, например,  $A_{35}^4$  четвертого элемента (элемента 3–5) находится (рис. 2.16) на пересечении 7, 8, 9 строк, определяющих направление реакций в 3-ем узле, и 13, 14, 15 столбцов, представляющих направления перемещений 5-го узла, вызывающих эти реакции.

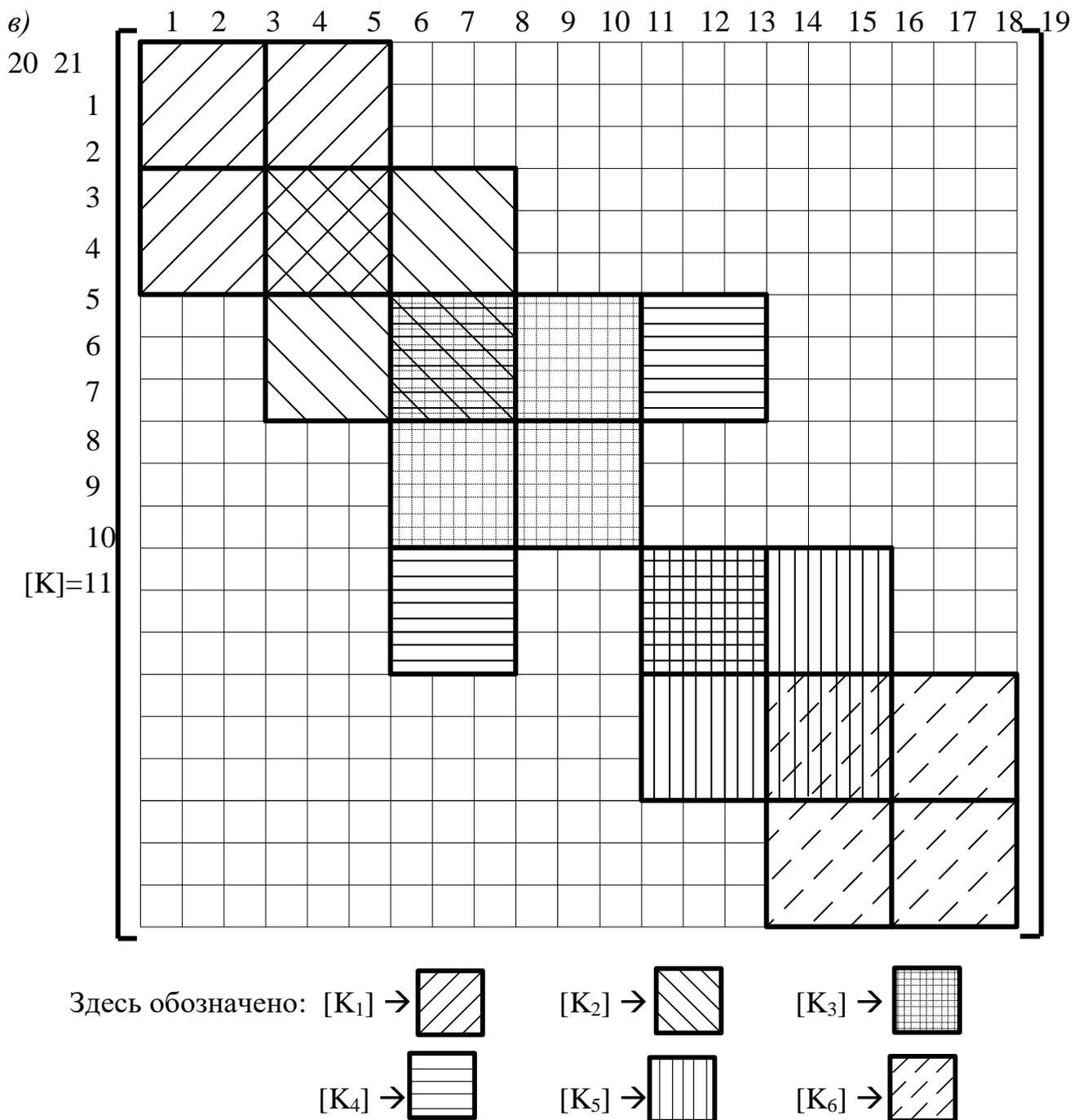


Рис. 2.16. Схема матрицы жесткости системы, представленной на рисунке 2.15

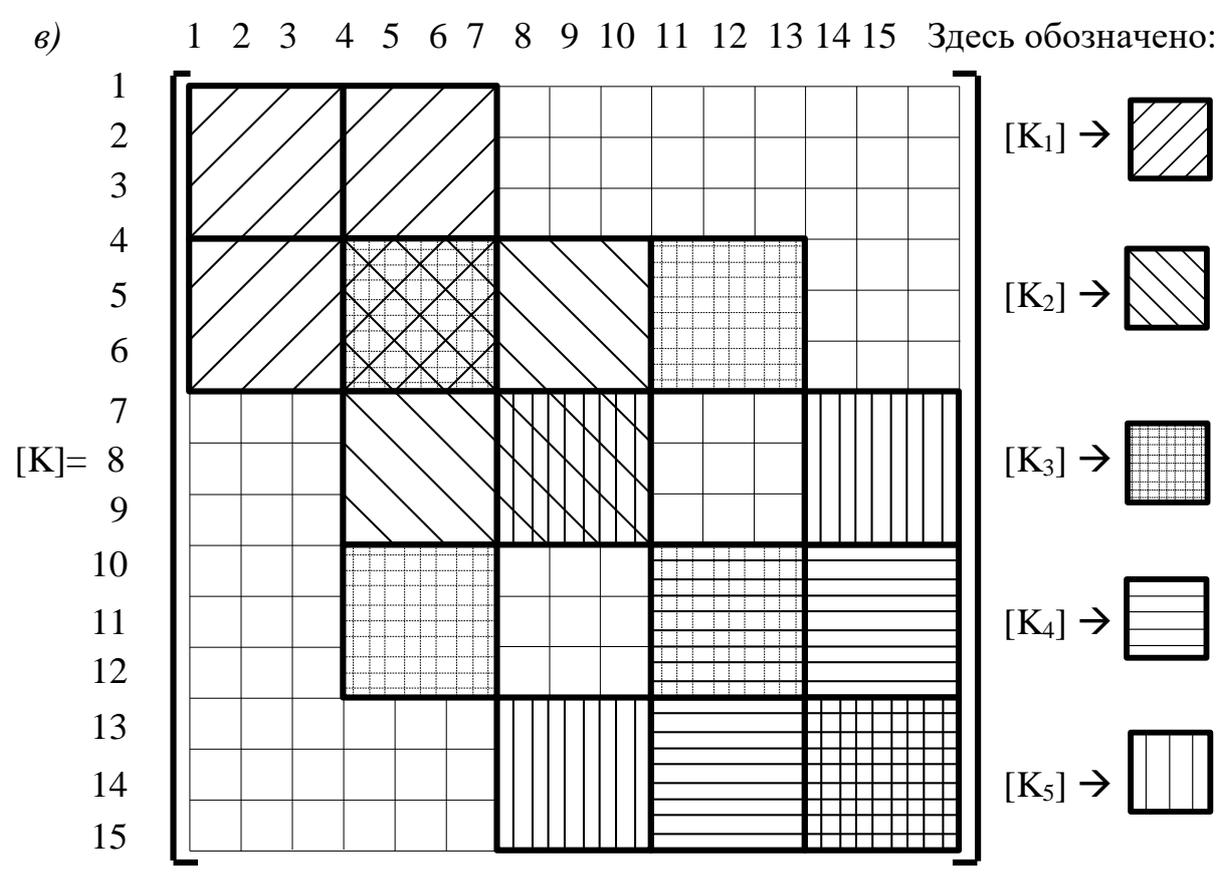
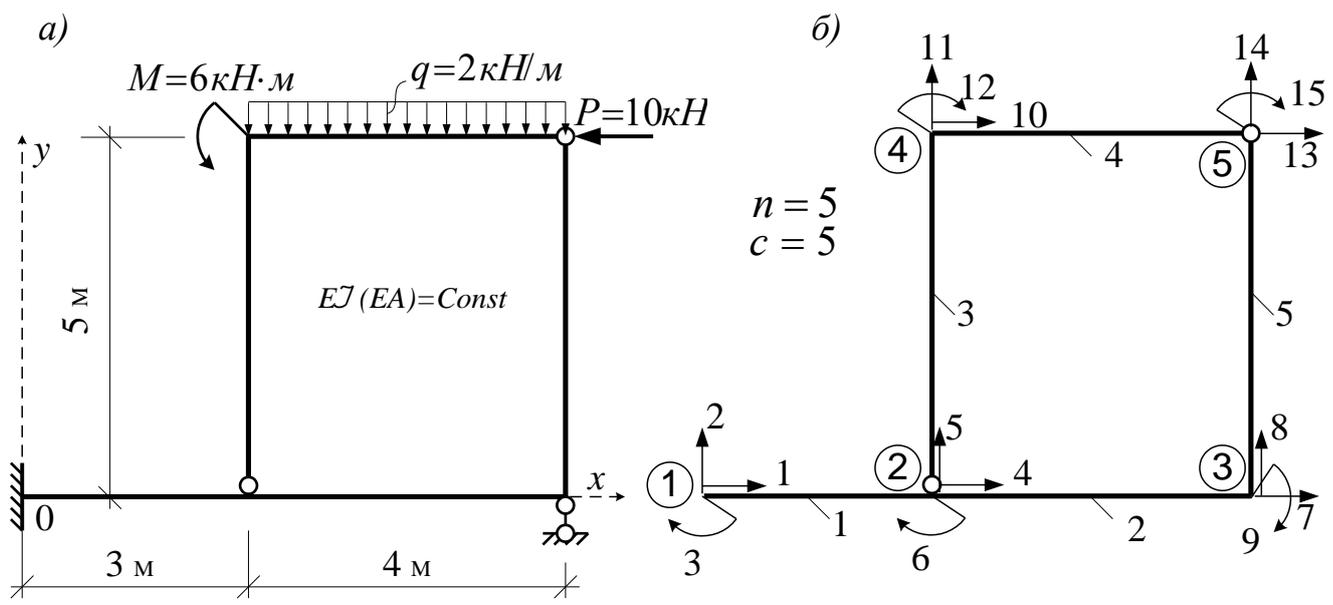


Рис. 2.17. Схема рамы (а), ее расчетная дискретная модель (б) и схема матрицы жесткости этой модели (в)

## 2.7. Усилия и перемещения конечного элемента

После определения перемещений узлов расчетной модели из решения системы уравнений (2.34) (либо (2.36)) усилия по концам КЭ могут быть определены с помощью выражения (2.17), подставляя в которое соотношение (2.39), получим

$$\{r'_s\} = [K'_s] \cdot \{\delta'_s\} = [K'_s] \cdot [T_{\alpha s}] \cdot \{\delta_s\} = [K'_s] \cdot [T_{\alpha s}] \cdot \{\Delta_s\},$$

то есть

$$\{r'_s\} = [K'_s] \cdot [T_{\alpha s}] \cdot \{\Delta_s\}. \quad (2.49)$$

При этом для элементов, на которые действуют распределенные нагрузки  $q_s$ , необходимо вычесть вектор узловых нагрузок от их действия в местной системе координат (рис. 2.10, 2.11)

$$\{r'_s\} = [K'_s] \cdot [T_{\alpha s}] \cdot \{\Delta_s\} - \{P'_{qs}\}, \quad (2.50)$$

учитывая, что они только заменяли действие распределенных нагрузок и в узлах заданной системы их нет.

Заметим, что для КЭ, для которых местная система координат совпадает по направлениям с общей системой координат расчетной модели, матрица преобразования  $[T_{\alpha s}]$  вырождается в единичную матрицу и выражения (2.49) и (2.50) упрощаются, принимая вид

$$\{r'_s\} = [K'_s] \cdot \{\Delta_s\}; \quad (2.51)$$

$$\{r'_s\} = [K'_s] \cdot \{\Delta_s\} - \{P'_{qs}\}. \quad (2.51')$$

Найденные по концам КЭ усилия прикладываем к соответствующим стержням с учетом их знаков (рис. 2.4) и определяем от их действия по обычным правилам строительной механики растянутые волокна (для изгиба) и знаки поперечных и продольных сил в крайних сечениях стержневого конечного элемента.

Определение изменения усилий внутри конечных элементов (построение эпюр этих усилий) можно выполнить, используя зависимости (2.11). Заметим, что для стержневых конечных элементов, которые мы здесь рассматриваем, зависимости изменения внутренних усилий в них нам хорошо известны:

– в стержнях, нагруженных только по торцам (в узлах), изгибающие моменты изменяются по линейным законам, а поперечные и продольные силы постоянны;

– в стержнях, на которые действуют равномерно распределенные нагрузки, поперечные и продольные силы изменяются по линейным законам, а изгибающие моменты – по параболическим законам.

Зная величины усилий по концам конечных элементов и используя указанные закономерности изменений внутренних усилий, несложно построить эпю-

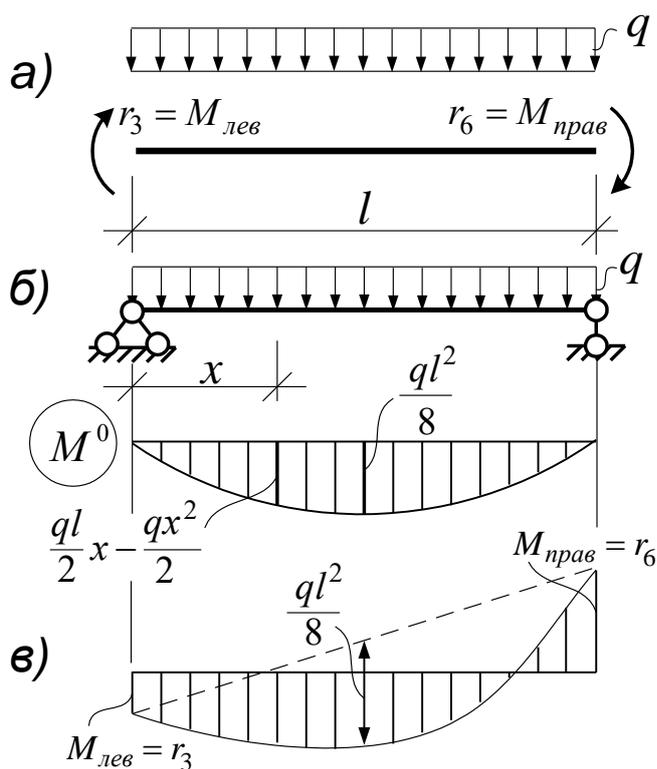


Рис. 2.18

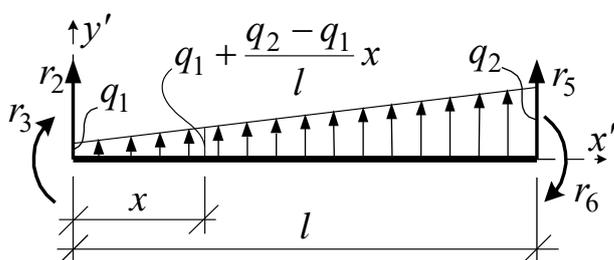


Рис. 2.19

известных дифференциальных зависимостей. Например, для конечного элемента (стержня), на который действует нагрузка, распределенная по трапецидальному закону (рис. 2.19), для поперечных перемещений будем иметь следующую дифференциальную зависимость

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left( r_3 + r_2 x + \frac{q_1}{2} x^2 + \frac{q_2 - q_1}{6l} x^3 \right),$$

проинтегрировав которую два раза

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EJ} \left( r_3 x + r_2 \frac{x^2}{2} + \frac{q_1}{6} x^3 + \frac{q_2 - q_1}{24l} x^4 \right) + C_1,$$

ры этих усилий в каждом из конечных элементов и соответственно во всей системе в целом. При этом для стержней, на которые действует равномерно распределенная нагрузка (рис. 2.18а), при построении эпюры изгибающих моментов (рис. 2.18в) необходимо к линейной эпюре, полученной соединением прямой линией ординат по концам стержня, добавить (подвесить) балочную эпюру  $M^0$  (рис. 2.18б).

Определение перемещений сечений внутри конечных элементов можно выполнить на основе зависимостей (2.9). Следует, правда, иметь в виду, что эти зависимости получены для конечных элементов (стержней), на которые внутри не действуют никакие нагрузки. В случае действия на КЭ распределенных нагрузок выражения для перемещений несложно получить на основе

$$y = \frac{1}{EJ} \left( r_3 \frac{x^2}{2} + r_2 \frac{x^3}{6} + \frac{q_1}{24} x^4 + \frac{q_2 - q_1}{120l} x^5 \right) + C_1 x + C_2$$

и найдя после подстановки в эти выражения граничных условий (при  $x=0$  –  $y = \delta_2$ ,  $\frac{dy}{dx} = -\delta_3$ ) постоянные интегрирования ( $C_1 = -\delta_3$ ;  $C_2 = \delta_2$ ), получим

$$u_2 = y = \delta_2 - \delta_3 x + \frac{1}{EJ} \left( r_3 \frac{x^2}{2} + r_2 \frac{x^3}{6} + \frac{q_1 x^4}{24} + \frac{q_2 - q_1}{120l} x^5 \right);$$

$$u_3 = \varphi = \frac{dy}{dx} = -\delta_3 + \frac{1}{EJ} \left( r_3 x + r_2 \frac{x^2}{2} + \frac{q_1 x^3}{6} + \frac{q_2 - q_1}{24l} x^4 \right). \quad (2.52)$$

Отметим, что выражения (2.52) представляют собой перемещения сечений КЭ в местной системе координат. Для перевода их в общую систему координат необходимо выполнить соответствующие преобразования.

## 2.8. Общая схема (порядок) расчета МКЭ

На основе изложенного в предыдущих разделах и в разделе 1.2 можно сформулировать следующий порядок расчета стержневых систем методом конечных элементов в форме метода перемещений:

1. Определение расчетной дискретной модели заданной стержневой системы (разделение ее на конечные элементы, назначение узлов) и описание ее структуры (нумерация узлов и стержней, определение их числа).

2. Выбор общей и местных систем координат и определение координат узлов в общей системе координат.

3. Составление вектора перемещений узлов расчетной дискретной модели заданной системы  $\{\Delta\}$ .

4. Идентификация конечных элементов (определение их типов, длин  $l_s$ , жесткостей  $E A_s$  и  $E J_s$  и установление соответствия между номерами стержней и номерами начального и конечного узлов для этих стержней).

5. Преобразование внешних нагрузок (преобразование пролетных равномерно распределенных нагрузок на стержни к узловым нагрузкам, преобразование сосредоточенных узловых сил из местных систем в общую систему координат, определение суммарных узловых сил в каждом узле дискретной модели).

6. Построение матриц жесткости конечных стержневых элементов  $[K'_s]$  в местных системах координат.

7. Определение для каждого конечного элемента направляющих синусов и

косинусов ( $\sin \alpha_s$  и  $\cos \alpha_s$ ) и составление матриц преобразования.  $[T_{\alpha_s}]$

8. Получение матриц жесткости элементов  $[K_s]$  в общей системе координат.

9. Формирование матрицы жесткости  $[K]$  всей системы в общей системе координат.

10. Получение системы разрешающих уравнений путем учета граничных условий (наличия опорных связей); при этом может быть использована диагональная матрица  $[E_1]$  (2.34) либо простое вычеркивание строк и столбцов, соответствующих нулевым перемещениям (2.36).

11. Решение системы разрешающих уравнений и определение узловых перемещений  $\{\Delta\}$  расчетной модели.

12. Определение узловых перемещений  $\{\delta'_s\}$  и усилий  $\{r'_s\}$  для конечных элементов.

13. Определение усилий и перемещений в конечных элементах, построение эпюр внутренних усилий в системе и определение ее деформированного вида.

## 2.9. Пример расчета

Покажем процедуру метода конечных элементов на примере расчета рамы, представленной на рис. 2.20.

1. Расчетная дискретная модель заданной рамы представлена на рис. 2.21 и состоит из трех стержневых КЭ, соединенных между собой и с основанием с помощью четырех узлов.

2. Общая и местные системы координат показаны на рис. 2.21.

3. Все возможные перемещения узлов дискретной модели показаны на рис. 2.22, при этом для узла 2 опущен угол поворота, в котором вследствие конструктивной особенности узла (шарнир) не может быть поворота. Ряд из представленных перемещений узлов будут равны нулю в связи с наличием в узлах опорных связей, то есть  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_6 = \Delta_9 = \Delta_{10} = \Delta_{11} = 0$ . Неизвестными останутся только четыре перемещения –  $\Delta_4$ ,  $\Delta_5$ ,  $\Delta_7$  и  $\Delta_8$ . Вектор перемещений расчетной дискретной модели показана в (2.53).

4. Идентификация конечных элементов:

**1-ый КЭ:** тип 2;  $l_1 = 4$  м;  $\alpha_1 = 90^\circ$ ;  $EJ_1 = 1000$  кН·м<sup>2</sup>;  $EA_1 = 10000$  кН;

**2-ой КЭ:** тип 3;  $l_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  м;  $\alpha_2 = 323,13^\circ$ ;  $EJ_2 = 2000$  кН·м<sup>2</sup>;  $EA_2 = 20000$  кН;

**3-ий КЭ:** тип 1;  $l_3 = 1$  м;  $\alpha_3 = 270^\circ$ ;  $EJ_3 = 1000$  кН·м<sup>2</sup>;  $EA_3 = 10000$  кН.

5. На рассматриваемую раму действует одна сосредоточенная сила – в узле 2 и на 2-ой КЭ равномерно распределенная нагрузка, которую преобразовываем согласно рис. 2.10в к узловым нагрузкам – это преобразование показано на рис. 2.23. Там же показано приведение этих нагрузок к общей системе координат. В результате матрицы узловых нагрузок в местных системах координат для 1-го и 3-го конечных элементов будут нулевыми, а для 2-го КЭ согласно рис. 2.10в будет иметь вид, показанный в выражении (2.55). Полная матрица узловых нагрузок в глобальной системе координат согласно (2.37) будет иметь вид, представленный в выражении (2.53).

6. Матрицы жесткости конечных элементов в местных системах координат вычисляются для 1-го КЭ согласно (2.22), для 2-го КЭ согласно (2.23) и для 3-го КЭ согласно (2.20) и имеет вид, представленный в выражениях соответственно (2.54) ÷ (2.56).

7. Матрицы преобразованных координат  $[T_\alpha]$  для конечных элементов получим, если в (2.40) подставим:

- для 1-го КЭ:  $\sin \alpha_1 = \sin 90^\circ = 1$ ;  $\cos \alpha_1 = 0$ ;
- для 2-го КЭ:  $\sin \alpha_2 = \sin 323,13^\circ = -0,6$ ;  $\cos \alpha_2 = 0,8$ ;
- для 3-го КЭ:  $\sin \alpha_3 = \sin 270^\circ = -1$ ;  $\cos \alpha_3 = 0$ .

8. Матрицы жесткости в общей системе координат вычисляются для 1, 2 и 3 конечных элементов соответственно по выражениям (2.45), (2.46) и (2.44). Учитывая, что в разрешающей системе уравнений будут вычеркиваться строки и столбцы, соответствующие нулевым перемещениям в направлениях опорных связей, нам не обязательно знать все элементы матриц жесткости конечных элементов, формирующих матрицу жесткости системы, а достаточно вычислить только элементы их, соответствующие строкам и столбцам, оставшимся после этого вычеркивания, и отвечающие ненулевым перемещениям узлов в дискретной модели системы. Эти элементы на структурной схеме матрицы жесткости рассматриваемой системы в (2.53) отмечены кружками.

С учетом сказанного вычислим только отдельные элементы матриц жесткости конечных элементов в общей системе координат:

для 1-го КЭ (2.45):

$$k_{44}^1 = \frac{EA_1}{l_1} \cos^2 \alpha_1 + \frac{3EJ_1}{l_1^3} \sin^2 \alpha_1 = \frac{10000}{4} \cos^2 90^\circ + \frac{3 \cdot 1000}{4^3} \sin^2 90^\circ = 46,875;$$

$$k_{45}^1 = k_{54}^1 = \left( \frac{EA_1}{l_1} - \frac{3EJ_1}{l_1^3} \right) \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = 0; \quad k_{55}^1 = \frac{EA_1}{l_1} \sin^2 \alpha_1 + \frac{3EJ_1}{l_1^3} \cos^2 \alpha_1 = 2500;$$

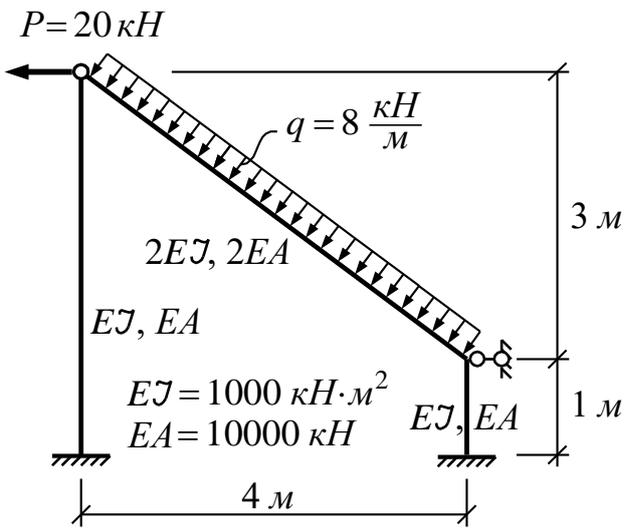


Рис. 2.20

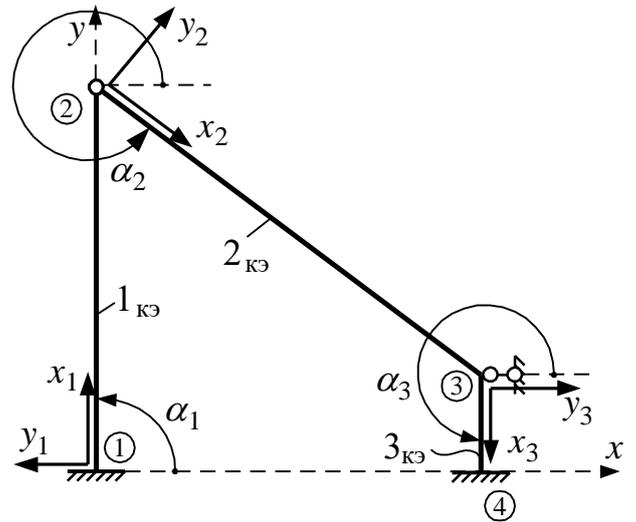


Рис. 2.21

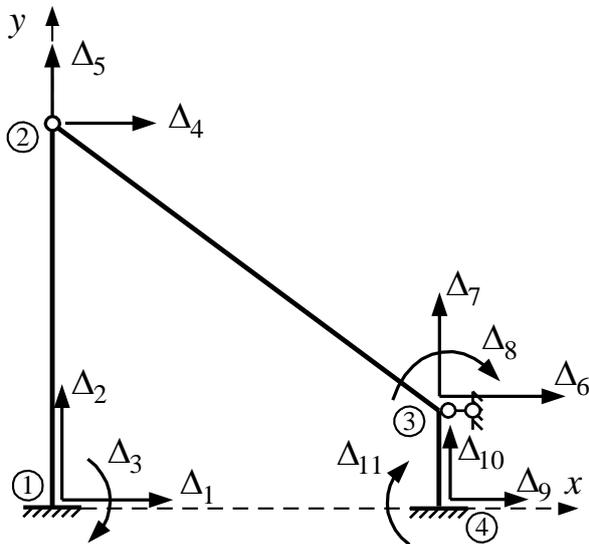


Рис. 2.22

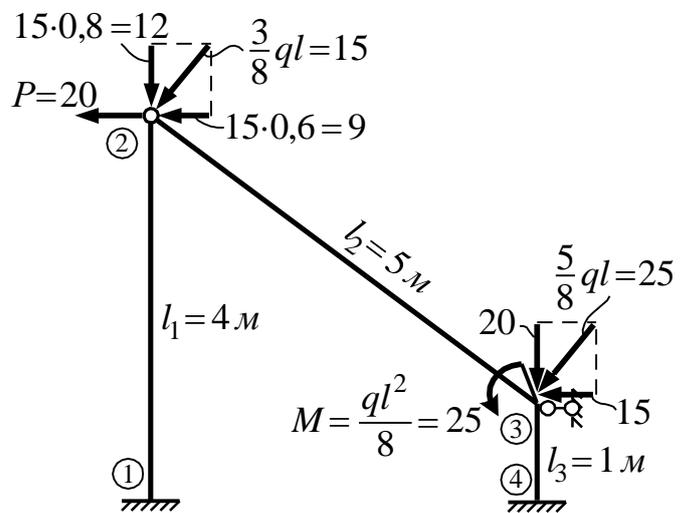


Рис. 2.23

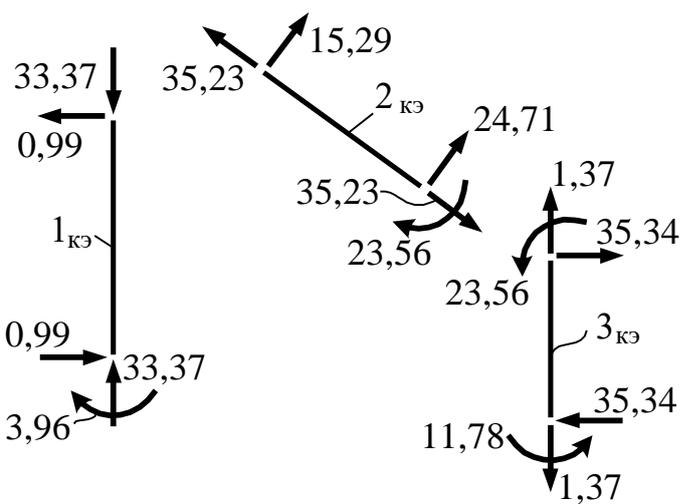


Рис. 2.24

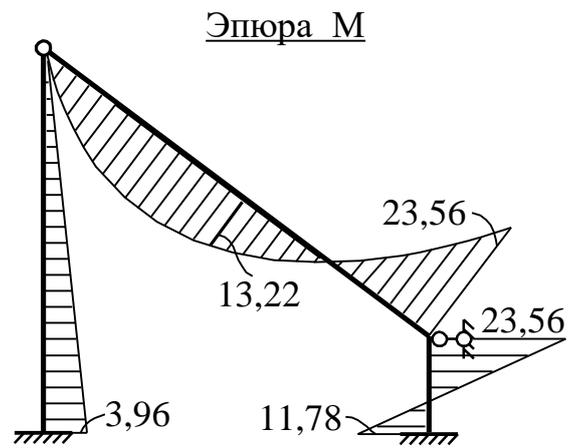


Рис. 2.25

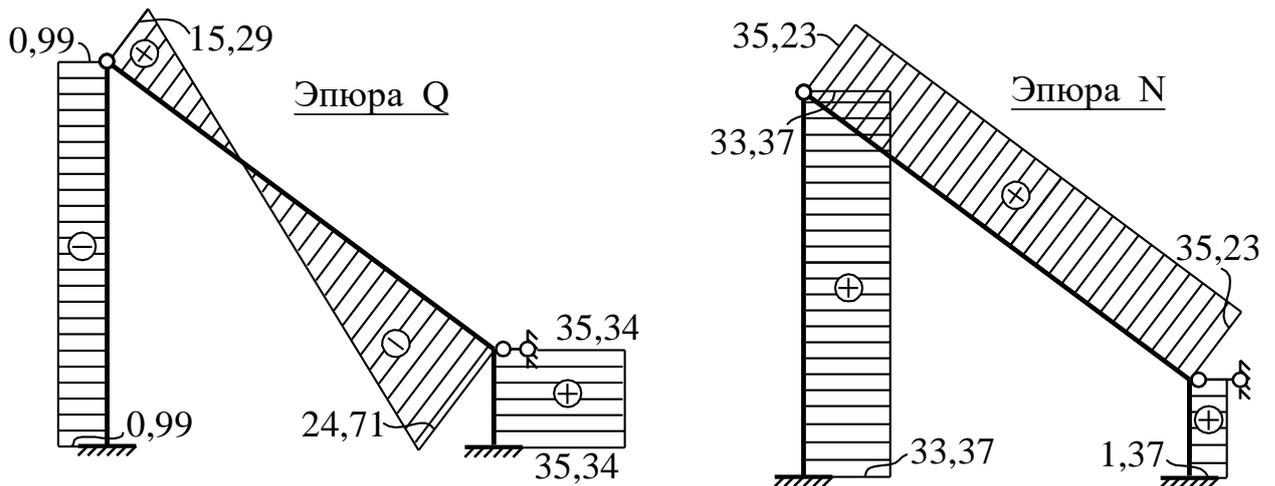


Рис. 2.26

**для 2-го КЭ (2.46):**

$$k_{44}^2 = \frac{EA_2}{l_2} \cos^2 \alpha_2 + \frac{3EJ_2}{l_2^3} \sin^2 \alpha_2 = \frac{20000}{5} \cos^2 323,13^\circ + \frac{3 \cdot 2000}{5^3} \sin^2 323,13^\circ = 2577,28; a$$

аналогично получим:

$$k_{45}^2 = k_{54}^2 = -1896,96; \quad k_{55}^2 = 1470,72; \quad k_{47}^2 = k_{74}^2 = 1896,96; \quad k_{48}^2 = k_{84}^2 = -144; \\ k_{57}^2 = k_{75}^2 = -1470,72; \quad k_{58}^2 = k_{85}^2 = -192; \quad k_{77}^2 = 1470,72; \quad k_{78}^2 = k_{87}^2 = 192; \quad k_{88}^2 = 1200.$$

**для 3-го КЭ (2.44):**

$$k_{77}^3 = \frac{EA_3}{l_3} \sin^2 \alpha_3 + \frac{12EJ_3}{l_3^3} \cos^2 \alpha_3 = \frac{10000}{1} \sin^2 270^\circ + \frac{12 \cdot 1000}{1^3} \cos^2 270^\circ = 10000;$$

$$\text{аналогично } k_{78}^3 = k_{87}^3 = 0; \quad k_{88}^3 = 4000.$$

9. Схема полной системы разрешающих уравнений рассматриваемой рамы вида  $[K] \cdot \{\Delta\} = \{P\}$  со структурной схемой матрицы жесткости расчетной дискретной модели имеет вид

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ 0 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -29 \\ -12 \\ -15 \\ -20 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.53)$	
1												$[K_1] \rightarrow$
2												$[K_2] \rightarrow$
3												$[K_3] \rightarrow$
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												

10. После вычеркивания в (2.53) 1, 2, 3, 6, 9, 10, 11 строк и столбцов, соответствующих, исходя из граничных условий, нулевым перемещениям, получим систему четырех уравнений относительно  $\Delta_4$ ,  $\Delta_5$ ,  $\Delta_7$  и  $\Delta_8$ , коэффициенты которой в соответствии с (2.33) и (2.53) будут равны:

$$\begin{aligned} k_{44} &= k_{44}^1 + k_{44}^2 = 46,875 + 2577,28 = 2624,155; \\ k_{45} &= k_{45}^1 + k_{45}^2 = 0 + (-1896,96) = -1896,96; \\ k_{55} &= k_{55}^1 + k_{55}^2 = 2500 + 1470,72 = 3970,72; \\ k_{47} &= k_{47}^2 = 1896,96; \quad k_{48} = k_{48}^2 = -144; \\ k_{77} &= k_{77}^2 + k_{77}^3 = 1470,72 + 10000 = 11470,72 \quad \text{и т.д.} \end{aligned}$$

В результате система разрешающих уравнений принимает вид

$$\begin{cases} 2624,155 \Delta_4 - 1896,96 \Delta_5 + 1896,96 \Delta_7 - 144 \Delta_8 = -29; \\ -1896,96 \Delta_4 + 3970,72 \Delta_5 - 1470,72 \Delta_7 - 192 \Delta_8 = -12; \\ 1896,96 \Delta_4 - 1470,72 \Delta_5 + 11470,72 \Delta_7 + 192 \Delta_8 = -20; \\ -144 \Delta_4 - 192 \Delta_5 + 192 \Delta_7 + 5200 \Delta_8 = -25. \end{cases}$$

11. Решая эту систему уравнений, найдем:

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= -21,12 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}; \quad \Delta_5 = -13,347 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}; \quad \Delta_7 = 0,137 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}; \\ \Delta_8 &= -5,89 \cdot 10^{-3} \text{ (рад)}. \end{aligned}$$

Полный транспонированный вектор перемещений будет иметь вид

$$\{\Delta\}^T = \{0 \ 0 \ 0 \ -21,12 \cdot 10^{-3} \ -13,347 \cdot 10^{-3} \ 0 \ 0,137 \cdot 10^{-3} \ -5,89 \cdot 10^{-3} \ 0 \ 0 \ 0\}.$$

Определяем усилия по концам конечных элементов рамы.

Для **1-го элемента** согласно (2.49) получим:

$$\begin{aligned} \{r'_1\} &= [K'_1] \cdot [T_{\alpha 1}] \cdot \{\Delta_1\} = \begin{bmatrix} 2500 & 0 & 0 & -2500 & 0 \\ 0 & 46,875 & -187,5 & 0 & -46,875 \\ 0 & -187,5 & 750 & 0 & 187,5 \\ -2500 & 0 & 0 & 2500 & 0 \\ 0 & -46,875 & 187,5 & 0 & 46,875 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -21,12 \cdot 10^{-3} \\ -13,347 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 33,367 \\ -0,99 \\ 3,96 \\ -33,367 \\ 0,99 \end{Bmatrix}. \quad (2.54) \end{aligned}$$

Для **2-го элемента** согласно (2.50) будем иметь:

$$\{r'_2\} = [K'_2] \cdot [T_{\alpha 2}] \cdot \{\Delta_2\} - \{P'_{q2}\} = \begin{bmatrix} 4000 & 0 & -4000 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & 0 & -48 & -240 \\ -4000 & 0 & 4000 & 0 & 0 \\ 0 & -48 & 0 & 48 & 240 \\ 0 & -240 & 0 & 240 & 1200 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -21,12 \cdot 10^{-3} \\ -13,347 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0,137 \cdot 10^{-3} \\ -5,89 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ -15 \\ 0 \\ -25 \\ -25 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -35,228 \\ 15,287 \\ 35,228 \\ 24,712 \\ 23,562 \end{Bmatrix}. \quad (2.55)$$

Для **3-го элемента** согласно (2.49) найдем:

$$\{r'_3\} = [K'_3] \cdot [T_{\alpha 3}] \cdot \{\Delta_3\} = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & -10000 & 0 & 0 \\ 0 & 12000 & -6000 & 0 & 12000 & -6000 \\ 0 & -6000 & 4000 & 0 & 6000 & 2000 \\ -10000 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & 12000 & 6000 & 0 & 12000 & 6000 \\ 0 & -6000 & 2000 & 0 & 6000 & 4000 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,137 \cdot 10^{-3} \\ -5,89 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1,37 \\ 35,34 \\ -23,56 \\ 1,37 \\ -35,34 \\ -11,78 \end{Bmatrix}. \quad (2.56)$$

Схемы действия усилий по концам конечных элементов представлены на рис. 2.24.

12. Окончательные эпюры внутренних усилий  $M$ ,  $Q$  и  $N$ , построенные согласно вычисленным усилиям по концам КЭ и с учетом известных закономерностей изменений усилий в пределах КЭ и правил знаков, показаны на рис. 2.25, 2.26.

## 2.10. Особенности расчета МКЭ балок

Балки представляют собой стержневые системы, в которых стержни располагаются по одной прямой друг за другом, соединяясь друг с другом последовательно, и при соответствующем выборе общей системы координат (при направлении оси  $x$  вдоль осей балок) для них будут совпадать общая и местная системы координат, в связи с чем в расчетах балок методом конечных элементов появятся следующие упрощения:

1) углы поворота  $\alpha$  для всех КЭ будут равны нулю и матрица преобразования  $[T_\alpha]$  (2.40) вырождается в единичную диагональную матрицу, поэтому во всех зависимостях, где она использовалась, ее можно просто опустить;

2) перемещения и реакции в узлах дискретной модели и по концам конечных элементов будут одинаковы в общей и в местных системах координат (поэтому штрихи в обозначениях соответствующих величин в местных системах координат также можно опустить);

3) матрицы жесткости КЭ в общей системе координат будут равны матрицам жесткости их в местных системах координат;

4) в связи с последовательным соединением конечных элементов между собой в балке матрица жесткости системы в целом при последовательной нумерации узлов и КЭ, чем и нужно пользоваться, будет иметь ленточный характер – матрицы жесткости КЭ в ней будут располагаться друг за другом по диагонали.

Следует заметить, что балки обычно работают только на вертикальные нагрузки, и в этом случае в них будут отсутствовать продольные деформации и соответственно перемещения узлов вдоль осей балок, в связи с чем возникнет еще ряд упрощений:

1) число неизвестных перемещений в узлах уменьшается и будет равно двум, а число перемещений и усилий по концам балочных КЭ становится соответственно равным четырем:

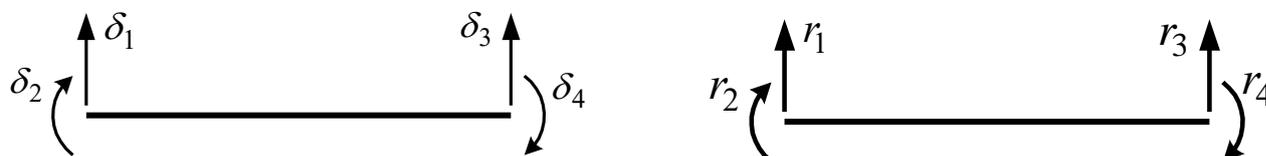


Рис. 2.27

2) соответственно упрощаются и матрицы жесткости конечных элементов, они уменьшаются в размере и их можно получить из соответствующих матриц жесткости КЭ для произвольных стержневых систем (2.20), (2.22), (2.23), (2.24), вычеркнув первый и четвертый столбцы и соответственно первую и четвертую

строки; размер их будет 4x4 элемента.

Рассмотрим ниже **пример расчета** неразрезной балки, представленной на рис. 2.28а. Расчетная дискретная модель этой балки показана на рис. 2.28б, при этом равномерно распределенная нагрузка на 3-ий КЭ приведена к узловым нагрузкам на соседние узлы согласно зависимостям (см. рис. 2.10). Все возможные перемещения узлов дискретной модели представлены на рис. 2.28в.

Структурная схема матрицы жесткости расчетной дискретной модели, состоящей из трех конечных элементов, представлена на схеме полной системы разрешающих уравнений  $[K] \cdot \{\Delta\} = \{P\}$  для рассматриваемой балки

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix}
 \text{diag} & & & & & & & \\
 & \text{diag} & & & & & & \\
 & & \text{diag} & & & & & \\
 & & & \text{diag} & & & & \\
 & & & & \text{diag} & & & \\
 & & & & & \text{diag} & & \\
 & & & & & & \text{diag} & \\
 & & & & & & & \text{diag}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{Bmatrix}; \text{ где } \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_4 \\ 0 \\ \Delta_6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \{P\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -12,5 \\ 12,5 \\ -7,5 \\ 0 \end{Bmatrix}; (2.57)
 \end{matrix}$$

и где обозначено: – матрица жесткости 1-го КЭ;  
 – матрица жесткости 2-го КЭ; – матрица жесткости 3-го КЭ.

Такое представление полной системы разрешающих уравнений МКЭ удобно в связи с тем, что в общем-то нам не нужно знать все коэффициенты матрицы жесткости системы, а нужно знать только ее элементы, которые остаются после вычеркивания в ней строк и столбцов, соответствующих нулевым перемещениям узлов, в связи с наличием по этим направлениям опорных связей (номера этих строк и столбцов определяются номерами нулевых перемещений). То есть в системе уравнений должны остаться только элементы, соответствующие перемещениям, которые явно не равны нулю. Для рассматриваемой системы в связи с наличием в соответствующих направлениях опорных связей будут равны нулю перемещения  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_5, \Delta_7$ , будет также равно нулю перемещение  $\Delta_8$ , как угол поворота в шарнирном узле, и соответственно на схеме (2.57) должны быть вычеркнуты 1, 2, 3, 5, 7, 8-я строки и 1, 2, 3, 5, 7, 8-ой столбцы.

В результате система разрешающих уравнений (2.57), представленная в виде (2.36)

$$[K^*] \cdot \{\Delta^*\} = \{P^*\},$$

будет

$$\begin{bmatrix} k_{44} & k_{46} \\ k_{64} & k_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_4 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_4 \\ P_6 \end{Bmatrix}, \quad (2.58)$$

или

$$\begin{cases} k_{44} \cdot \Delta_4 + k_{46} \cdot \Delta_6 = P_4; \\ k_{64} \cdot \Delta_4 + k_{66} \cdot \Delta_6 = P_6. \end{cases} \quad (2.58')$$

Такой подход составления систем разрешающих уравнений будем использовать и далее.

Коэффициенты  $k_{ij}$  в (2.58) определим сложением соответствующих коэффициентов  $r_{ij}^s$  из матриц жесткости отдельных (s-тых) КЭ, которые в структурной матрице жесткости системы лежат (накладываются друг на друга) в зонах элементов  $k_{ij}$  (в (2.57) выделены кружками). Матрицы жесткости конечных элементов здесь имеют вид:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} r_{11}^1 & r_{12}^1 & r_{13}^1 & r_{14}^1 \\ r_{21}^1 & r_{22}^1 & r_{23}^1 & r_{24}^1 \\ r_{31}^1 & r_{32}^1 & r_{33}^1 & r_{34}^1 \\ r_{41}^1 & r_{42}^1 & r_{43}^1 & \underline{\underline{r_{44}^1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1875EJ & -0,375EJ & -0,1875EJ & -0,375EJ \\ -0,375EJ & EJ & 0,375EJ & 0,5EJ \\ -0,1875EJ & 0,375EJ & 0,1875EJ & 0,375EJ \\ -0,375EJ & 0,5EJ & 0,375EJ & \underline{\underline{EJ}} \end{bmatrix};$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} r_{33}^2 & r_{34}^2 & r_{35}^2 & r_{36}^2 \\ r_{43}^2 & \underline{\underline{r_{44}^2}} & r_{45}^2 & \underline{\underline{r_{46}^2}} \\ r_{53}^2 & r_{54}^2 & r_{55}^2 & r_{56}^2 \\ r_{63}^2 & \underline{\underline{r_{64}^2}} & r_{65}^2 & \underline{\underline{r_{66}^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5EJ & -1,5EJ & -1,5EJ & -1,5EJ \\ -1,5EJ & \underline{\underline{2EJ}} & 1,5EJ & \underline{\underline{EJ}} \\ -1,5EJ & 1,5EJ & 1,5EJ & 1,5EJ \\ -1,5EJ & \underline{\underline{EJ}} & 1,5EJ & \underline{\underline{2EJ}} \end{bmatrix};$$

$$[K_3] = \begin{bmatrix} r_{55}^3 & r_{56}^3 & r_{57}^3 & r_{58}^3 \\ r_{65}^3 & \underline{r_{66}^3} & r_{67}^3 & r_{68}^3 \\ r_{75}^3 & r_{76}^3 & r_{77}^3 & r_{78}^3 \\ r_{85}^3 & r_{86}^3 & r_{87}^3 & r_{88}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,048EJ & -0,24EJ & -0,48EJ & 0 \\ -0,24EJ & \underline{1,2EJ} & 0,24EJ & 0 \\ -0,048EJ & 0,24EJ & 0,048EJ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Элементы  $r_{ij}^s$ , через которые определяются коэффициенты  $k_{ij}$ , в представленных матрицах подчеркнуты. В результате будем иметь:

$$\begin{aligned} k_{44} &= r_{44}^1 + r_{44}^2 = EJ + 2EJ = 3EJ; \\ k_{46} &= k_{64} = r_{46}^2 = EJ; \\ k_{66} &= r_{66}^2 + r_{66}^3 = 2EJ + 1,2EJ = 3,2EJ. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Подставляя эти значения в (2.55'), получим систему уравнений

$$\begin{cases} 3EJ\Delta_4 + EJ\Delta_6 = 6; \\ EJ\Delta_4 + 3,2EJ\Delta_6 = 12,5, \end{cases}$$

решая которую найдем

$$\Delta_4 = \frac{0,779}{EJ}; \quad \Delta_6 = \frac{3,663}{EJ}.$$

Усилия в конечных элементах рассматриваемой балки вычислим согласно зависимостям (2.51) для 1-го и 2-го КЭ и (2.51') для 3-го КЭ:

$$\begin{aligned} \{r_1\} = [K_1] \cdot \{\Delta_1\} &= \begin{bmatrix} 0,1875EJ & -0,375EJ & -0,1875EJ & -0,375EJ \\ -0,375EJ & EJ & 0,375EJ & 0,5EJ \\ -0,1875EJ & 0,375EJ & 0,1875EJ & 0,375EJ \\ -0,375EJ & 0,5EJ & 0,375EJ & EJ \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,779 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} -0,292 \\ 0,390 \\ 0,292 \\ 0,779 \end{Bmatrix}; \end{aligned}$$

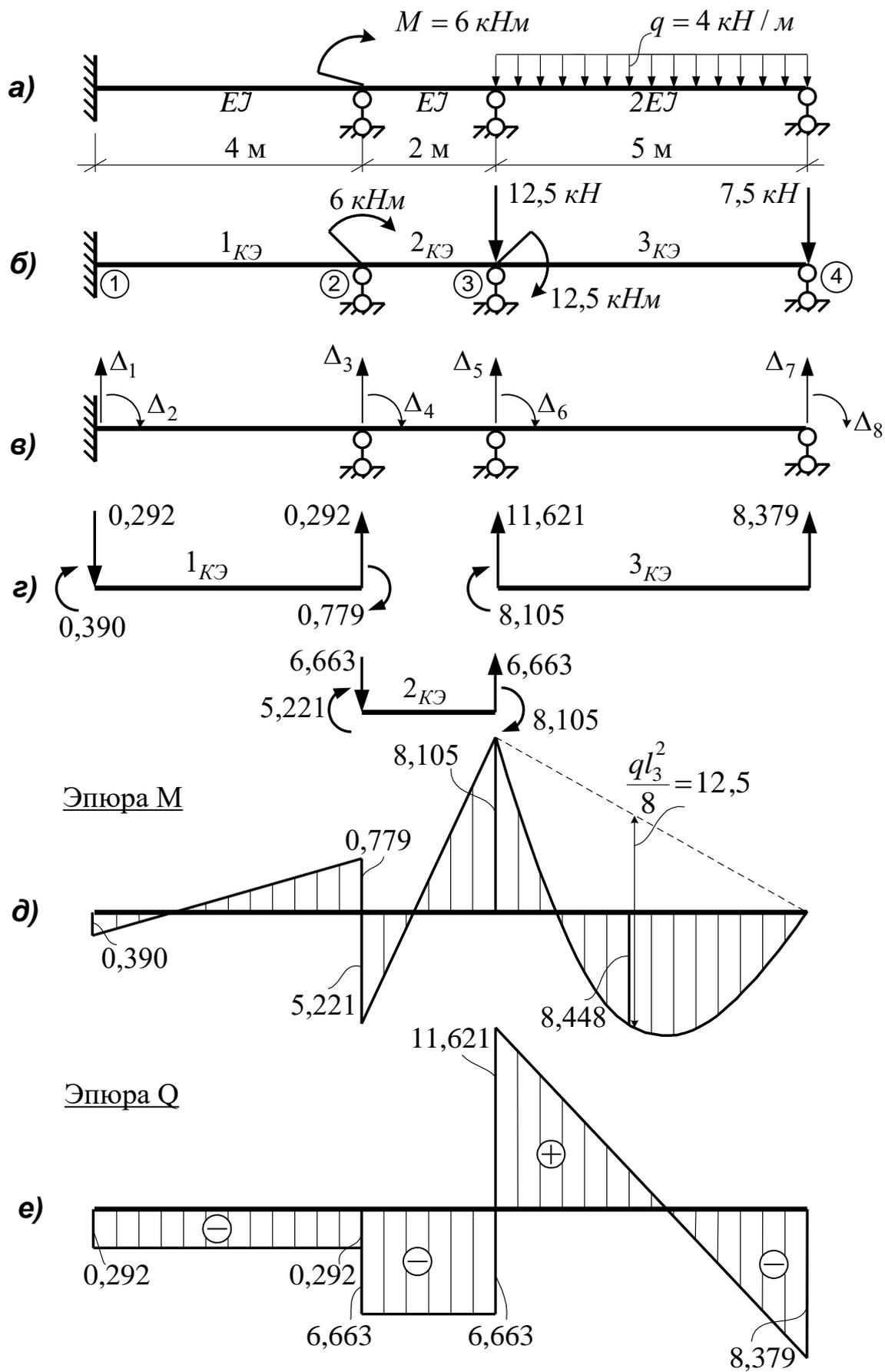


Рис. 2.28

$$\{r_2\} = [K_2] \cdot \{\Delta_2\} = \begin{bmatrix} 1,5EJ & -1,5EJ & -1,5EJ & -1,5EJ \\ -1,5EJ & 2EJ & 1,5EJ & EJ \\ -1,5EJ & 1,5EJ & 1,5EJ & 1,5EJ \\ -1,5EJ & EJ & 1,5EJ & 2EJ \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,779 \\ 0 \\ 3,663 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6,663 \\ 5,221 \\ 6,663 \\ 8,105 \end{Bmatrix};$$

$$\{r_3\} = [K_3] \cdot \{\Delta_3\} = \begin{bmatrix} 0,048EJ & -0,24EJ & -0,048EJ & 0 \\ -0,24EJ & 1,2EJ & 0,24EJ & 0 \\ -0,048EJ & 0,24EJ & 0,048EJ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3,663 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -12,5 \\ 12,5 \\ -7,5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11,621 \\ -8,105 \\ 8,379 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Вычисленные по концам КЭ усилия приложим к соответствующим КЭ (см. рис. 2.28г) и, учитывая известный характер изменения усилий внутри стержневых конечных элементов (см. раздел 2.7), получим эпюры изгибающих моментов М и поперечных сил Q в рассматриваемой неразрезной балке (рис. 2.28д, е).

Заметим, что для третьего конечного элемента типа 2, имеющего справа шарнирное соединение, изгибающий момент в шарнирном узле явно равен нулю, поэтому в матрице жесткости  $[K_3]$  последние строка и столбец нулевые. Шарнирный узел имеет только две степени свободы и может свободно поворачиваться, вследствие чего такой узел не воспринимает сосредоточенных моментов, а поворот его не вызывает никаких реакций в присоединяемых к нему элементах, и поэтому угол поворота в шарнирном узле можно принять равным нулю. В соответствии с этим в векторах  $\{\Delta\}$ ,  $\{P\}$  будут равны нулю последние элементы. Понимая это, при записи указанных матриц можно опускать нулевые строку и столбец, что в дальнейшем будем также использовать.

## 2.11. Особенности расчета МКЭ плоских ферм

На расчетных схемах ферм (в связи с идеализацией их работы и пренебрежением изгибающими моментами и поперечными силами) соединение стержней (конечных элементов) в узлах принимается шарнирным, вследствие чего повороты в узлах ферм в этом случае будут равны нулю (как и изгибающие моменты). Все конечные элементы будут иметь одинаковый тип – тип 4, но в сравнении с полной формой записи (2.24) в матрицах жесткости можно вычеркнуть третий и шестой столбцы и строки. В результате для плоского ферменного КЭ матрица жесткости в местной системе координат будет иметь вид:

$$[K'_9] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.60)$$

матрица преобразования координат примет вид

$$[T_\alpha] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

а матрица жесткости КЭ в общей системе координат запишется в виде

$$[K_9] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha \\ \frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha \\ -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha \\ -\frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

В остальном принципы расчета ферм МКЭ не отличаются от вышеизложенных.

Рассмотрим пример расчета ферменной системы, показанной на рис. 2.29а.

а) заданная система

б) расчетная дискретная модель

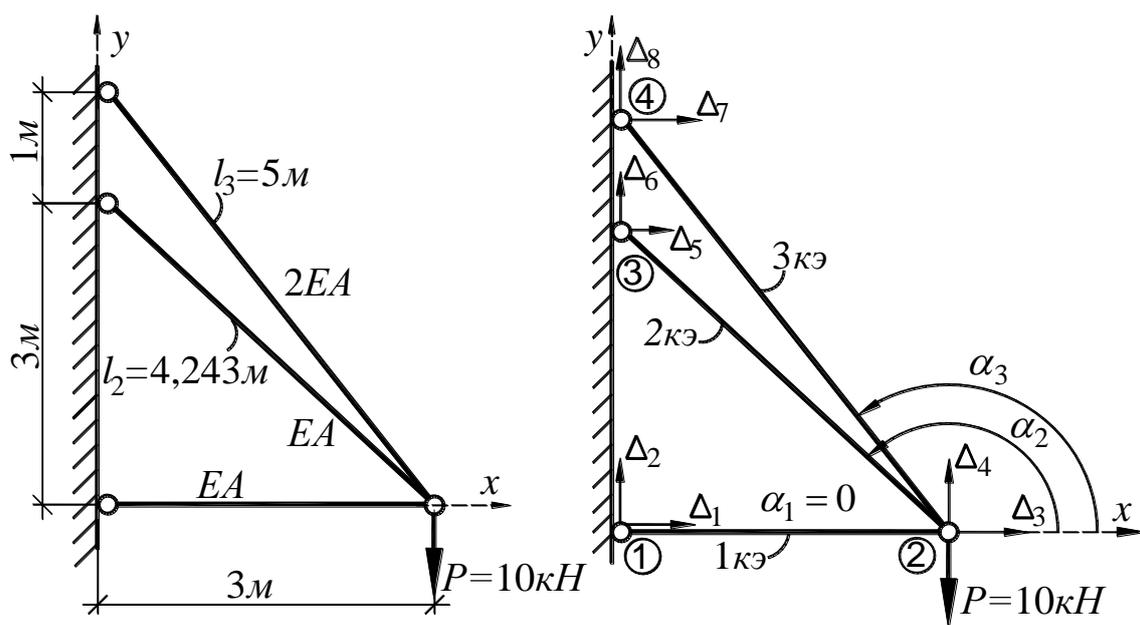


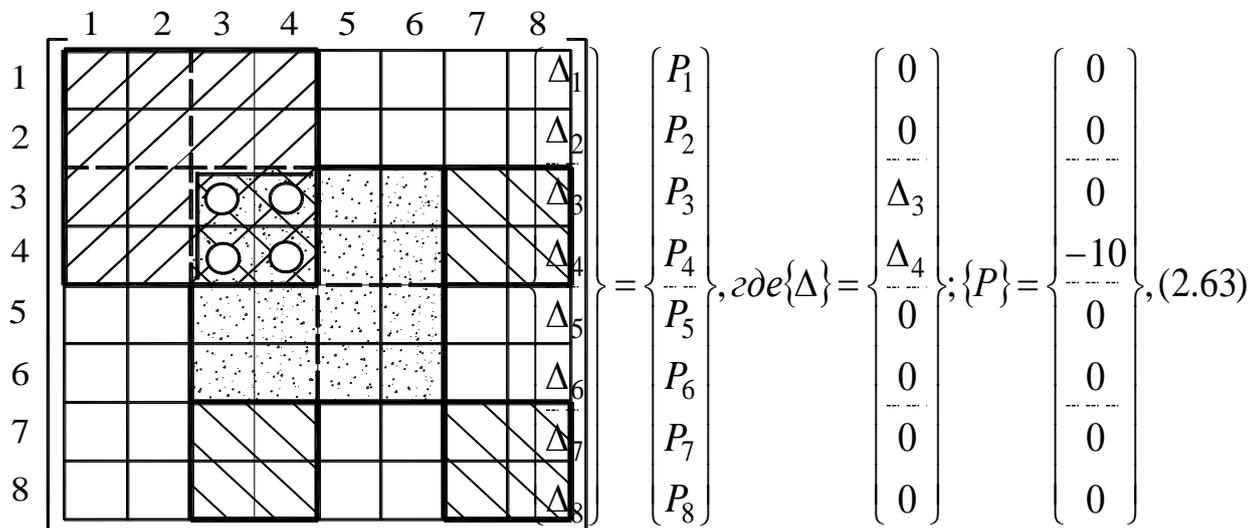
Рис. 2.29

Расчетная дискретная модель этой системы с обозначением узлов, конечных элементов и всех возможных перемещений узлов показана на рис. 2.29б.

Ниже представлена схема полной системы разрешающих уравнений вида

$$[K]\{\Delta\}=\{P\}$$

с использованием структурной матрицы жесткости



и где обозначено:



– матрица жесткости 1-го КЭ;



– матрица жесткости 2-го КЭ;



– матрица жесткости 3-го КЭ;

В связи с наличием в узлах 1, 3 и 4 опорных связей, препятствующих линейным смещениям этих узлов, перемещения  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_5$ ,  $\Delta_6$ ,  $\Delta_7$  и  $\Delta_8$  будут равны нулю. Соответственно в матрице жесткости системы нужно вычеркнуть 1, 2, 5, 6, 7, 8 строки и столбцы, а в матрицах  $\{\Delta\}$  и  $\{P\}$  – соответствующие строки. Останутся только перемещения  $\Delta_3$  и  $\Delta_4$  узла 2 и система уравнений

$$[K^*]\{\Delta^*\}=\{P^*\}$$

будет содержать только два уравнения

$$\begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$

или

$$\begin{cases} k_{33}\Delta_3 + k_{34}\Delta_4 = 0; \\ k_{43}\Delta_3 + k_{44}\Delta_4 = -10. \end{cases} \quad (2.64')$$

Коэффициенты  $k_{ij}$  этой системы уравнений вычислим сложением соответствующих коэффициентов  $r_{ij}^s$  из матриц жесткости отдельных ( $s$ -ых) КЭ в об-

щей системе координат (2.62), которые накладываются друг на друга в области перемещений  $\Delta_3$  и  $\Delta_4$ , то есть из матриц жесткости стержней, примыкающих к узлу 2, к которому здесь присоединяются все три стержня системы:

$$k_{33} = r_{33}^1 + r_{33}^2 + r_{33}^3 = \frac{EA_1}{l_1} \cos^2 \alpha_1 + \frac{EA_2}{l_2} \cos^2 \alpha_2 + \frac{EA_3}{l_3} \cos^2 \alpha_3 =$$

$$= \frac{EA}{3} \cdot 1^2 + \frac{EA}{4,243} \cdot (-0,707)^2 + \frac{2EA}{5} \cdot (-0,6)^2 = 0,5952EA;$$

$$k_{34} = k_{43} = r_{34}^1 + r_{34}^2 + r_{34}^3 = \frac{EA_1}{l_1} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \frac{EA_2}{l_2} \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \frac{EA_3}{l_3} \sin \alpha_3 \cos \alpha_3 =$$

$$= \frac{EA}{3} \cdot 0 \cdot (-1) + \frac{EA}{4,243} \cdot 0,707 \cdot (-0,707) + \frac{2EA}{5} \cdot 0,8 \cdot (-0,6) = -0,3098EA;$$

$$k_{44} = r_{44}^1 + r_{44}^2 + r_{44}^3 = \frac{EA_1}{l_1} \sin^2 \alpha_1 + \frac{EA_2}{l_2} \sin^2 \alpha_2 + \frac{EA_3}{l_3} \sin^2 \alpha_3 =$$

$$= \frac{EA}{3} \cdot 0 + \frac{EA}{4,243} \cdot 0,707^2 + \frac{2EA}{5} \cdot 0,8^2 = 0,3738EA.$$

Подставляя эти значения в систему уравнений (2.64')

$$\begin{cases} 0,5952EA \cdot \Delta_3 - 0,3098EA \cdot \Delta_4 = 0; \\ -0,3098EA \cdot \Delta_3 + 0,3738EA \cdot \Delta_4 = -10 \end{cases}$$

и решая её, найдём

$$\Delta_3 = -\frac{24,53}{EA}; \quad \Delta_4 = -\frac{47,061}{EA}.$$

Усилия в отдельных конечных элементах (стержнях) фермы вычисляем, используя зависимость (2.49)

$$\{r'_s\} = [K'_s] [T_\alpha] \{\Delta_s\},$$

где матрицы  $[K'_s]$  и  $[T_\alpha]$  имеют вид, представленной соответственной в (2.60) и (2.61). Заметим, что для 1-го КЭ общая и местная системы координат совпадают ( $\alpha_1 = 0$ ), поэтому матрица  $[T_\alpha]$  вырождается в единичную матрицу, и её можно опустить. Усилия в этом случае можно определять, как уже указывалось (см. раздел 2.7), по формуле

$$\{r'_s\} = [K'_s] \{\Delta_s\}.$$



## 2.12. Расчет МКЭ рам без учета продольных деформаций

В классических методах расчета – методе сил, методе перемещений, смешанном методе, продольные деформации не учитываются в связи с их малым влиянием на расчетные величины (на перемещения и усилия), хотя следует заметить, что часто это влияние бывает не таким уж и малым и может существенно влиять на величины усилий в системах. Метод конечных элементов в рассматриваемой выше форме позволяет учесть это влияние и получить, таким образом, более точные значения внутренних усилий.

Однако и методом конечных элементов можно выполнять расчёты сооружений без учёта продольных деформаций, что может существенно уменьшить число неизвестных и понизить порядок разрешающих уравнений. При таком подходе, который рассматривается ниже, вводятся следующие упрощения и корректировка в методе расчета:

Стержни (КЭ) считаются нерастяжимыми ( $EA \rightarrow \infty$ ), вследствие чего линейные перемещения узлов, которые возможны только за счет продольного деформирования стержней, принимаются равными нулю.

Конечные элементы (стержни) ввиду бесконечной величины их продольной жесткости будут нерастяжимыми, то есть будут иметь балочный тип – перемещения и реакции по концам КЭ в направлениях осей  $x'$ ,  $x$  будут отсутствовать (рис. 2.31). Поэтому в матрицах жесткости КЭ в местных системах координат  $[K'_s]$  по аналогии с КЭ балочного типа (см. раздел 2.10) вычёркиваются первый и четвертый столбцы и первая и четвертая строки (можно, конечно, их

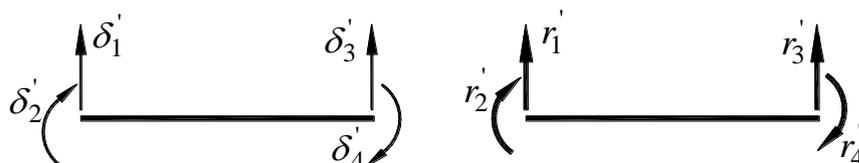


Рис. 2.31

просто обнулить, имея в виду, что в узлах дискретной модели в общей системе координат перемещений и реакций и при таком подходе будет по три).

Бесконечная продольная жесткость стержней не исключает всех линейных перемещений узлов – линейные смещения узлов, которые связаны с изгибом примыкающих стержней, будут иметь место (см., например, смещения  $\Delta_4$  и  $\Delta_{12}$  в раме на рис. 2.32). Поэтому для учета взаимодействия узлов между собой при их возможных линейных смещениях в матрицах жесткости конечных элементов в общей системе координат, формирующих общую матрицу жесткости расчетной модели, нельзя просто отбросить продольную жесткость – ее здесь целесо-

образно либо оставить в общем виде (в виде  $EA$ ), учитывая, что величина её очень велика (стремится к бесконечности), либо записать как бесконечность ( $\infty$ ). При решении системы разрешающих уравнений эта величина ( $EA = \infty$ ), как увидим ниже в примере расчета, будет исключаться из уравнений.

При вычеркивании первой и четвертой строк и столбцов в матрицах  $[K'_9]$  необходимо также вычеркнуть первую и четвертую строки в матрицах  $[T_{\alpha_9}]$ , учитывая переход от двух перемещений и реакций в узлах конечных элементов в местных системах координат к трем перемещениям узлов системы в общей системе координат.

Отметим, что при таком подходе нельзя получить в расчетной модели процедурой МКЭ эпюру продольных сил  $N$ . Её здесь можно построить по эпюре  $Q$  способом вырезания узлов, как это делается в классических методах сил и перемещений.

Рассмотрим реализацию указанных подходов на примере расчёта рамы, представленной на рис. 2.32а. Расчётная дискретная модель этой рамы, включающая шесть узлов и пять конечных элементов, представлена на рис. 2.32б. Приведение равномерно распределённой нагрузки на третий КЭ (тип 2) к узловым нагрузкам в местной системе координат, согласно рис. 2.10б, показано на рис. 2.32а. Результат преобразования этих нагрузок к узловым нагрузкам в общей системе координат показан на рис. 2.32б. Общее число неизвестных узловых перемещений в расчётной дискретной модели равно шестнадцати. Исключив нулевые перемещения по направлениям 1, 2, 3, 10, 11, 14, 15 и 16, по которым имеются опорные связи, получим в случае учета продольных деформаций стержней восемь неизвестных перемещений узлов ( $\Delta_4, \Delta_5, \Delta_6, \Delta_7, \Delta_8, \Delta_9, \Delta_{12}$  и  $\Delta_{13}$ ); при неучёте же продольных деформаций нулю будут равны также перемещения  $\Delta_5, \Delta_7, \Delta_8$  и  $\Delta_{13}$ , и останутся неизвестными четыре перемещения –  $\Delta_4, \Delta_6, \Delta_9$  и  $\Delta_{12}$ . Таким образом, для данной рамы число неизвестных перемещений узлов при неучете продольных деформаций конечных элементов уменьшается в два раза.

Идентификация конечных элементов:

**1-ый КЭ (1-2)** – тип 1,  $l_1=2\text{м}$ ,  $\alpha_1=90^\circ$ ;    **4-ый КЭ (2-5)** – тип 2,  $l_4=3\text{м}$ ,  $\alpha_4=0^\circ$ ;

**2-ой КЭ (2-3)** – тип 1,  $l_2=2\text{м}$ ,  $\alpha_2=90^\circ$ ;    **5-ый КЭ (5-6)** – тип 3,  $l_5=2\text{м}$ ,  $\alpha_5=270^\circ$ .

**3-ий КЭ (3-4)** – тип 2,  $l_3=\sqrt{3^2 + 4^2}=5\text{м}$ ,  $\alpha_3=36,87^\circ$ ;

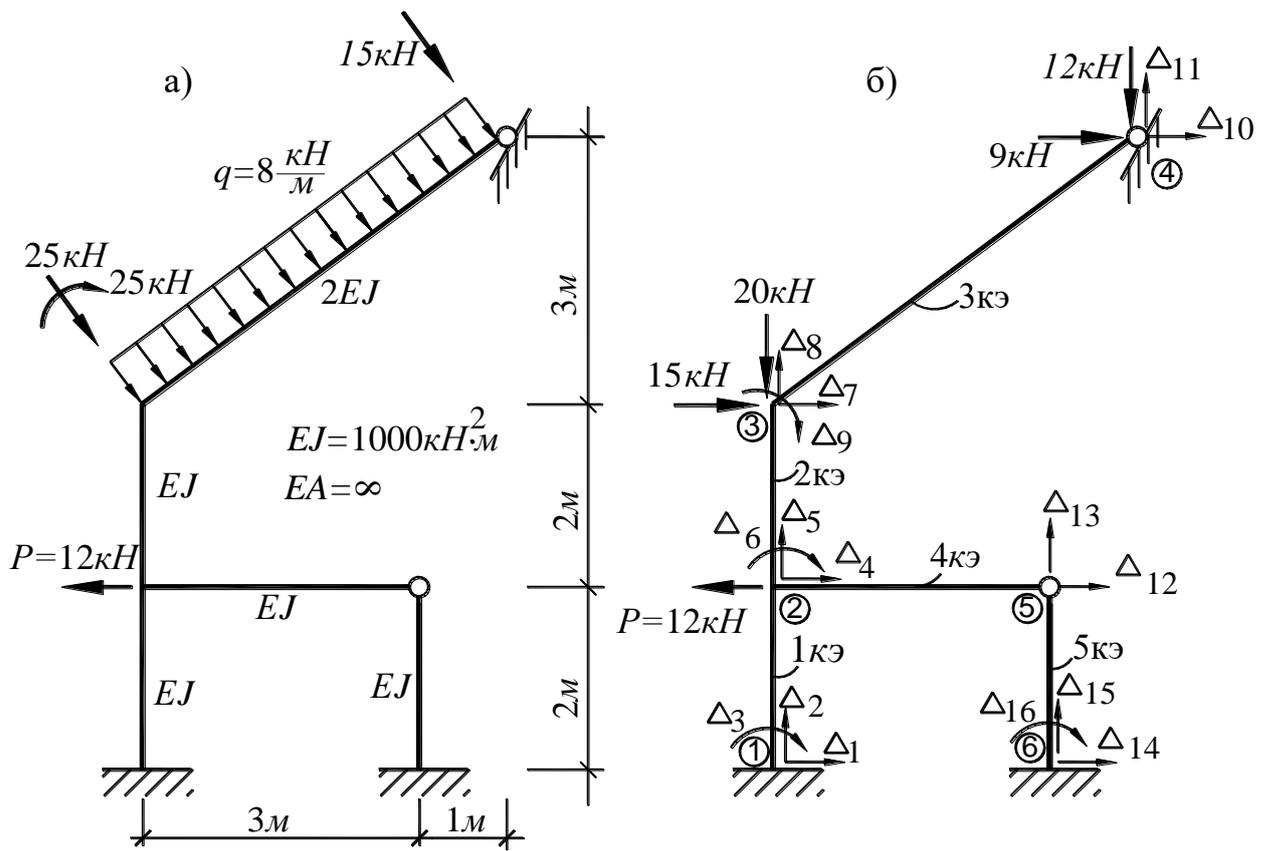


Рис. 2.32

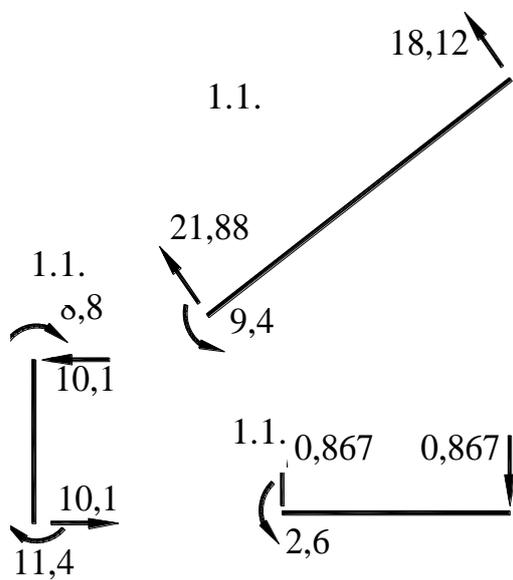


Рис. 2.33

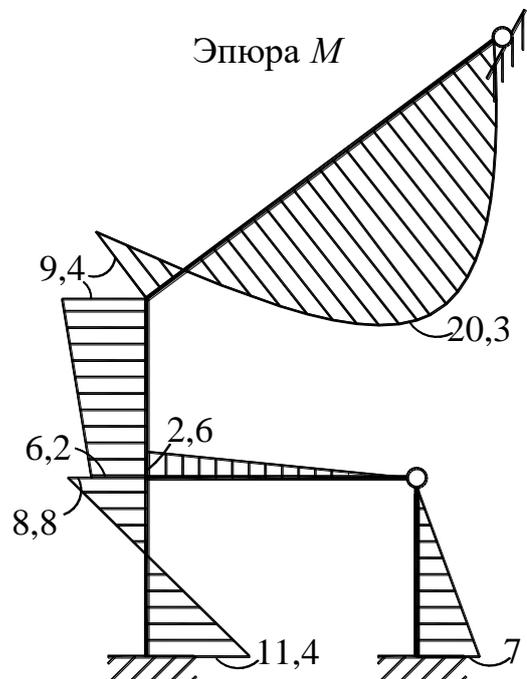


Рис. 2.34

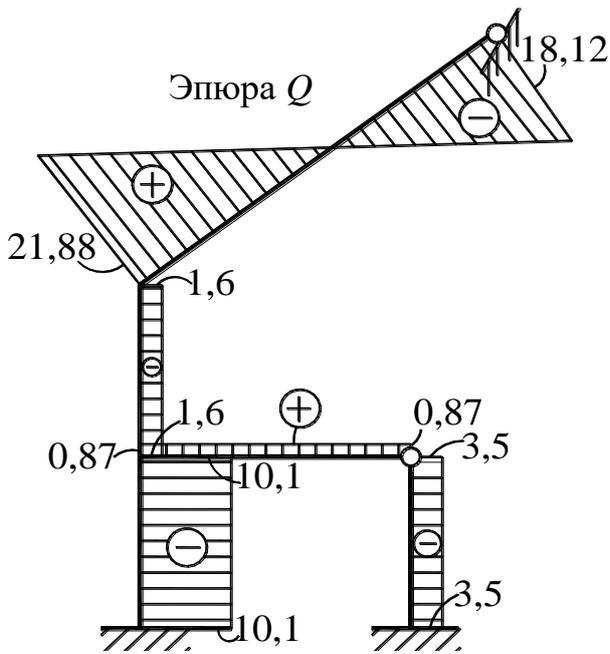


Рис. 2.35

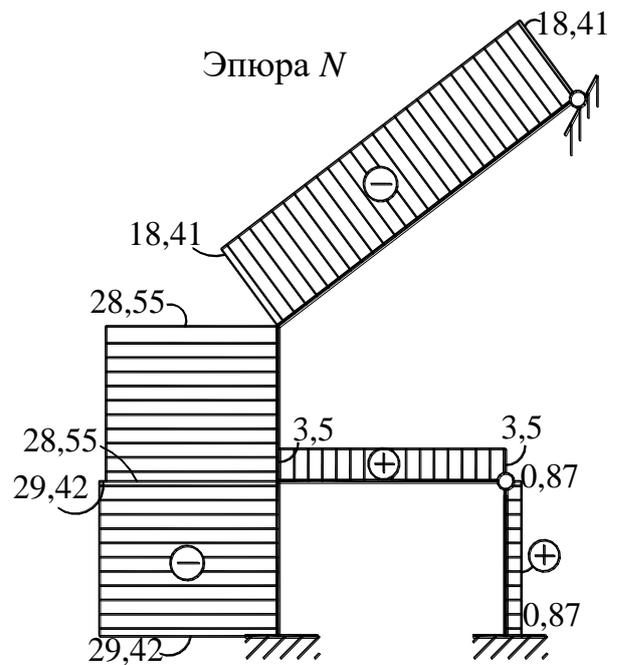


Рис. 2.36

Схема полной системы разрешающих уравнений  $[K]\{\Delta\}=\{P\}$ , в которой матрица жесткости расчетной модели показана в виде её структурной схемы, имеет вид

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		
1																	0	0
2																	0	0
3																	0	0
4																	$\Delta_4$	-12
5																	0	0
6																	$\Delta_6$	0
7																	0	-15
8																	0	-20
9																	$\Delta_9$	25
10																	0	9
11																	0	-12
12																	$\Delta_{12}$	0
13																	0	0
16																	0	0
15																	0	0
16																	0	0

(2.65)

где обозначено:  $[K_1]$  –  $[K_2]$  –  $[K_3]$  –  $[K_4]$  –  $[K_5]$  –

Кружками в (2.65) обозначены элементы матрицы жесткости, которые остаются после вычеркивания строк и столбцов, соответствующих нулевым перемещениям в направлениях имеющих связей, и входят в разрешающую систему уравнений вида  $[K^*]\{\Delta^*\}=\{P^*\}$ .

Эти элементы будут равны:

$$\begin{aligned}
 k_{44} &= k_{44}^1 + k_{44}^2 + k_{44}^3 + k_{44}^4 + k_{44}^5 \\
 k_{44}^4 &= \left( \frac{12EJ}{l_1^3} \sin^2 \alpha_1 + 0 \right) + \left( \frac{12EJ}{l_2^3} \sin^2 \alpha_2 + 0 \right) + \left( \frac{EA}{l_3} \cos^2 \alpha_3 + 0 \right) = \\
 &= \frac{12 \cdot 1000}{2^3} \cdot 1^2 + \frac{12 \cdot 1000}{2^3} \cdot 1^2 + \frac{EA}{3} \cdot 1^2 = 3000 + 0,333EA; \\
 k_{46} &= k_{64} = k_{46}^1 + k_{46}^2 + k_{46}^4 = \left( -\frac{6EJ}{l_1^2} \cdot 1 \right) + \left( \frac{6EJ}{l_2^2} \cdot 1 \right) + 0 = 0; \\
 k_{49} &= k_{94} = k_{49}^2 = \frac{6EJ}{l_2^2} \sin \alpha_2 = \frac{6 \cdot 1000}{2^2} \sin 90^\circ = 1500; \\
 k_{4,12} &= k_{12,4} = k_{12,4}^2 = -\frac{EA}{l_4} \cos^2 \alpha_4 - \frac{3EJ}{l_4^3} \sin^2 \alpha_4 = -\frac{EA}{3} \cdot 1^2 + 0 = -0,333EA; \\
 k_{66} &= k_{66}^1 + k_{66}^2 + k_{66}^3 = \frac{4EJ}{l_1} + \frac{4EJ}{l_2} + \frac{3EJ}{l_4} = \frac{4 \cdot 1000}{2} + \frac{4 \cdot 1000}{2} + \frac{3 \cdot 1000}{3} = 5000; \\
 k_{69} &= k_{96} = k_{69}^2 = \frac{2EJ}{l_2} = \frac{2 \cdot 1000}{2} = 1000; \\
 k_{99} &= k_{99}^2 + k_{99}^3 = \frac{4EJ}{l_2} + \frac{3 \cdot (2EJ)}{l_3} = \frac{4 \cdot 1000}{2} + \frac{3 \cdot (2 \cdot 1000)}{5} = 3200; \\
 k_{9,12} &= k_{12,9} = 0; \\
 k_{12,12} &= k_{12,12}^4 + k_{12,12}^5 \\
 k_{12,12}^5 &= \left( \frac{EA}{l_4} \cos^2 \alpha_4 + 0 \right) + \left( 0 + \frac{3EJ}{l_5^3} \sin^2 \alpha_5 \right) = \frac{EA}{3} \cdot 1^2 + \frac{3 \cdot 1000}{2^3} \cdot 1^2 = \\
 &= 0,333EA + 375.
 \end{aligned}$$

Разрешающая система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases}
 (3000 + 0,333EA) \cdot \Delta_4 + 1500 \cdot \Delta_9 - 0,333EA \cdot \Delta_{12} = -12; \\
 5000 \cdot \Delta_6 + 1000 \cdot \Delta_9 = 0; \\
 1500 \cdot \Delta_4 + 1000 \cdot \Delta_6 + 3200 \cdot \Delta_9 = 25; \\
 -0,333EA \cdot \Delta_4 + (0,333EA + 375) \cdot \Delta_{12} = 0.
 \end{cases}$$

Из последнего уравнения с учетом бесконечной величины продольной

жесткости получим

$$\Delta_4 = \frac{0,333EA + 375}{0,333EA} \cdot \Delta_{12} = \left(1 + \frac{375}{0,333 \cdot \infty}\right) \cdot \Delta_{12} \approx \Delta_{12}.$$

С другой стороны, выразив из последнего уравнения слагаемое  $0,333EA \cdot \Delta_{12}$

$$0,333EA \cdot \Delta_{12} = 0,333EA \cdot \Delta_4 - 375EA \cdot \Delta_{12} = 0,333EA \cdot \Delta_4 - 375EA \cdot \Delta_4$$

и подставив его в первое уравнение, получим

$$3000 \cdot \Delta_4 + 0,333EA \cdot \Delta_4 + 1500 \cdot \Delta_9 - 0,333EA \cdot \Delta_4 + 375 \cdot \Delta_4 = -12,$$

где слагаемые с  $EA$ , как уже отмечалось, взаимно уничтожаются, и это уравнение принимает вид

$$3375 \cdot \Delta_4 + 1500 \cdot \Delta_9 = -12.$$

Решая преобразованную систему разрешающих уравнений, получим

$$\Delta_4 = \Delta_{12} = -9,333 \cdot 10^{-3} (\text{м}); \quad \Delta_6 = -2,6 \cdot 10^{-3} (\text{рад}); \quad \Delta_9 = 13 \cdot 10^{-3} (\text{рад}).$$

Вычисление усилий по концам КЭ по формулам (2.49) ÷ (2.51) здесь покажем для трёх КЭ – для первого, третьего и четвертого (для остальных КЭ эта процедура аналогична):

$$\begin{aligned} \{r'_1\} &= [K'_1] \cdot [T_{\alpha 1}] \cdot \{\Delta_1\} = \\ &= \begin{bmatrix} 1500 & -1500 & 1500 & -1500 \\ -1500 & 2000 & 1500 & 1000 \\ -1500 & 1500 & 1500 & 1500 \\ -1500 & 1500 & 1500 & 2000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -9,33 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ -2,6 \cdot 10^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10,1 \\ 11,4 \\ 10,1 \\ 8,8 \end{Bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{r'_3\} &= [K'_3] \cdot [T_{\alpha 3}] \cdot \{\Delta_3\} = \\ &= \begin{bmatrix} 48 & -240 & -48 \\ -240 & 1200 & 240 \\ -48 & 240 & 48 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 13 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -25 \\ 25 \\ -15 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21,88 \\ -9,4 \\ 18,12 \end{Bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\{r'_4\} = [K'_3] \cdot \{\Delta_4\} = \begin{bmatrix} 111,1 & -333,3 & -111,1 \\ -333,3 & 1000 & 333,3 \\ -111,1 & 333,3 & 111,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -2,6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,867 \\ -2,6 \\ -0,867 \end{Bmatrix}.$$

Действие полученных реактивных усилий по концам первого, третьего и четвертого КЭ показано на рис. 2.33. Окончательные эпюры внутренних усилий  $M$ ,  $Q$  и  $N$  в рассматриваемой раме представлены на рис. 2.34 – 2.36. Эпюра  $N$  при этом построена способом вырезания узлов.

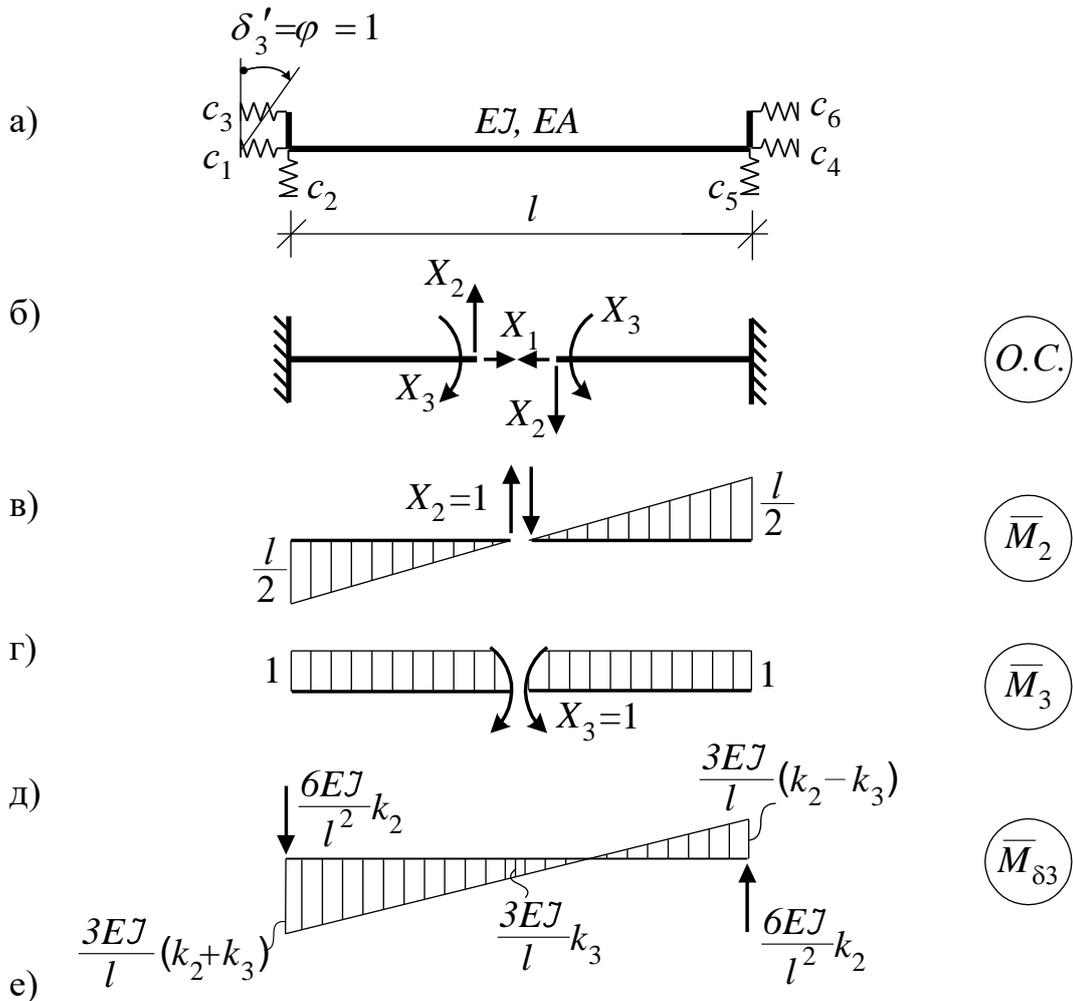
### 2.13. Учёт упругой податливости присоединения конечных элементов к узлам

Соединение элементов в узлах и опорах на расчётных схемах обычно принимается жёстким либо шарнирным. Однако понятно, что в реальных сооружениях соединение (опирание) конструктивных элементов не всегда отвечает этим двум вариантам, в сооружениях часто в узлах и опорах присутствуют упруго-податливые перемещения между соединёнными элементами. В таких случаях представляет большой интерес анализ и оценка влияния такого соединения элементов на распределение и величины усилий в сооружениях.

Для учёта в расчётах сооружений упругой податливости в узлах ниже получены матрицы жёсткости КЭ для плоских стержневых систем, учитывающие упруго-податливое присоединение КЭ к узлам по всем направлениям сопряжения, т.е. во всех угловых и линейных связях, с помощью которых КЭ присоединяются к узлам. Заметим, что коэффициенты  $r_{ik}$ , входящие в состав матрицы жёсткости КЭ, как уже указывалось при получении матрицы жёсткости типа 1 (2.20) на основе принципа Лагранжа, по физическому смыслу представляет собой реакции на концах КЭ в  $i$ -том направлении от перемещений соответствующего конца стержня в  $k$ -том направлении, и совпадают как по физическому смыслу, так и по величинам с соответствующими коэффициентами метода перемещений. Поэтому здесь будем получать выражения для коэффициентов  $r_{ik}$ , выполняя расчёт конечных элементов методом сил, как это обычно делается при получении табличных эпюр метода перемещений [4, 12, 22].

Рассмотрим вначале КЭ типа 1 при угловом смещении одного из крайних узлов, к которым стержень присоединяется упруго-податливо по всем связям – горизонтальным ( $c_1, c_4$ ), вертикальным ( $c_2, c_5$ ) и угловым ( $c_3, c_6$ ) (рис. 2.37а), где  $c_i$  – упругая податливость связи, равная величине ее смещения (линейного либо углового) при приложении к ней единичного усилия (упругая податливость связи обратна жесткости связи). Система имеет три лишние связи ( $L = 3$ ); основная система метода сил показана на рис. 2.37б; единичные эпюры изгибающих моментов в балке от действия единичных значений неизвестных метода сил  $X_2, X_3$  представлены на рис. 2.37в, г. Так как единичная эпюра  $M$  от  $X_1 = 1$  нулевая и от рассматриваемого поворота  $\varphi = 1$  средние точки в направлении  $X_1$  не сойдутся и не разойдутся ( $\Delta_{1C} = 0$ ), то и неизвестное равно нулю ( $X_1 = 0$ ). Поэтому система канонических уравнений метода сил будет иметь вид

$$\begin{cases} \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2C} = 0; \\ \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3C} = 0. \end{cases} \quad (2.66)$$

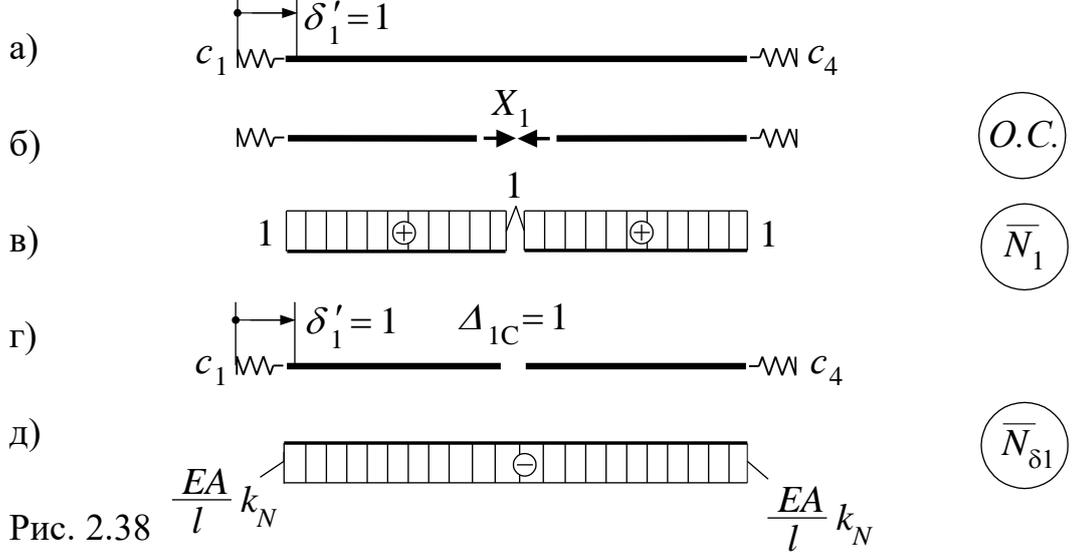
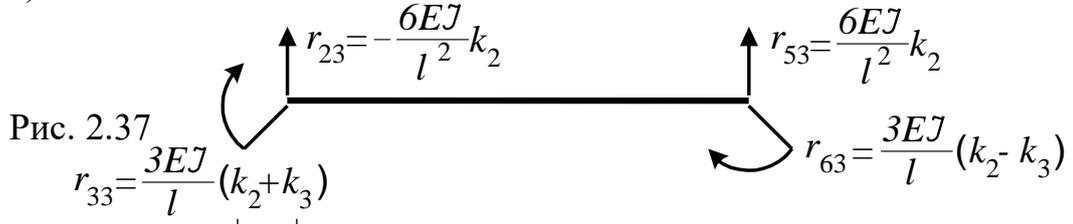


$O.C.$

$\bar{M}_2$

$\bar{M}_3$

$\bar{M}_{\delta 3}$



$O.C.$

$\bar{N}_1$

$\bar{N}_{\delta 1}$

Рис. 2.38

Значения единичных коэффициентов метода сил будут равны:

$$\delta_{22} = \frac{l^3}{12EJ} + c_2 + c_3 \frac{l^2}{2} + c_5 + c_6 \frac{l^2}{2} = \frac{l^3}{12EJ} t_2, \quad \text{где } t_2 = 1 + (c_2 + c_5) \frac{12EJ}{l^3} + (c_3 + c_6) \frac{3EJ}{l};$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = 0 - c_3 \frac{l}{2} + c_6 \frac{l}{2} = \frac{l^2}{2EJ} t_3, \quad \text{где } t_3 = (c_6 - c_3) \frac{EJ}{l};$$

$$\delta_{33} = \frac{l}{EJ} + (c_3 + c_6) = \frac{l}{EJ} t_4, \quad \text{где } t_4 = 1 + (c_3 + c_6) \frac{EJ}{l}.$$
(2.67)

Свободные члены системы уравнений, являющиеся перемещениями от смещения опоры  $\delta'_3 = \varphi = 1$ , равны:

$$\Delta_{2C} = -\frac{l}{2}; \quad \Delta_{3C} = 1;$$

Система уравнений (2.66) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{l^3}{12EJ} t_2 X_2 + \frac{l^2}{2EJ} t_3 X_3 - \frac{l}{2} = 0; \\ \frac{l^2}{2EJ} t_3 X_2 + \frac{l}{EJ} t_4 X_3 + 1 = 0. \end{cases}$$

Решая её, найдём:

$$X_2 = \frac{6EJ}{l^2} k_2; \quad X_3 = -\frac{EJ}{l} k_3,$$

$$\text{где } k_2 = \frac{t_3 + t_4}{t_2 t_4 - 3t_3^2}; \quad k_3 = \frac{1}{3t_4} + \frac{t_3}{t_4} k_2.$$
(2.68)

Окончательную эпюру изгибающих моментов получим по формуле  $M_{\delta_3} = \overline{M}_2 X_2 + \overline{M}_3 X_3$  в виде, представленном на рис. 2.37д. Несложно проверить, что при всех  $c_i$ , равных нулю, что будет соответствовать полным жёстким соединениям по обоим концам элемента, будем иметь эпюры усилий и реакций, соответствующие балке с двумя защемлёнными концами. Аналогично при  $c_2 = c_3 = c_5 = 0$  и  $c_6 = \infty$  будем иметь эпюры усилий и реакции, соответствующие балке, защемлённой с левой стороны и шарнирно опёртой с правой стороны. Всё это подтверждает правильность полученных выражений.

В результате величины  $r_{ik}$ , входящие в матрицу жёсткости КЭ, будут иметь значения, показанные на рис. 2.37е.

При перемещении левого узла вдоль оси стержня на единичную величину

$\delta'_1 = 1$  (рис. 2.38а) в стержне будут возникать только продольные силы, и при использовании метода сил будем иметь только одно уравнение

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1C} = 0,$$

для определения коэффициентов которого построим единичную эпюру продольных сил (рис. 2.38в) и зададимся перемещением  $\delta'_1 = 1$  (рис. 2.38г) в О.С. метода сил (рис. 2.38б), в результате чего получим:

$$\delta_{11} = \sum \frac{\bar{N}_1^2 l}{EA} + c_1 + c_4 = \frac{l}{EA} + c_1 + c_4 = \frac{l}{EA} \left[ 1 + (c_1 + c_4) \frac{EA}{l} \right]; \quad \Delta_{1C} = 1;$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1C}}{\delta_{11}} = -\frac{EA}{l} \cdot \frac{1}{1 + (c_1 + c_4) \frac{EA}{l}} = -\frac{EA}{l} k_N, \quad \text{где } k_N = \frac{1}{1 + (c_1 + c_4) \frac{EA}{l}}. \quad (2.69)$$

Окончательная эпюра продольных сил будет иметь постоянное по длине стержня значение (рис. 2.38д)

$$N = \bar{N}_1 \cdot X_1 = -\frac{EA}{l} k_1,$$

а реакции по концам КЭ будут равны

$$r_{11} = \frac{EA}{l} k_1; \quad r_{41} = -\frac{EA}{l} k_1.$$

Аналогично при горизонтальном линейном смещении правого конца стержня получим:

$$r_{14} = -\frac{EA}{l} k_1; \quad r_{44} = \frac{EA}{l} k_1.$$

Задав для рассматриваемого КЭ с упруго-податливым соединением его концов с узлами линейное вертикальное перемещение одного из узлов равным единице, например,  $\delta'_2 = 1$  (рис. 2.39а) и выполнив расчёт стержня методом сил аналогично тому, как это делалось выше, с учётом того, что в этом случае  $\Delta_{2C} = 1$ ,  $\Delta_{3C} = 0$ , получим эпюру изгибающих моментов и реакции в виде, представленном на рис. 2.39б, а величины коэффициентов  $r_{ik}$ , входящие в состав матрицы жёсткости КЭ, будут иметь значения, показанные на рис. 2.39в, в которых введены следующие обозначения:

$$k_1 = \frac{t_4}{t_2 t_4 - 3t_3^2}; \quad k_4 = \frac{t_4 - t_3}{t_2 t_4 - 3t_3^2}. \quad (2.70)$$

Принимая для этого случая  $c_2 = c_3 = c_5 = c_6 = 0$ , также получим эпюру  $M$  и реакции, которые будут полностью совпадать с соответствующей эпюрой  $M$  и реакциями в защемлённом с двух сторон стержне, а при  $c_2 = c_3 = c_5 = 0$  и  $c_6 = \infty$  получим полное совпадение результатов со стержнем, защемлённым с левой стороны и шарнирно опёртым с правой.

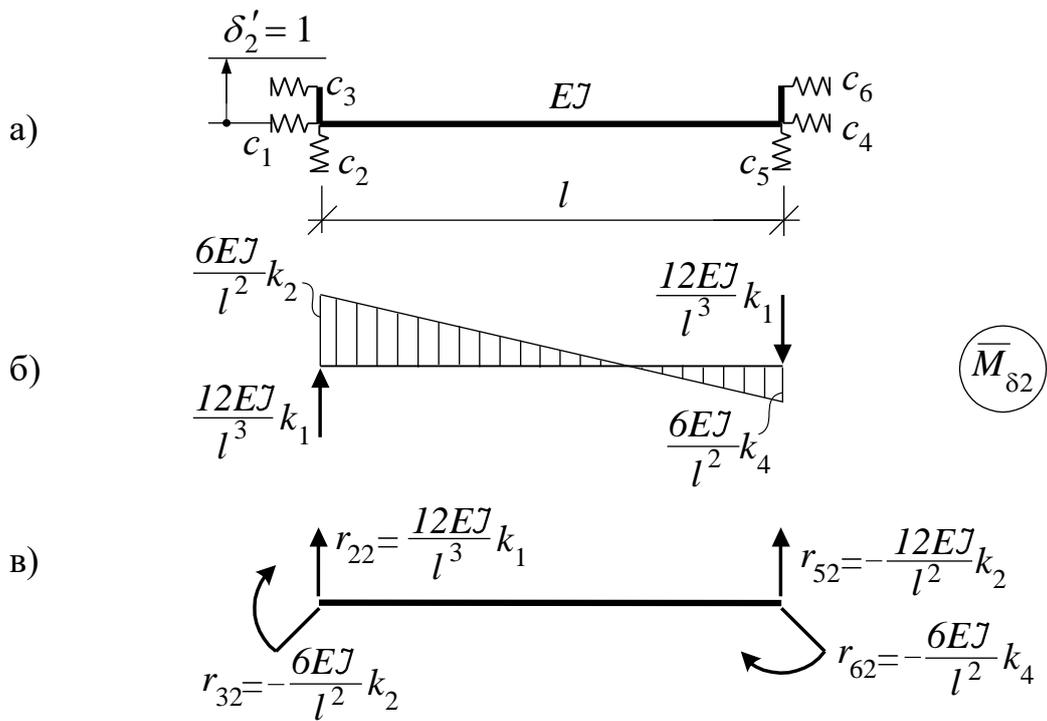


Рис. 2.39

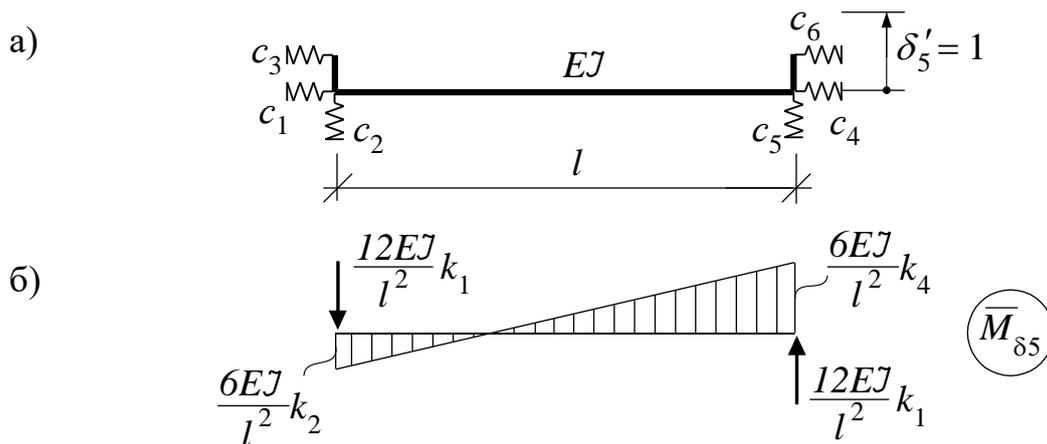


Рис. 2.40

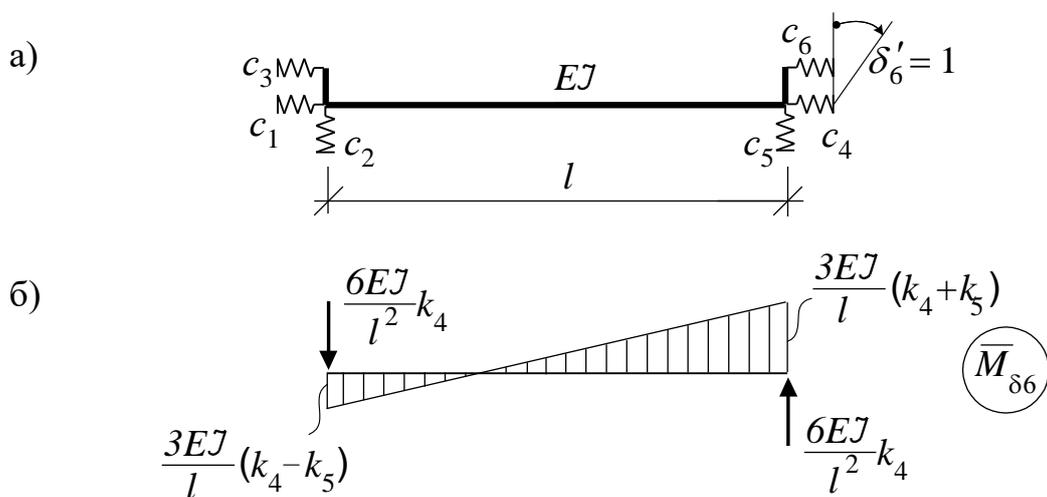


Рис. 2.41

Выполнив аналогично расчёт данного КЭ на вертикальное смещение ( $\delta'_5 = 1$ ) и на угол поворота правого узла ( $\delta'_6 = 1$ ), получим эпюры  $M$  для него и реакции в виде, представленном соответственно на рис. 2.40 и рис. 2.41.

В результате матрица жёсткости рассматриваемого КЭ (рис. 2.37а) с учётом упруго-податливого присоединения его концов к узлам, характеризующегося величинами  $c_1 \div c_6$ , будет иметь вид

$$[K'_3] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l}k_N & 0 & 0 & -\frac{EA}{l}k_N & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3}k_1 & -\frac{6EJ}{l^2}k_2 & 0 & -\frac{12EJ}{l^3}k_1 & -\frac{6EJ}{l^2}k_4 \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2}k_2 & \frac{3EJ}{l}(k_2 + k_3) & 0 & \frac{6EJ}{l^2}k_2 & \frac{3EJ}{l}(k_2 - k_3) \\ -\frac{EA}{l}k_N & 0 & 0 & \frac{EA}{l}k_N & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3}k_1 & \frac{6EJ}{l^2}k_2 & 0 & \frac{12EJ}{l^3}k_1 & \frac{6EJ}{l^2}k_4 \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2}k_4 & \frac{3EJ}{l}(k_2 - k_3) & 0 & \frac{6EJ}{l^2}k_4 & \frac{3EJ}{l}(k_4 + k_5) \end{bmatrix}, \quad (2.80)$$

где дополнительно к (2.67), (2.68) и (2.70) обозначено

$$k_5 = \frac{1}{3t_4} + \frac{t_3}{t_4}k_4. \quad (2.81)$$

Выполним теперь аналогичные процедуры для стержневого КЭ типа 2 (рис. 2.42а), упруго-податливо присоединяемого по концам к узлам (рис. 2.42б). Элемент имеет две лишние связи, которые при этом являются независимыми друг от друга, так как от силы  $X_2$  возникает только продольная сила, а от  $X_1$  только изгибающий момент (и поперечная сила). Расчёт по определению усилия  $X_2$  здесь ничем не отличается от соответствующего расчёта для балки с двумя упруго-податливыми защемлениями, и в результате эпюры продольных сил и реакции по концам КЭ от горизонтальных смещений узлов по концам КЭ  $\delta'_1$  и  $\delta'_4$  получим такими же:

$$N = \pm \frac{EA}{l}f_1, \quad \text{где } f_1 = k_N = \frac{1}{1 + (c_1 + c_4)\frac{EA}{l}}. \quad (2.82)$$

Зависимость для эпюры изгибающих моментов и реакций рассматриваемого КЭ при повороте упруго-податливого защемления  $\delta'_3 = 1$  (рис. 2.42б) получим, решив уравнение метода сил вида

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1C} = 0. \quad (2.83)$$

Единичная эпюра  $\overline{M}_1$  от действия силы  $X_1 = 1$  представлена на рис. 2.42г, смещение упруго-податливого узла – на рис. 2.42д. Вычислив коэффициенты уравнения (2.83)

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ} + c_2 + c_3 l^2 + c_5 = \frac{l^3}{3EJ} \left[ 1 + \frac{3EJ}{l^3} (c_2 + c_5) + \frac{3EJ}{l} c_3 \right];$$

$$\Delta_{1C} = -1 \cdot l = -l,$$

найдем неизвестное метода сил

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1C}}{\delta_{11}} = \frac{3EJ}{l^2} f_2, \quad \text{где } f_2 = \frac{1}{1 + \frac{3EJ}{l^3} (c_2 + c_5) + \frac{3EJ}{l} c_3}. \quad (2.84)$$

Окончательная эпюра  $M$  определяется выражением  $M = \overline{M}_1 \cdot X_1$  и представлена на рис. 2.42е, а величины коэффициентов  $r_{ik}$  матрицы жёсткости КЭ показаны на рис. 2.42ж.

Аналогично получим эпюру изгибающих моментов и реакции для рассматриваемого КЭ при линейном вертикальном перемещении, например, левого узла (рис. 2.43). При вертикальном смещении правого узла эти зависимости будут такими же.

В результате матрица жёсткости конечного элемента типа 2 с упруго-податливым присоединением его концов к узлам будет иметь вид

$$[\hat{E}'_{\hat{Y}}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} f_1 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l^3} f_2 & -\frac{3EJ}{l^2} f_2 & 0 & -\frac{3EJ}{l^3} f_2 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^2} f_2 & \frac{3EJ}{l} f_2 & 0 & \frac{3EJ}{l^2} f_2 & 0 \\ -\frac{EA}{l} f_1 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^3} f_2 & \frac{3EJ}{l^2} f_2 & 0 & \frac{3EJ}{l^3} f_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.85)$$

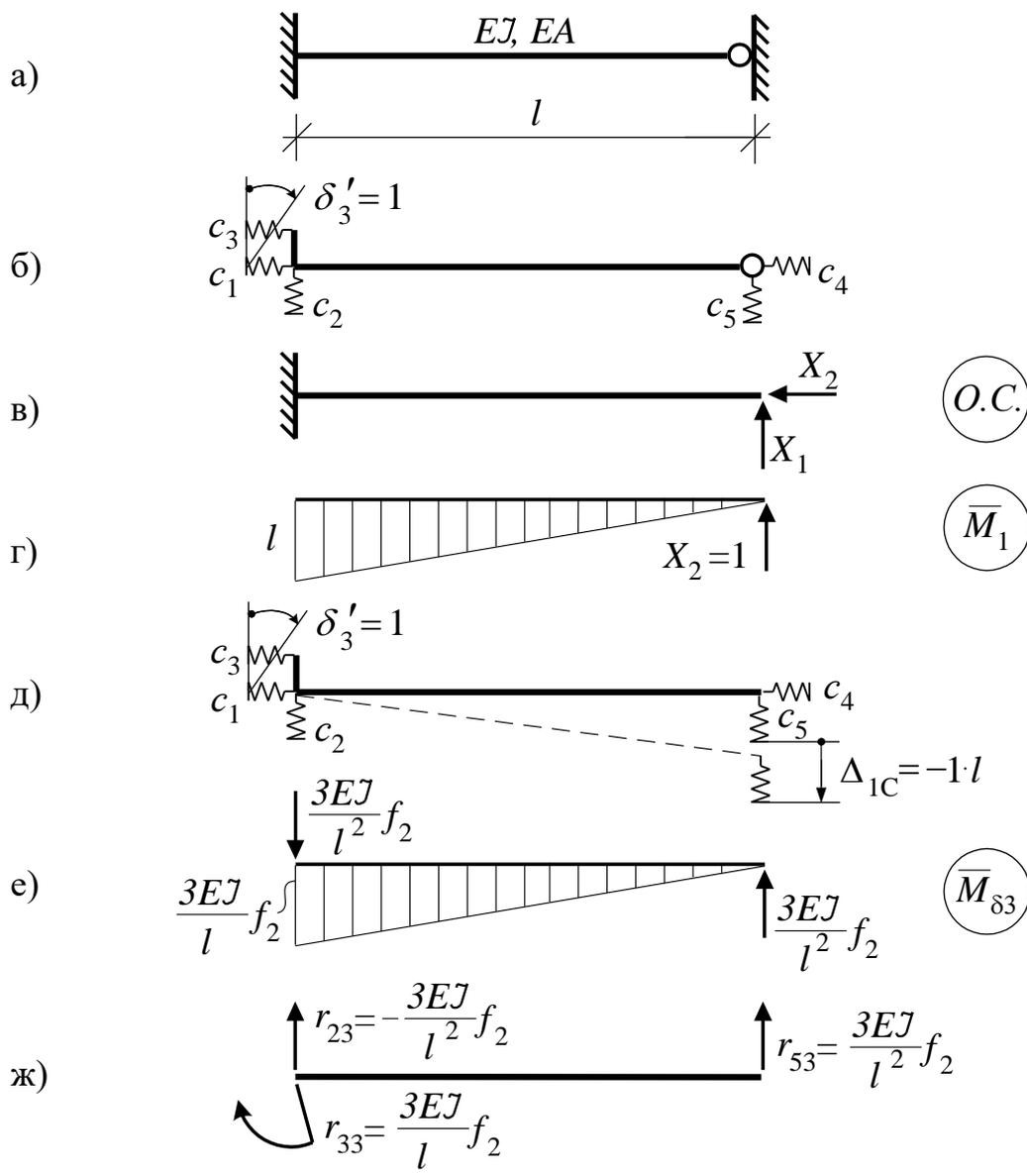


Рис. 2.42

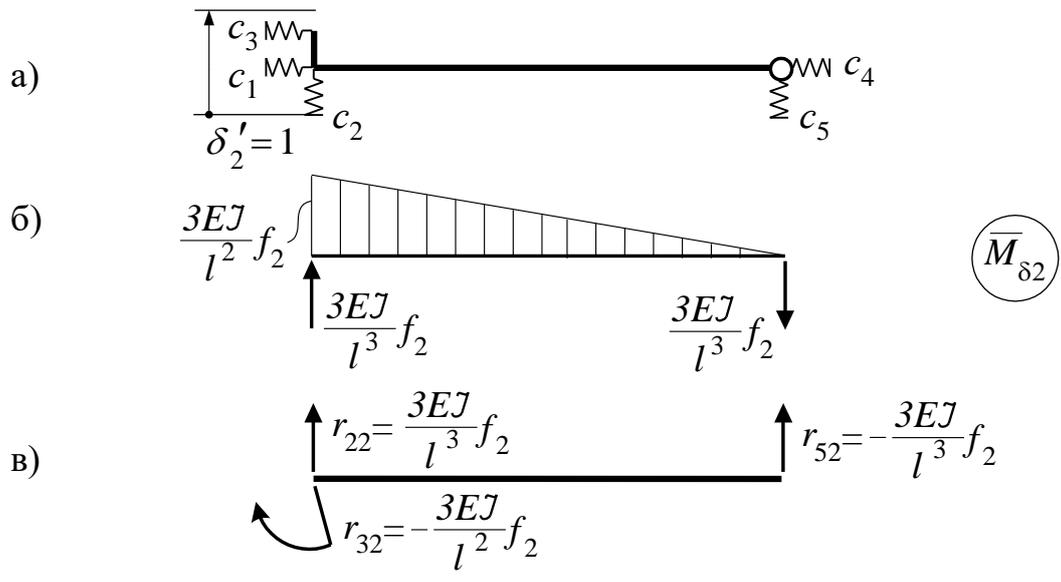


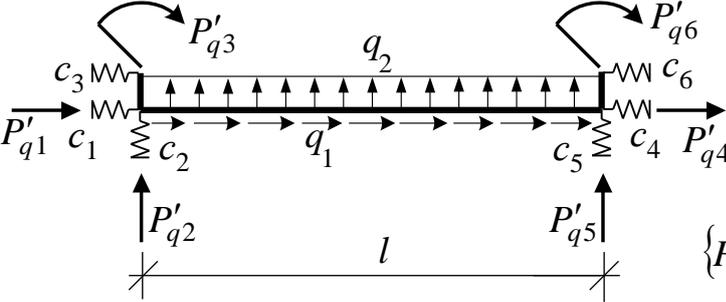
Рис. 2.43

Аналогично получим матрицу жёсткости подобного КЭ типа 3

$$[\hat{E}'_{\hat{Y}}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} f_1 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l^3} f_2 & 0 & 0 & -\frac{3EJ}{l^3} f_2 & -\frac{3EJ}{l^2} f_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} f_1 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^3} f_2 & 0 & 0 & \frac{3EJ}{l^3} f_2 & \frac{3EJ}{l^2} f_2 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^2} f_2 & 0 & 0 & \frac{3EJ}{l^2} f_2 & \frac{3EJ}{l} f_2 \end{bmatrix}. \quad (2.86)$$

Как уже указывалось, при действии на КЭ распределённых нагрузок их необходимо преобразовывать к узловым. Это преобразование для конечных элементов, упруго-податливо присоединяемых к узлам, так же не будет совпадать со случаями жёсткого соединения КЭ в узлах и может быть получено на основе расчётов конечных элементов методом сил по аналогии с тем, как это сделано выше, только с учётом того, что в качестве внешних воздействий будут выступать распределённые нагрузки. Ниже приведены схемы загружений таких КЭ и величины узловых нагрузок для них:

1) загрузка КЭ типа 1 равномерно распределёнными нагрузками



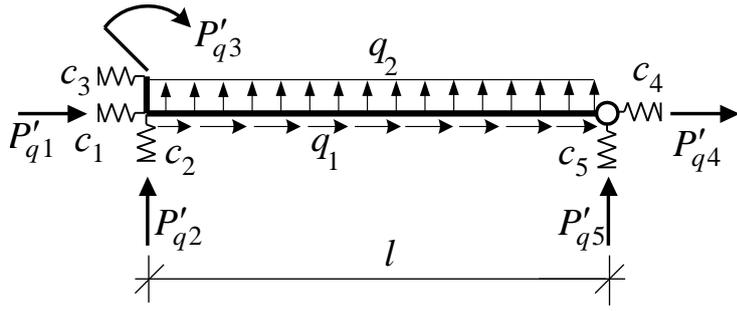
$$\{P'_q\} = \begin{Bmatrix} \frac{q_1 l}{2} f_{q1} \\ \frac{q_2 l}{2} (1 - f_{q2}) \\ -\frac{q_2 l^2}{12} (1,5 - 3f_{q2} - f_{q3}) \\ \frac{q_1 l}{2} f_{q1} \\ \frac{q_2 l}{2} (1 + f_{q2}) \\ \frac{q_2 l^2}{12} (1,5 + 3f_{q2} - f_{q3}) \end{Bmatrix}, \quad (2.87)$$

здесь

$$f_{q2} = \frac{3 t_{q2} t_4 - t_{q3} t_3}{6 t_3^2 - 2 t_2 t_4}; \quad f_{q3} = 3 f_{q2} \frac{t_3}{t_4} + \frac{t_{q3}}{2 t_4},$$

где  $t_{q2} = \frac{EJ}{l} (c_6 - c_3) + \frac{8EJ}{l^3} (c_5 - c_2)$ ;  $t_{q3} = 1 + \frac{3EJ}{l} (c_3 + c_6)$ ;  $t_2, t_3, t_4$  — см. (2.67);

2) загрузка КЭ типа 2 равномерно распределёнными нагрузками



$$\{P'_q\} = \begin{Bmatrix} \frac{q_1 l}{2} f_{q1} \\ q_2 l \left(1 - \frac{3}{8} f_{q2}\right) \\ -\frac{q_2 l^2}{8} (4 - 3 f_{q2}) \\ \frac{q_1 l}{2} f_{q1} \\ \frac{3 q_2 l}{8} f_{q2} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.88)$$

где

$$f_{q1} = \left(1 + c_1 \frac{2EA}{l}\right) f_1;$$

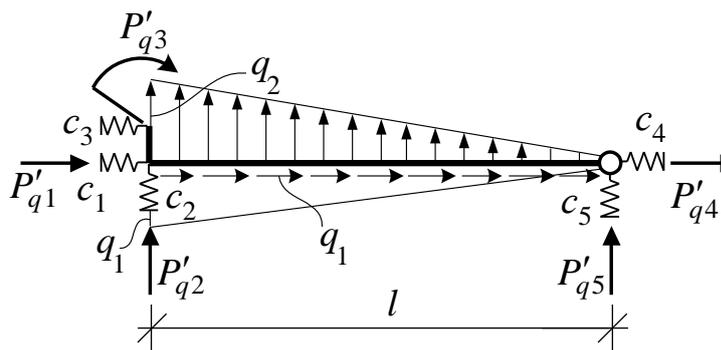
$$f_{q2} = \left(1 + \frac{8EJ}{l^3} c_2 + \frac{4EJ}{l} c_3\right) f_2;$$

3) для КЭ типа 3 с упруго-податливым присоединением концов стержня к узлам матрицу  $\{P'_q\}$  легко получить из матрицы  $\{P'_q\}$  для КЭ типа 2, поэтому

здесь приводить её не будем;

4) при загрузке КЭ типа 4 с упруго-податливым присоединением его концов к узлам равномерно распределёнными нагрузками  $q_1$  и  $q_2$ , представленными выше, силы  $P'_{q1}$  и  $P'_{q4}$  будут такими же, как во всех вышеприведённых матрицах  $\{P'_q\}$ , а силы  $P'_{q2} = P'_{q5} = \frac{q_2 l}{2}$  – как в обычном КЭ типа 4.

5) загрузка КЭ типа 2 треугольной убывающей нагрузкой



$$\{P'_q\} = \begin{Bmatrix} \frac{q_1 l}{6} (3 - s_{q1}) \\ \frac{q_2 l}{10} (5 - f_2 s_{q2}) \\ -\frac{q_2 l^2}{30} (5 - 3 f_2 s_{q2}) \\ \frac{q_1 l}{6} s_{q1} \\ \frac{q_2 l}{10} f_2 s_{q2} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.89)$$

где

$$s_{q1} = \frac{1 + 3 \frac{EA}{l} c_1}{1 + (c_1 + c_4) \frac{EA}{l}};$$

$$s_{q2} = 1 + c_2 \frac{15EJ}{l^3} + c_3 \frac{5EJ}{l};$$

$f_2$  – см. (2.84);

загрузка КЭ типа 2 треугольной возрастающей нагрузкой

$$\{P'_q\} = \begin{Bmatrix} \frac{q_1 l}{6} s_{q1} \\ \frac{q_2 l}{40} (20 - 11 f_2 s_{q3}) \\ -\frac{q_2 l^2}{120} (40 - 33 f_2 s_{q3}) \\ \frac{q_1 l}{6} (3 - s_{q1}) \\ \frac{11 q_2 l}{40} f_2 s_{q3} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.90)$$

где  $s_{q3} = 1 + \frac{60EJ}{11l^3} c_2 + \frac{40EJ}{11l} c_3$ ;  
 $s_{q1}$  – см. (2.89);  $f_2$  – см. (2.84);

7) загрузка КЭ типа 1 треугольной убывающей нагрузкой

$$\{P'_q\} = \begin{Bmatrix} \frac{q_1 l}{6} (3 - s_{q1}) \\ \frac{q_2 l}{20} (10 - u_{q1}) \\ -\frac{q_2 l^2}{120} (20 + u_{q2} - 6u_{q1}) \\ \frac{q_1 l}{6} s_{q1} \\ \frac{q_2 l}{20} u_{q1} \\ \frac{q_2 l^2}{120} u_{q2} \end{Bmatrix}, \quad (2.91)$$

здесь  $u_{q1} = \frac{8s_{q2}u_3 - 5s_{q3}u_2}{4u_1u_3 - 3u_2^2}$ ;  
 $u_{q2} = \frac{3u_2u_{q1} - 5s_{q3}}{u_3}$ ,

где  $u_1 = \frac{1}{f_2}$ ;  $f_2$  – см. (2.84);  $u_2 = 1 + \frac{2EJ}{l} c_3$ ;  $u_3 = 1 + (c_3 + c_6) \frac{EJ}{l}$ ;

$$s_{q2} = 1 + c_2 \frac{15EJ}{l^3}; \quad s_{q3} = 1 + \frac{4EJ}{l} c_3.$$

Используя полученные в этом разделе матрицы жёсткости конечных элементов, а также матрицы сосредоточенных узловых усилий от распределённых равномерно и по треугольным законам нагрузок, можно выполнять расчёты рамно-стержневых систем методом конечных элементов по вышеизложенным принципам, но уже с учётом упруго-податливого присоединения КЭ к узлам.

## 2.14. Программа „SIRIUS”

На основе изложенной методики расчета на кафедре «Строительная механика» Брестского государственного технического университета составлена<sup>1</sup> компьютерная программа „SIRIUS” для ПЭВМ [9], которая позволяет рассчитывать плоские стержневые системы – рамы, балки, фермы – с жестким либо шарнирным соединением элементов в узлах (в данной программе не предусмотрен учет упругой податливости соединений) на действие статических внешних нагрузок – сосредоточенных сил и моментов, равномерно распределенных нагрузок. Программа составлена в среде программирования Delphi 1, обладает удобным интерфейсом, высокой наглядностью представления исходных данных и результатов расчета. Программа ориентированна на использование в учебном процессе, однако может применяться также при решении соответствующих задач и в проектно-конструкторской практике.

Ввод исходных данных в программе может осуществляться в двух вариантах (см. рис. 2.44) – в табличном (рис. 2.45) и в графическом (рис. 2.46). Более

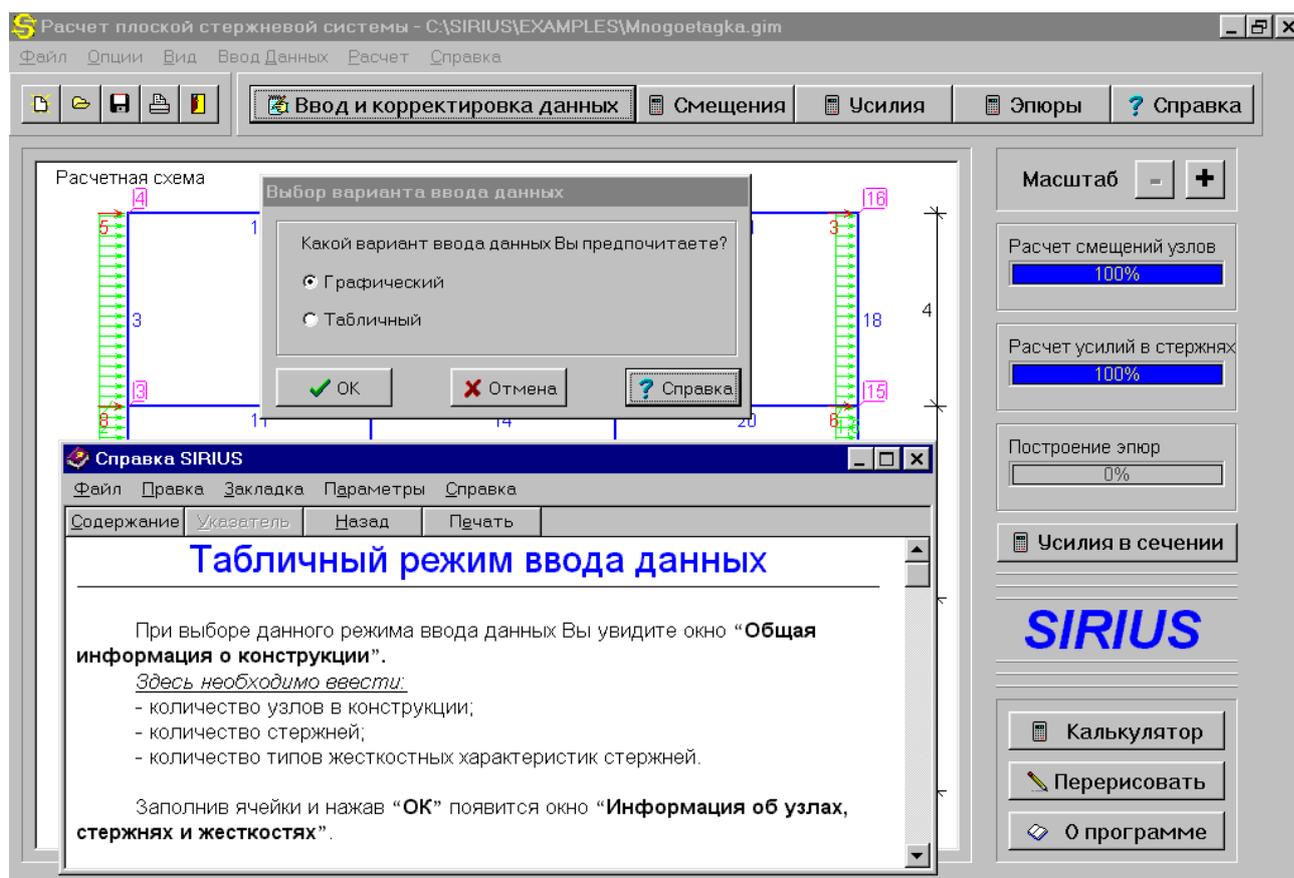


Рис. 2.44. Основное окно с открытыми окнами вариантов ввода и справки

<sup>1</sup> Программа составлена В.И. Игнатьюком и И.М. Гойшиком.

**Информация об узлах, стержнях и жесткостях**

Информация об узлах

Узел **1**

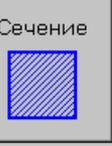
Тип узла  
 Жесткий  Шарнирный

Координаты узла, м  
 X   
 Y

Узловые нагрузки  
 R<sub>x</sub>, кН  R<sub>y</sub>, кН  M, кНм

Информация о жесткостных характеристиках стержней

Тип **1**

Сечение 

При изгибе EI, кНм<sup>2</sup>   
 При продольной деформации EA, кН

Информация о стержнях системы

Стержень **3**

Начальный узел   
 Примыкание стержня  
 Жесткое  Шарнирное

Конечный узел   
 Примыкание стержня  
 Жесткое  Шарнирное

Интенсивности равномерных распределенных нагрузок, кН/м  
 Вдоль оси OX   
 Вдоль оси OY

Номер типа жесткостных характеристик стержня

OK Отмена Справка

Рис. 2.45. Окно табличного ввода данных в программе „SIRIUS”

наглядным и удобным, с точки зрения авторов, является графический ввод исходных данных, при котором расчетная схема строится в окне графики непосредственно на экране. Оба варианта ввода взаимосвязаны – при табличном вводе расчетная схема сооружения также представляется графически по завершении ввода. В графическом режиме ввода узел (жесткий либо шарнирный) выбирается нажатием кнопок с соответствующими пиктограммами и устанавливается в требуемом месте графического окна позиционированием курсора мыши в этом месте и щелчком левой клавиши мыши, при необходимости при этом уточняются координаты узла в появляющемся окне корректировки положения узла. Аналогичный подход используется при установке в узлах опор и задании внешних нагрузок – вид их выбирается с помощью кнопок с пиктограммами, а установка щелчком левой клавиши мыши при положении курсора над соответствующим узлом (для распределенных нагрузок – над соответствующим стержнем). Стержни после нажатия кнопки с выбранным их типом задаются засечками (щелчками левой клавиши мыши) в начальном и конечном узлах с последующей корректировкой их параметров в появляющемся окне.

В программе предусмотрен также ряд проверок ввода исходных данных на их корректность, включая проверки на геометрическую неизменяемость рас-

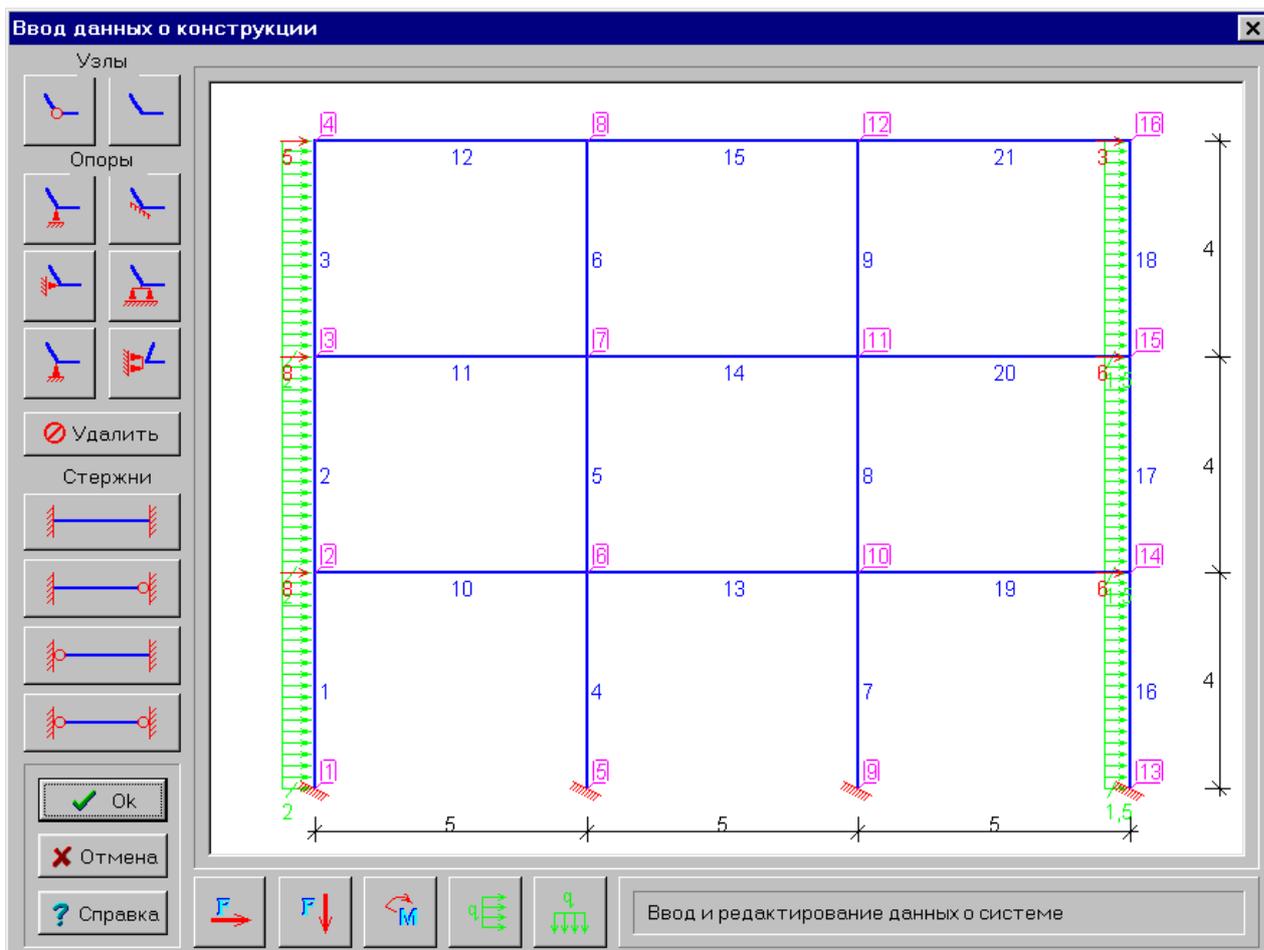


Рис. 2.46. Окно графического ввода данных в программе „SIRIUS”

четной модели, на правильность численного представления вводимых величин, на корректность задания опорных связей и соединения стержней в узлах (учитывая, что не должно быть жесткого присоединения стержней к шарнирным узлам; жесткого защемления, как опоры, в шарнирном узле; шарнирного узла на консольном конце стержня и т.п.).

Введенные исходные данные могут быть сохранены программой в заданный файл (с расширением .qim).

Результаты расчета в программе представляются как в численном виде – в таблицах перемещений и усилий (рис. 2.47), так и в графическом виде – в виде эпюр усилий  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  (рис. 2.48).

В программе имеется достаточно подробная и обширная справка (Help) о работе с программой (см., например, рис. 2.44), включая ввод исходных данных и их корректировку в табличном и графическом вариантах, расчет системы, определение усилий в любом заданном сечении и вывод результатов расчета на печать, а также содержащая краткое описание основ метода конечных элементов, представление о котором необходимо иметь при работе с программой.

**Усилия в стержнях**

Усилия и моменты в стержнях

№	Изм. Кон.	Изгибающий момент M, Кнм			Поперечная сила Q, Кн		Нормальная сила N, Кн		№ жест. характ.
		Начало	Середина	Конец	Начало	Конец	Начало	Конец	
1	2	-43,0829	-7,2155	20,6519	19,9337	11,9337	23,376	23,376	1
2	3	-14,7575	4,7986	16,3547	11,7781	3,7781	10,0934	10,0934	1
3	4	-4,2901	4,7575	5,8051	6,5238	-1,4762	2,2466	2,2466	1
5	6	-45,1881	-5,7952	33,5977	19,6965	19,6965	-2,0234	-2,0234	1
6	7	-25,4031	1,9964	29,396	13,6998	13,6998	0,0634	0,0634	1
7	8	-7,6345	2,3751	12,3846	5,0048	5,0048	0,5311	0,5311	1
9	10	-45,0345	-5,7854	33,4637	19,6246	19,6246	2,0598	2,0598	1
10	11	-25,4071	1,9786	29,3643	13,6928	13,6928	0,0315	0,0315	1
11	12	-7,6878	2,3988	12,4854	5,0433	5,0433	-0,4361	-0,4361	1
2	6	35,4094	2,2029	-31,0036	-13,2826	-13,2826	-7,8444	-7,8444	1
3	7	20,6448	1,0279	-18,5891	-7,8468	-7,8468	-10,7457	-10,7457	1
4	8	5,8051	0,1886	-5,4279	-2,2466	-2,2466	-6,4762	-6,4762	1
6	10	27,9973	0,0078	-27,9816	-11,1958	-11,1958	-1,8477	-1,8477	1
7	11	18,4414	-0,0065	-18,4543	-7,3791	-7,3791	-2,0507	-2,0507	1
8	12	6,9567	0,0125	-6,9316	-2,7777	-2,7777	-1,4714	-1,4714	1
13	14	-41,9898	-7,4992	20,9914	18,7453	12,7453	-23,4124	-23,4124	1

OK

Рис. 2.47. Таблица результатов расчета

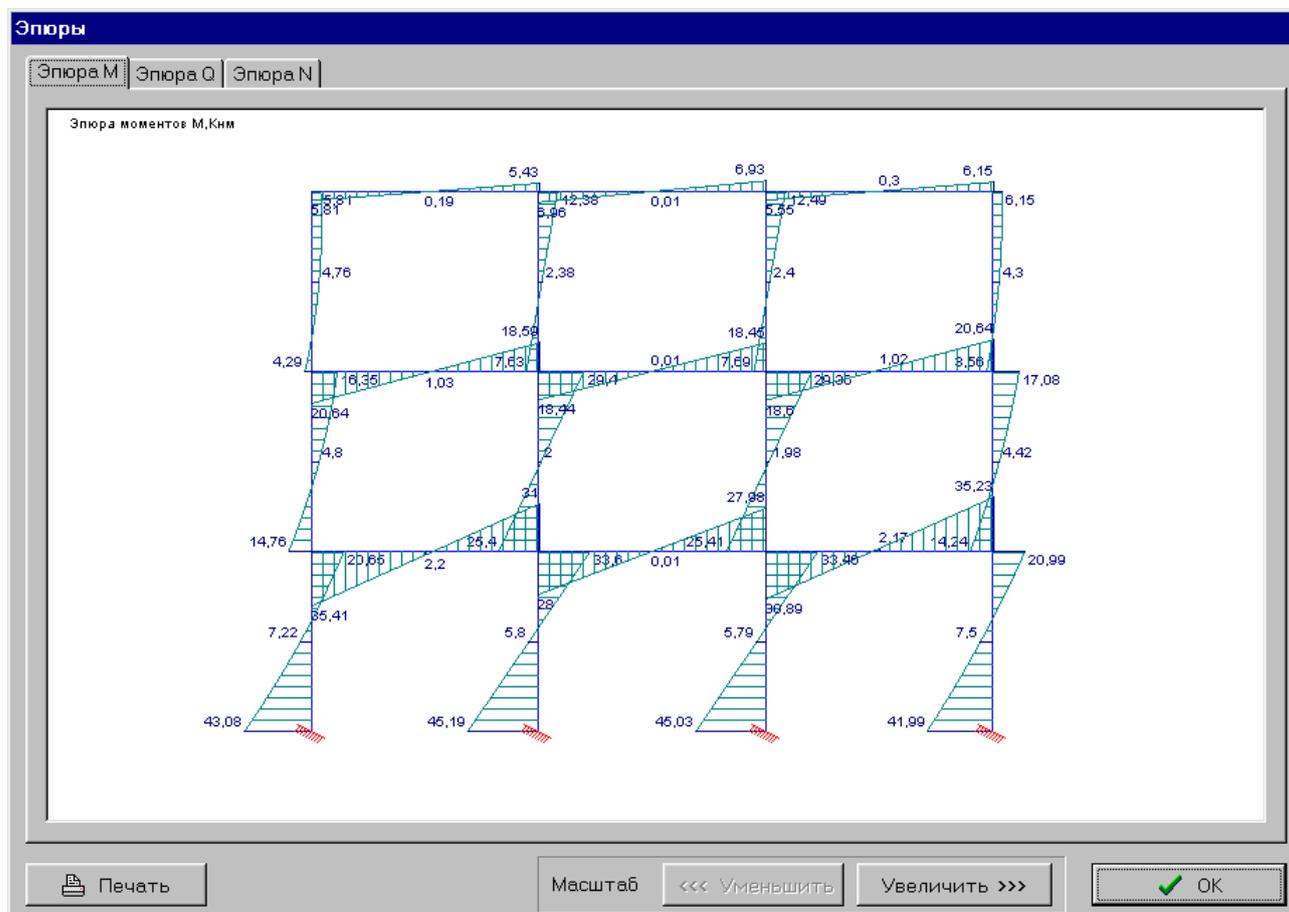


Рис. 2.48. Графическое представление результатов расчета

### 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РАСЧЕТУ СИСТЕМ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК

#### 3.1. Общие замечания

Системы перекрестных балок (СПБ) представляют собой [2] статически неопределимые конструкции, состоящие из ряда балок, лежащих в одной плоскости (обычно горизонтальной), пересекающихся между собой в этой плоскости и жестко соединяющихся друг с другом в местах пересечений. Предназначены СПБ в общем случае для восприятия нагрузок, ориентированных в пространстве произвольно, однако наиболее часто они работают только на вертикальные нагрузки, действующие перпендикулярно плоскостям СПБ.

В зависимости от величин углов между направлениями пересекающихся балок различают [2] *неортогональные (косоугольные)* СПБ, когда эти углы не прямые, и *ортогональные (взаимно перпендикулярные)* СПБ, когда балки перпендикулярны друг другу. При этом если расстояние между балками (шаг балок) каждого из направлений одинаково, то СПБ называют [2] *регулярными*, если разное – *нерегулярными*. В зависимости от условий опирания различают СПБ *типа “структура”* (рис. 3.1а), если балки опираются жестко либо шарнирно со всех сторон по контуру, и СПБ *мостового типа* (рис. 3.1б), если опираются только балки одного из направлений по двум противоположным сторонам.

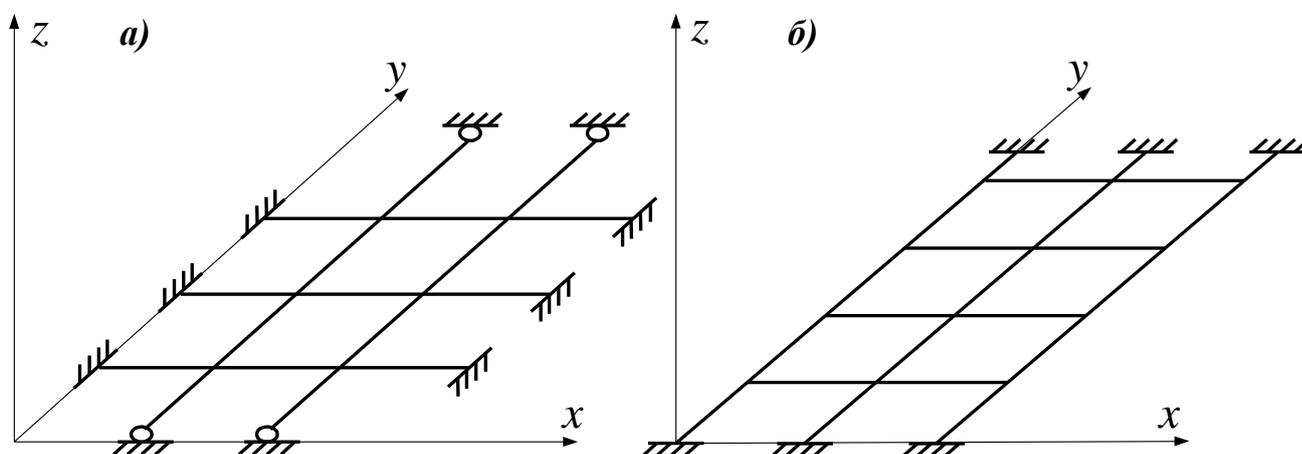


Рис. 3.1. Системы перекрестных балок  
а) типа “структура”; б) мостового типа

#### 3.2. Особенности использования МКЭ для СПБ

СПБ при использовании МКЭ обычно разбивают на конечные элементы (КЭ) балочного типа по узлам пересечения балок и по точкам приложения сосредоточенных нагрузок.

В общем случае каждый узел такой системы обладает шестью степенями свободы, то есть вектор перемещений узла должен иметь шесть компонент – три линейных перемещения и три угла поворота относительно осей координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Однако практика и анализ работы СПБ показывают, что при действии на СПБ вертикальных нагрузок (а на СПБ обычно действуют только вертикальные нагрузки) можно пренебречь некоторыми перемещениями [2]:

- линейными перемещениями в направлениях осей  $x$ ,  $y$ , лежащих в плоскости СПБ;
- и углом поворота вокруг оси  $z$ , перпендикулярной плоскости СПБ.

В результате вектор перемещений в узле СПБ (рис. 3.2) будет иметь вид

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix}. \quad (3.1)$$

Соответственно в узлах СПБ могут действовать внешние нагрузки, представленные на рис. 3.3, и могут возникать реакции от примыкающих балок  $r_i$  в тех же направлениях.

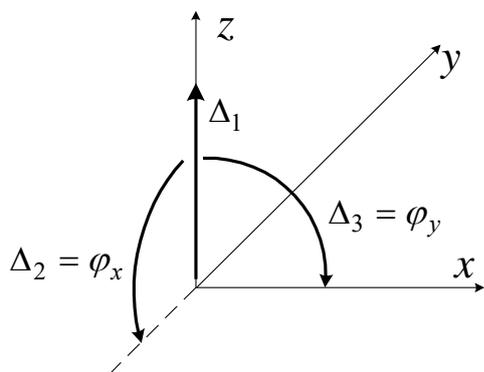


Рис. 3.2. Перемещения узла СПБ

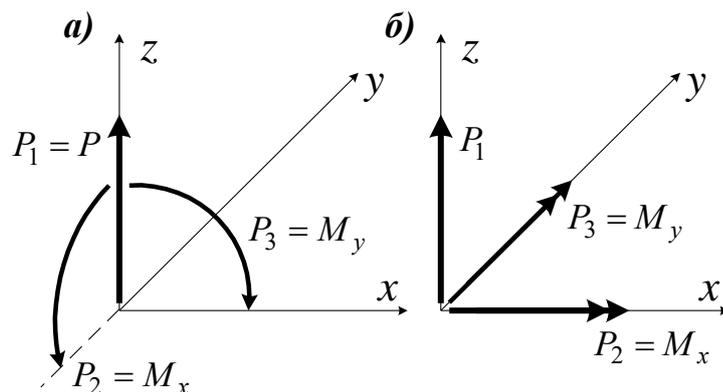


Рис. 3.3. Узловые нагрузки СПБ  
в обычном (а) и в векторном (б) виде

Отметим, что для изгибающих моментов и углов поворота в качестве правила знаков принимается так называемое правило “буравчика”, согласно которому положительными они являются тогда, когда действуют против часовой стрелки, если смотреть на них с конца соответствующей оси (такие их направления показаны на рис. 3.2, 3.3). Изгибающие моменты могут быть представлены и соответствующими векторами (будем обозначать их с двойной стрелкой), и тогда система сил в узле будет иметь вид, показанный на рис. 3.3б. Положительные направления векторов-моментов определяются также согласно правилу “буравчика”.

Для балки, как конечного элемента СПБ, будем иметь по шесть перемещений (рис. 3.4) и усилий (рис. 3.5) по концам и векторы (матрицы) перемещений и реакций для них будут иметь вид:

$$\{r'\} = \begin{Bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \\ r'_4 \\ r'_5 \\ r'_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r^i \\ M_x^i \\ M_y^i \\ r^{\hat{e}} \\ M_x^{\hat{e}} \\ M_y^{\hat{e}} \end{Bmatrix}; \quad \{\delta'\} = \begin{Bmatrix} \delta'_1 \\ \delta'_2 \\ \delta'_3 \\ \delta'_4 \\ \delta'_5 \\ \delta'_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_z^i \\ \varphi_x^i \\ \varphi_y^i \\ \delta_z^{\hat{e}} \\ \varphi_x^{\hat{e}} \\ \varphi_y^{\hat{e}} \end{Bmatrix}. \quad (3.2)$$

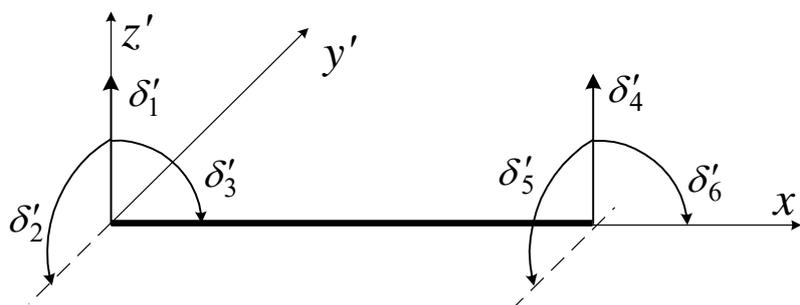


Рис. 3.4 Перемещения концов КЭ СПБ

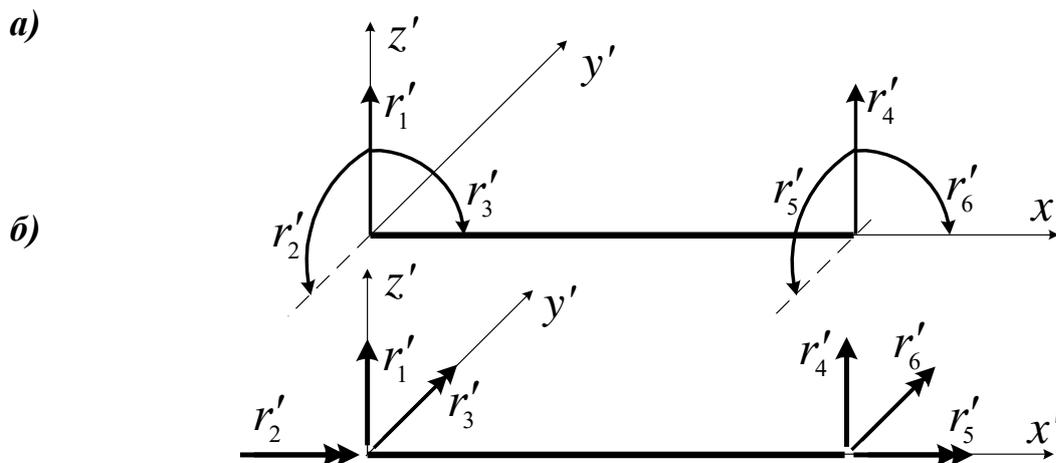


Рис. 3.5. Реакции по концам КЭ СПБ в обычном (а) и в векторном (б) виде

Матрицы жесткости КЭ в местной системе координат несложно получить аналогично тому, как это делалось для КЭ плоских стержневых систем, учитывая физический смысл их элементов  $r_{ik}$ . При этом здесь нужно учитывать, что наряду с поперечным изгибом балок в них возникает и кручение. Следует отметить также, что в местной системе координат для КЭ деформации поперечного изгиба и кручения, как и усилия возникающие от них, не зависят друг от друга.

Для определения элементов  $r_{ik}$  матриц жесткости, соответствующих кручению, рассмотрим КЭ, представленный на рис. 3.6, и запишем для него закон

Гука при кручении 
$$\theta = \frac{M_{\epsilon\delta} l}{GJ_{\epsilon\delta}}, \quad (3.3)$$

где  $\theta$  – угол закручивания элемента;  $M_{кр}$  – крутящий момент, действующий в элементе;  $GJ_{кр}$  – жесткость элемента при кручении;  $G$  – модуль упругости второго рода;  $J_{кр}$  – момент инерции при кручении.

Задав на левом конце стержня угол закручивания  $\theta = \delta'_2 = 1$ , получим величину крутящего момента, который должен при этом возникать в КЭ

$$\frac{M_{\epsilon\delta} l}{GJ_{\epsilon\delta}} = 1 \Rightarrow M_{\epsilon\delta} = \frac{GJ_{\epsilon\delta}}{l},$$

и соответственно величины реакций по концам КЭ (рис. 3.6):

$$r'_{22} = \frac{GJ_{\epsilon\delta}}{l}; \quad r'_{52} = -\frac{GJ_{\epsilon\delta}}{l}. \quad (3.4)$$

Приняв аналогично единичным угол закручивания правого конца КЭ, получим:

$$r'_{25} = -\frac{GJ_{\epsilon\delta}}{l}; \quad r'_{55} = \frac{GJ_{\epsilon\delta}}{l}. \quad (3.4')$$

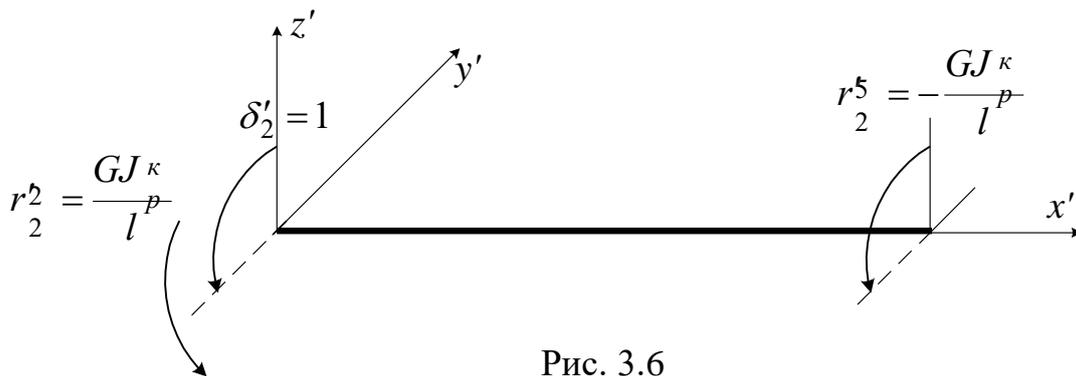


Рис. 3.6

Сделаем оценку жесткости при кручении в сравнении с изгибной жесткостью для прямоугольных сечений (высотой  $h$  и шириной  $b$ ):

– изгибная жесткость 
$$EJ = E \frac{bh^3}{12} = 0,0833Ebh^3;$$

– жесткость при кручении

$$GJ_{кр} = \frac{E}{2(1+\nu)} \beta bh^3 = \frac{0,2 \div 0,33}{2(1+0,3)} Ebh^3 = (0,077 \div 0,127) Ebh^3,$$

где безразмерный параметр  $\beta$  для прямоугольных сечений зависит от соотношения размеров сечения  $h/b$  и изменяется в пределах от 0,2 до 0,33.

Получаем, что жесткости при кручении и при изгибе для прямоугольных сечений являются приблизительно величинами одного порядка:

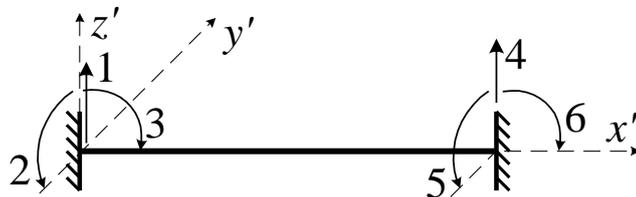
$$GJ_{кр} = (0,924 \div 1,525) EJ. \quad (3.5)$$

Для прокатных профилей момент инерции сечений при кручении несколько ниже, чем для сплошных прямоугольных сечений, и для них чаще всего

$$GJ_{кр} \approx (0,2 \div 0,3)EJ. \quad (3.5')$$

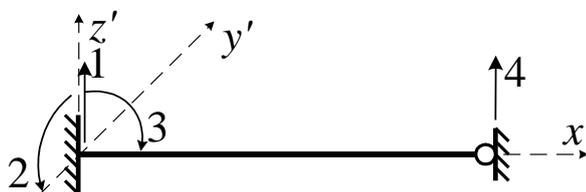
В результате матрицы жесткости КЭ СПБ в местной системе координат получим в виде:

а) Tun 1



$$[K'_s] = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & -\frac{12EJ}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{GJ_{кр}}{l} & 0 & 0 & -\frac{GJ_{кр}}{l} & 0 \\ -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{4EJ}{l} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{12EJ}{l^3} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{12EJ}{l^3} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{GJ_{кр}}{l} & 0 & 0 & \frac{GJ_{кр}}{l} & 0 \\ -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{2EJ}{l} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}; \quad (3.6)$$

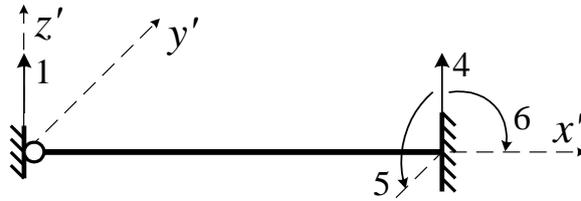
б) Tun 2



$$[K'_y] = \begin{bmatrix} \frac{3EJ}{l^3} & 0 & -\frac{3EJ}{l^2} & -\frac{3EJ}{l^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3EJ}{l^2} & 0 & \frac{3EJ}{l} & \frac{3EJ}{l^2} & 0 & 0 \\ -\frac{3EJ}{l^3} & 0 & \frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (3.7)$$

**Примечание:** Здесь принято, что в шарнире нет связей, препятствующих закручиванию стержней.

в) Туп 3



$$[K'_{y'}] = \begin{bmatrix} \frac{3EJ}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EJ}{l^3} & 0 & -\frac{3EJ}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3EJ}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EJ}{l^3} & 0 & \frac{3EJ}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3EJ}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3EJ}{l^2} & 0 & \frac{3EJ}{l} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

### 3.3. Преобразование координат

Для получения матриц жесткости конечных элементов в общей системе координат необходимо иметь матрицу преобразования координат  $[T_\alpha]$ , которую получим аналогично тому, как это мы делали ранее, записав, например, для элементов СПБ зависимость между усилиями по концам конечных элементов в общей и местной системах координат (2.41) вида

$$\{r\} = [T_\alpha]^T \{r'\}. \quad (3.9)$$

Все усилия, действующие по концам конечных элементов СПБ в общей и местной системах координат, показаны на рис. 3.7. Выражение (3.9) получим в виде

$$\begin{cases} r_1 = r'_1 \cdot 1 + r'_2 \cdot 0 + r'_3 \cdot 0 + r'_4 \cdot 0 + r'_5 \cdot 0 + r'_6 \cdot 0; \\ r_2 = r'_1 \cdot 0 + r'_2 \cos \gamma - r'_3 \sin \gamma + r'_4 \cdot 0 + r'_5 \cdot 0 + r'_6 \cdot 0; \\ r_3 = r'_1 \cdot 0 + r'_2 \sin \gamma + r'_3 \cos \gamma + r'_4 \cdot 0 + r'_5 \cdot 0 + r'_6 \cdot 0; \\ r_4 = r'_1 \cdot 0 + r'_2 \cdot 0 + r'_3 \cdot 0 + r'_4 \cdot 1 + r'_5 \cdot 0 + r'_6 \cdot 0; \\ r_5 = r'_1 \cdot 0 + r'_2 \cdot 0 + r'_3 \cdot 0 + r'_4 \cdot 0 + r'_5 \cos \gamma - r'_6 \sin \gamma; \\ r_6 = r'_1 \cdot 0 + r'_2 \cdot 0 + r'_3 \cdot 0 + r'_4 \cdot 0 + r'_5 \sin \gamma + r'_6 \cos \gamma. \end{cases}$$

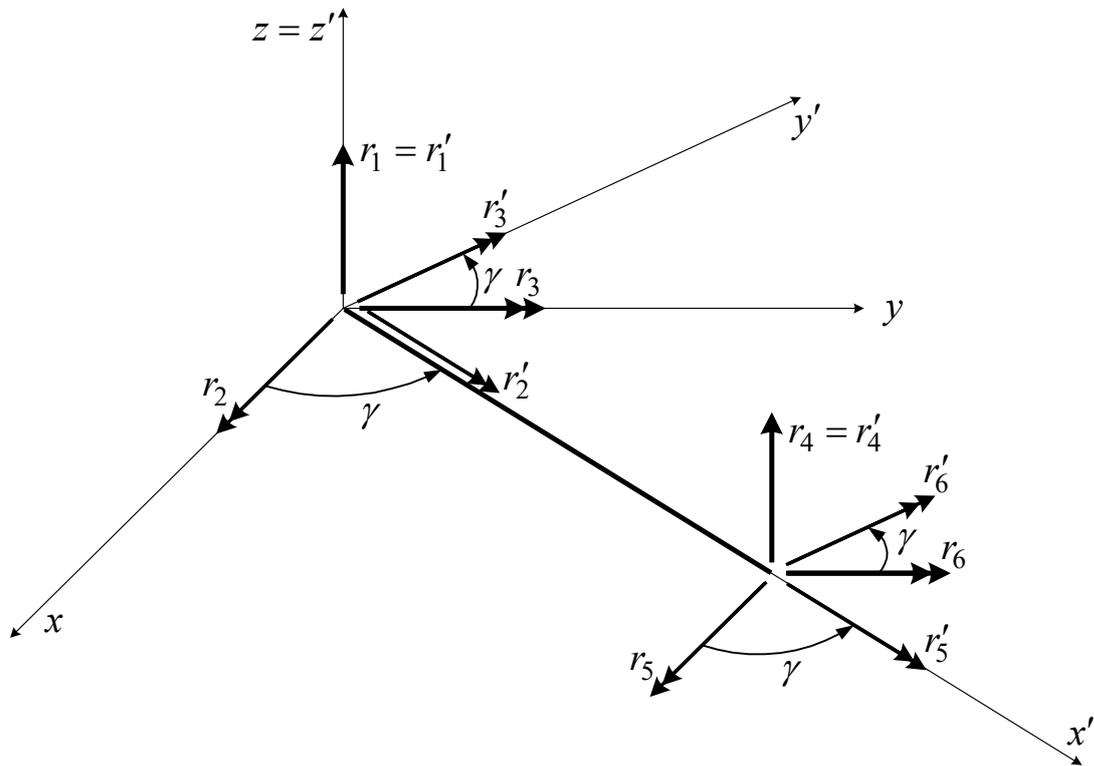


Рис. 3.7

Сравнивая это выражение с (3.9) и переходя от транспонированной матрицы к обычной, матрицу преобразования координат для конечных элементов системы перекрестных балок получим в виде

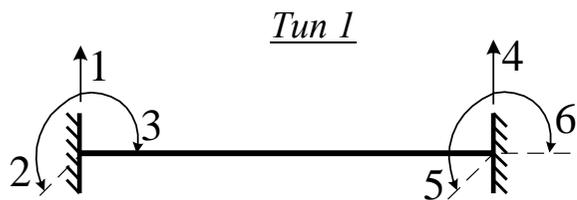
$$[T_\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Теперь матрицы жесткости конечных элементов в общей системе координат можно получить согласно выражению (2.43)

$$[K] = [T_\alpha]^T [K'] [T_\alpha],$$

и эти матрицы для 1 ÷ 3 типов конечных элементов будут иметь вид, представленный в (3.11) – (3.13).

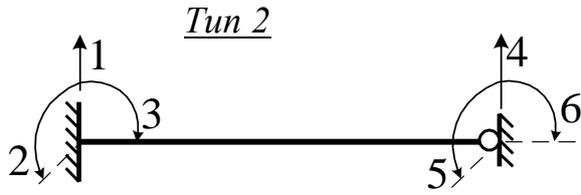
В остальном расчетные зависимости и процедура расчета для систем перекрестных балок ничем не отличаются от полученных и изложенных ранее. Система разрешающих уравнений имеет вид (2.34), (2.36). Усилия по концам элементов определяются выражениями (2.51), (2.51').



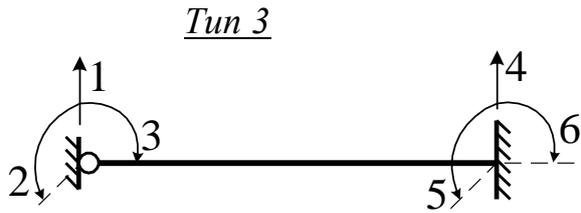
$[K]=$

(3.11)

$$= \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \sin \gamma & -\frac{6EJ}{l^2} \cos \gamma & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \sin \gamma & -\frac{6EJ}{l^2} \cos \gamma \\ \frac{6EJ}{l^2} \sin \gamma & \frac{GJ_{kp}}{l} \cos^2 \gamma + \frac{4EJ}{l} \sin^2 \gamma & \frac{1}{2} \left( \frac{GJ_{kp}}{l} - \frac{4EJ}{l} \right) \sin 2\gamma & -\frac{6EJ}{l^2} \sin \gamma & -\frac{GJ_{kp}}{l} \cos^2 \gamma + \frac{2EJ}{l} \sin^2 \gamma & -\frac{1}{2} \left( \frac{GJ_{kp}}{l} + \frac{2EJ}{l} \right) \sin 2\gamma \\ -\frac{6EJ}{l^2} \cos \gamma & \frac{1}{2} \left( \frac{GJ_{kp}}{l} - \frac{4EJ}{l} \right) \sin 2\gamma & \frac{GJ_{kp}}{l} \sin^2 \gamma + \frac{4EJ}{l} \cos^2 \gamma & \frac{6EJ}{l^2} \cos \gamma & -\frac{1}{2} \left( \frac{GJ_{kp}}{l} + \frac{2EJ}{l} \right) \sin 2\gamma & -\frac{GJ_{kp}}{l} \sin^2 \gamma + \frac{2EJ}{l} \cos^2 \gamma \\ -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \sin \gamma & \frac{6EJ}{l^2} \cos \gamma & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \sin \gamma & \frac{6EJ}{l^2} \cos \gamma \\ \frac{6EJ}{l^2} \sin \gamma & -\frac{GJ_{kp}}{l} \cos^2 \gamma + \frac{2EJ}{l} \sin^2 \gamma & -\frac{1}{2} \left( \frac{GJ_{kp}}{l} + \frac{2EJ}{l} \right) \sin 2\gamma & -\frac{6EJ}{l^2} \sin \gamma & \frac{GJ_{kp}}{l} \cos^2 \gamma + \frac{4EJ}{l} \sin^2 \gamma & \frac{1}{2} \left( \frac{GJ_{kp}}{l} - \frac{4EJ}{l} \right) \sin 2\gamma \\ -\frac{6EJ}{l^2} \cos \gamma & -\frac{1}{2} \left( \frac{GJ_{kp}}{l} + \frac{2EJ}{l} \right) \sin 2\gamma & -\frac{GJ_{kp}}{l} \sin^2 \gamma + \frac{2EJ}{l} \cos^2 \gamma & \frac{6EJ}{l^2} \cos \gamma & \frac{1}{2} \left( \frac{GJ_{kp}}{l} - \frac{4EJ}{l} \right) \sin 2\gamma & \frac{GJ_{kp}}{l} \sin^2 \gamma + \frac{4EJ}{l} \cos^2 \gamma \end{bmatrix}$$



$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{3EJ}{l^3} & \frac{3EJ}{l^2} \sin \gamma & -\frac{3EJ}{l^2} \cos \gamma & -\frac{3EJ}{l^3} & 0 & 0 \\ \frac{3EJ}{l^2} \sin \gamma & \frac{3EJ}{l} \sin^2 \gamma & -\frac{3EJ}{2l} \sin 2\gamma & -\frac{3EJ}{l^2} \sin \gamma & 0 & 0 \\ -\frac{3EJ}{l^2} \cos \gamma & -\frac{3EJ}{2l} \sin 2\gamma & \frac{3EJ}{l} \cos^2 \gamma & \frac{3EJ}{l^2} \cos \gamma & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3EJ}{l^3} & \frac{3EJ}{l^2} \sin \gamma & \frac{3EJ}{l^2} \cos \gamma & \frac{3EJ}{l^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$



$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{3EJ}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EJ}{l^3} & \frac{3EJ}{l^2} \sin \gamma & -\frac{3EJ}{l^2} \cos \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3EJ}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EJ}{l^3} & -\frac{3EJ}{l^2} \sin \gamma & \frac{3EJ}{l^2} \cos \gamma \\ \frac{3EJ}{l^2} \sin \gamma & 0 & 0 & -\frac{3EJ}{l^2} \sin \gamma & \frac{3EJ}{l} \sin^2 \gamma & -\frac{3EJ}{2l} \sin 2\gamma \\ -\frac{3EJ}{l^2} \cos \gamma & 0 & 0 & \frac{3EJ}{l^2} \cos \gamma & -\frac{3EJ}{2l} \sin 2\gamma & \frac{3EJ}{l} \cos^2 \gamma \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

### 3.4. Примеры расчёта систем перекрестных балок

**Пример 1.** Рассмотрим расчёт системы перекрёстных балок, представленной на рис. 3.8 (жёсткости стержней при кручении принимаются равными их жёсткостям при изгибе). Разбивка системы на конечные элементы, которых будет семь и которые соединяются в восьми узлах, показана на рис. 3.9. Там же представлены направления всех возможных двадцати перемещений узлов (узлы 1 и 6 приняты шарнирными (шаровые шарниры), не воспринимающими поворота и кручения, поэтому направления поворота и кручения в этих узлах опущены, как отсутствующие, в связи с чем в матрицах жёсткости 1-го (тип 2) и 5-го (тип 3) конечных элементов будут сразу вычеркнуты (опущены) соответствующие строки и столбцы). Для 5-го конечного элемента показано также преобразование равномерно распределённой нагрузки к узловым силам ( $P'_{q11} = -7,5 \text{ кН}$ ,  $P'_{q14} = -4,5 \text{ кН}$ ) и моменту ( $P'_{q12} = -4,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ).

Идентификация конечных элементов:

- **1-ый КЭ:** тип 3;  $l_1 = 3 \text{ м}$ ;  $\gamma_1 = 90^\circ$ ;  $EJ_1 = 4,5EJ$ ;  $GJ_{кр1} = 4,5EJ$ ;
- **2-ой, 3-ий, 6-ой и 7-ой КЭ:** тип 1;  $l_2 = l_3 = l_6 = l_7 = 2 \text{ м}$ ;  $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_6 = \gamma_7 = 0$ ;  
 $EJ_2 = EJ_3 = EJ_6 = EJ_7 = EJ$ ;  $GJ_{кр2} = GJ_{кр3} = GJ_{кр6} = GJ_{кр7} = EJ$ ;
- **4-ый КЭ:** тип 1;  $l_4 = 4 \text{ м}$ ;  $\gamma_4 = 90^\circ$ ;  $EJ_4 = 4EJ$ ;  $GJ_{кр4} = 4EJ$ ;
- **5-ый КЭ:** тип 2;  $l_5 = 3 \text{ м}$ ;  $\gamma_5 = 90^\circ$ ;  $EJ_5 = 4,5EJ$ ;  $GJ_{кр5} = 4,5EJ$ .

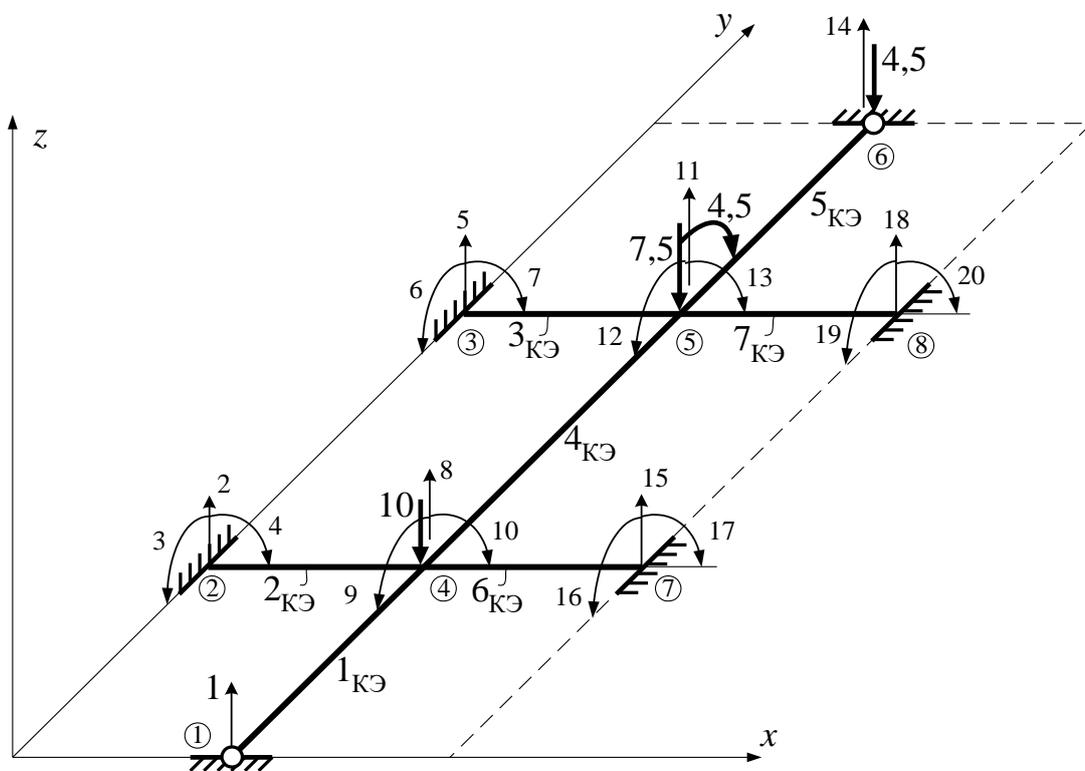
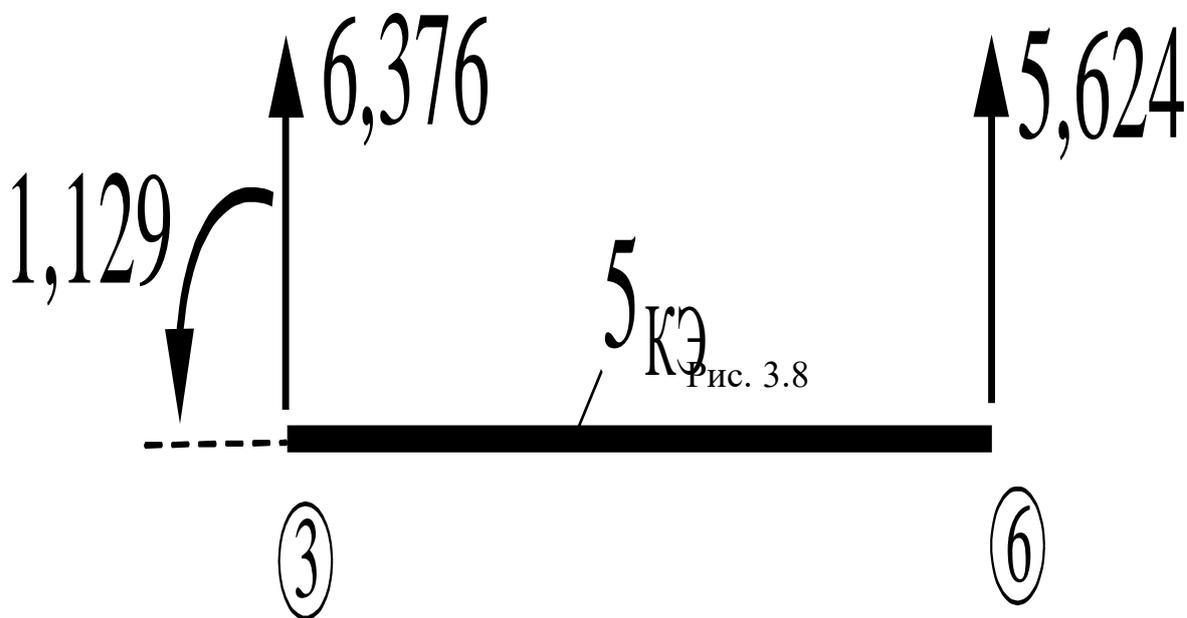
Общая система разрешающих уравнений со структурной схемой матрицы жёсткости дискретной модели показана в (3.14). Учет граничных условий (в направлениях наличия опорных связей перемещения равны нулю) и учет симметрии системы относительно оси 1–6 (вследствие чего перемещения  $\Delta_{10}$  и  $\Delta_{13}$  равны нулю) приводит к вычёркиванию в системе уравнений 16-ти строк и 16-ти столбцов, остаются только перемещения  $\Delta_8, \Delta_9, \Delta_{11}$  и  $\Delta_{12}$  и соответствующие им строки и столбцы. Система уравнений принимает вид

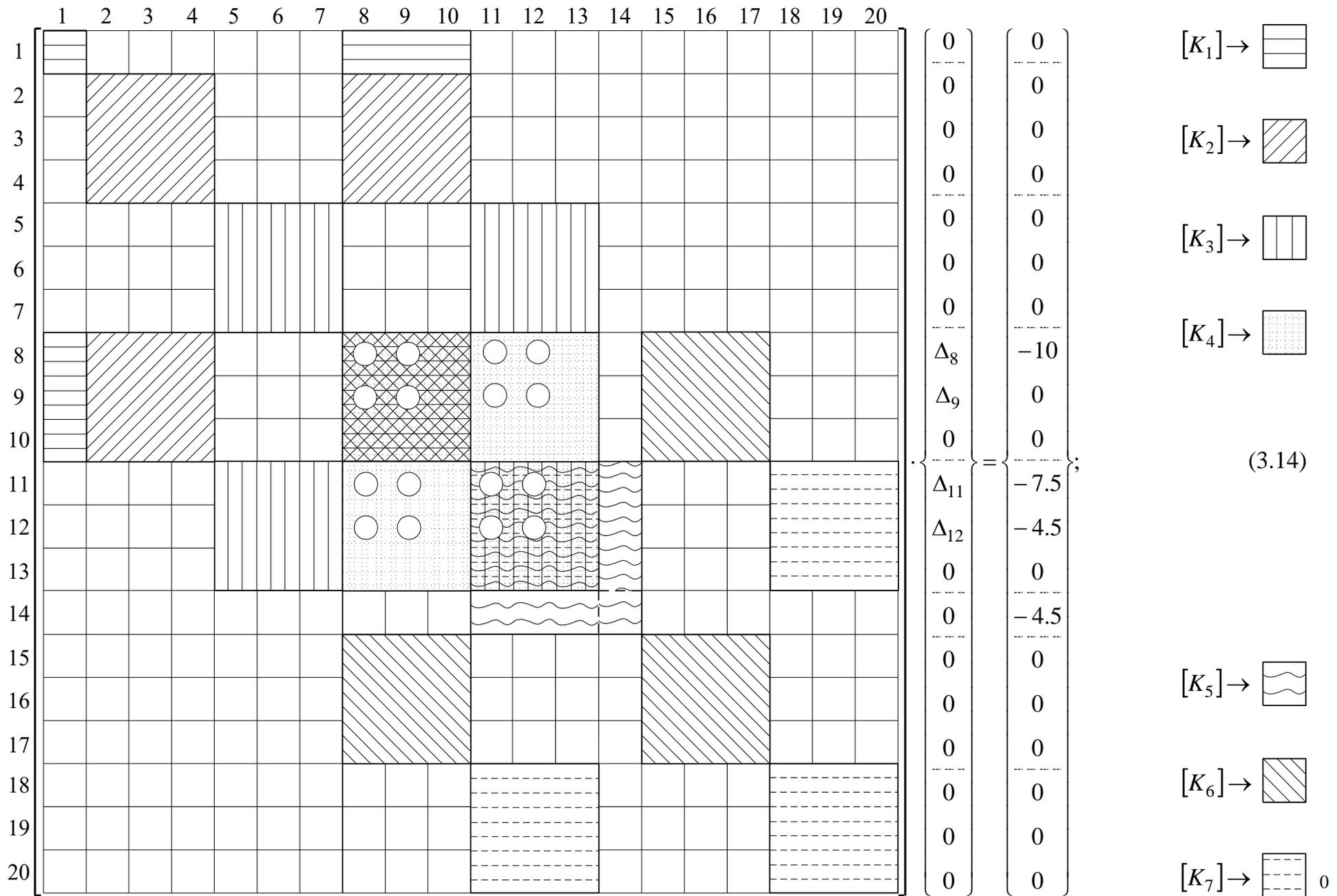
$$\begin{cases} k_{8,8}\Delta_8 + k_{8,9}\Delta_9 + k_{8,11}\Delta_{11} + k_{8,12}\Delta_{12} = P_8; \\ k_{9,8}\Delta_8 + k_{9,9}\Delta_9 + k_{9,11}\Delta_{11} + k_{9,12}\Delta_{12} = P_9; \\ k_{11,8}\Delta_8 + k_{11,9}\Delta_9 + k_{11,11}\Delta_{11} + k_{11,12}\Delta_{12} = P_{11}; \\ k_{12,8}\Delta_8 + k_{12,9}\Delta_9 + k_{12,11}\Delta_{11} + k_{12,12}\Delta_{12} = P_{12}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Вычисление коэффициентов  $k_{i,j}$  этой системы уравнений выполним на основе (2.33) сложением соответствующих коэффициентов  $r_{i,j}^s$  матриц жёсткости  $s$ -тых КЭ в общей системе координат с учётом их наложения (сложения) в структурной матрице жёсткости системы (3.14):

$$k_{8,8} = r_{8,8}^1 + r_{8,8}^2 + r_{8,8}^4 + r_{8,8}^6 = \frac{3 \cdot 4,5EJ}{3^3} + \frac{12EJ}{2^2} + \frac{12 \cdot 4EJ}{4^3} + \frac{12EJ}{2^2} = 4,25EJ;$$

$$k_{8,9} = r_{8,9}^1 + r_{8,9}^2 + r_{8,9}^4 + r_{8,9}^6 = -\frac{3 \cdot 4,5 EJ}{3^2} \sin 90^\circ - \frac{6 EJ}{2^2} \sin 0^\circ + \frac{6 \cdot 4 EJ}{4^2} \sin 90^\circ + \frac{6 EJ}{2^2} \sin 0^\circ = 0;$$





$$k_{8,11} = r_{8,11}^4 = -\frac{12 \cdot 4EJ}{4^3} = -0,75EJ; \quad k_{8,12} = r_{8,12}^4 = \frac{6 \cdot 4EJ}{4^2} \sin 90^\circ = 1,5EJ;$$

$$k_{9,9} = r_{9,9}^1 + r_{9,9}^2 + r_{9,9}^4 + r_{9,9}^6 = \frac{3 \cdot 4,5EJ}{3} \sin^2 90^\circ + \left( \frac{EJ}{2} \cos^2 0^\circ + \frac{4EJ}{2} \sin^2 0^\circ \right) +$$

$$+ \left( \frac{4 \cdot 4EJ}{4} \cos^2 90^\circ + \frac{4 \cdot 4EJ}{4} \sin^2 90^\circ \right) + \left( \frac{EJ}{2} \cos^2 0^\circ + \frac{4EJ}{2} \sin^2 0^\circ \right) = 9,5EJ;$$

$$k_{9,11} = r_{9,11}^4 = -\frac{6 \cdot 4EJ}{4^2} \sin 90^\circ = -1,5EJ;$$

$$k_{9,12} = r_{9,12}^4 = -\frac{4EJ}{4} \cos^2 90^\circ + \frac{2 \cdot 4EJ}{4} \sin^2 90^\circ = 2EJ;$$

$$k_{11,11} = r_{11,11}^3 + r_{11,11}^4 + r_{11,11}^5 + r_{11,11}^7 = \frac{12EJ}{2^3} + \frac{12 \cdot 4EJ}{4^3} + \frac{3 \cdot 4,5EJ}{3^3} + \frac{12EJ}{2^3} = 4,25EJ;$$

$$k_{11,12} = r_{11,12}^3 + r_{11,12}^4 + r_{11,12}^5 + r_{11,12}^7 = -\frac{6EJ}{2^2} \sin 0^\circ - \frac{6 \cdot 4EJ}{4^2} \sin 90^\circ + \frac{3 \cdot 4,5EJ}{3^2} \sin 90^\circ +$$

$$+ \frac{6EJ}{2^2} \sin 0^\circ = 0;$$

$$k_{12,12} = r_{12,12}^3 + r_{12,12}^4 + r_{12,12}^5 + r_{12,12}^7 = \left( \frac{EJ}{2} \cos^2 0^\circ + \frac{4EJ}{2} \sin^2 0^\circ \right) +$$

$$+ \left( \frac{4EJ}{4} \cos^2 90^\circ + \frac{4 \cdot 4EJ}{4} \sin^2 90^\circ \right) + \frac{3 \cdot 4,5EJ}{3} \sin^2 90^\circ +$$

$$+ \left( \frac{EJ}{2} \cos^2 0^\circ + \frac{4EJ}{2} \sin^2 0^\circ \right) = 9,5EJ.$$

Остальные коэффициенты симметричны относительно главной диагонали (3.15). Подставляем эти коэффициенты в систему уравнений (3.15)

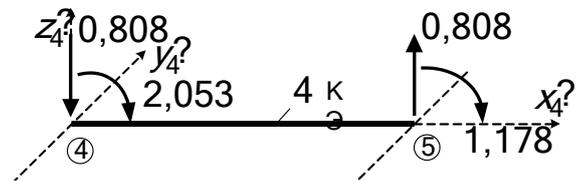
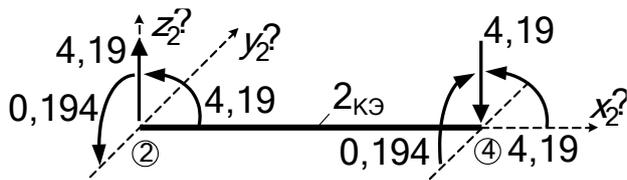
$$\begin{cases} 4,25\Delta_8 + 0 \cdot \Delta_9 - 0,75\Delta_{11} + 1,5\Delta_{12} = -10/EJ; \\ 0 \cdot \Delta_8 + 9,5\Delta_9 - 1,5\Delta_{11} + 2\Delta_{12} = 0; \\ -0,75\Delta_8 - 1,5\Delta_9 + 4,25\Delta_{11} + 0 \cdot \Delta_{12} = -7,5/EJ; \\ 1,5\Delta_8 + 2\Delta_9 + 0 \cdot \Delta_{11} + 9,5\Delta_{12} = -4,5/EJ \end{cases}$$

и решаем её, находя искомые перемещения узлов системы:

$$\Delta_8 = -\frac{2,793}{EJ}; \quad \Delta_9 = -\frac{0,3884}{EJ}; \quad \Delta_{11} = -\frac{2,3946}{EJ}; \quad \Delta_{12} = \frac{0,04907}{EJ}.$$

Определение усилий по концам конечных элементов выполним по формулам (2.51), (2.51'). Покажем эти вычисления для 2-го (для 3, 6 и 7-го КЭ эти расчёты будут подобны), 4-го и 5-го конечных элементов:

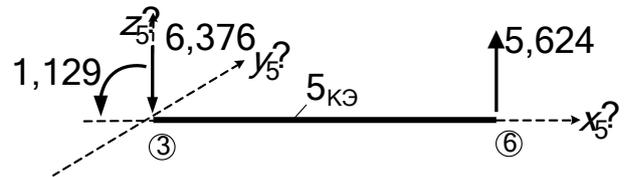
$$\{r'_2\} = [k'_2] \cdot \{\Delta_2\} = - \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & -1,5 & -1,5 & 0 & -1,5 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & -0,5 & 0 \\ -1,5 & 0 & 2 & 1,5 & 0 & 1 \\ -1,5 & 0 & 1,5 & 1,5 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ -1,5 & 0 & 1 & 1,5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2,793 \\ -0,3884 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4,19 \\ 0,194 \\ -4,19 \\ -4,19 \\ -0,194 \\ -4,19 \end{Bmatrix};$$



$$\{r'_4\} = [K'_4] \cdot [T_{\alpha 4}] \cdot \{\Delta_4\} =$$

$$= EJ \begin{bmatrix} 0,75 & 0 & -1,5 & -0,75 & 0 & -1,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1,5 & 0 & 4 & 1,5 & 0 & 2 \\ -0,75 & 0 & 1,5 & 0,75 & 0 & 1,5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1,5 & 0 & 2 & 1,5 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ} \begin{Bmatrix} -2,793 \\ -0,3884 \\ 0 \\ -2,3946 \\ 0,0491 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,808 \\ 0 \\ 2,053 \\ 0,808 \\ 0 \\ 1,178 \end{Bmatrix};$$

$$\{r'_5\} = [K'_5] \cdot [T_{\alpha 5}] \cdot \{\Delta_5\} - \{P'_{q5}\} =$$



$$= EJ \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & -1,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,5 & 0 & 4,5 & 1,5 \\ -0,5 & 0 & 1,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ} \begin{Bmatrix} -2,3946 \\ 0,04907 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -7,5 \\ 0 \\ 4,5 \\ -4,5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6,3763 \\ 0 \\ -1,129 \\ 5,6237 \end{Bmatrix}.$$

Окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных сил и крутящих моментов показаны на рис. 3.10.

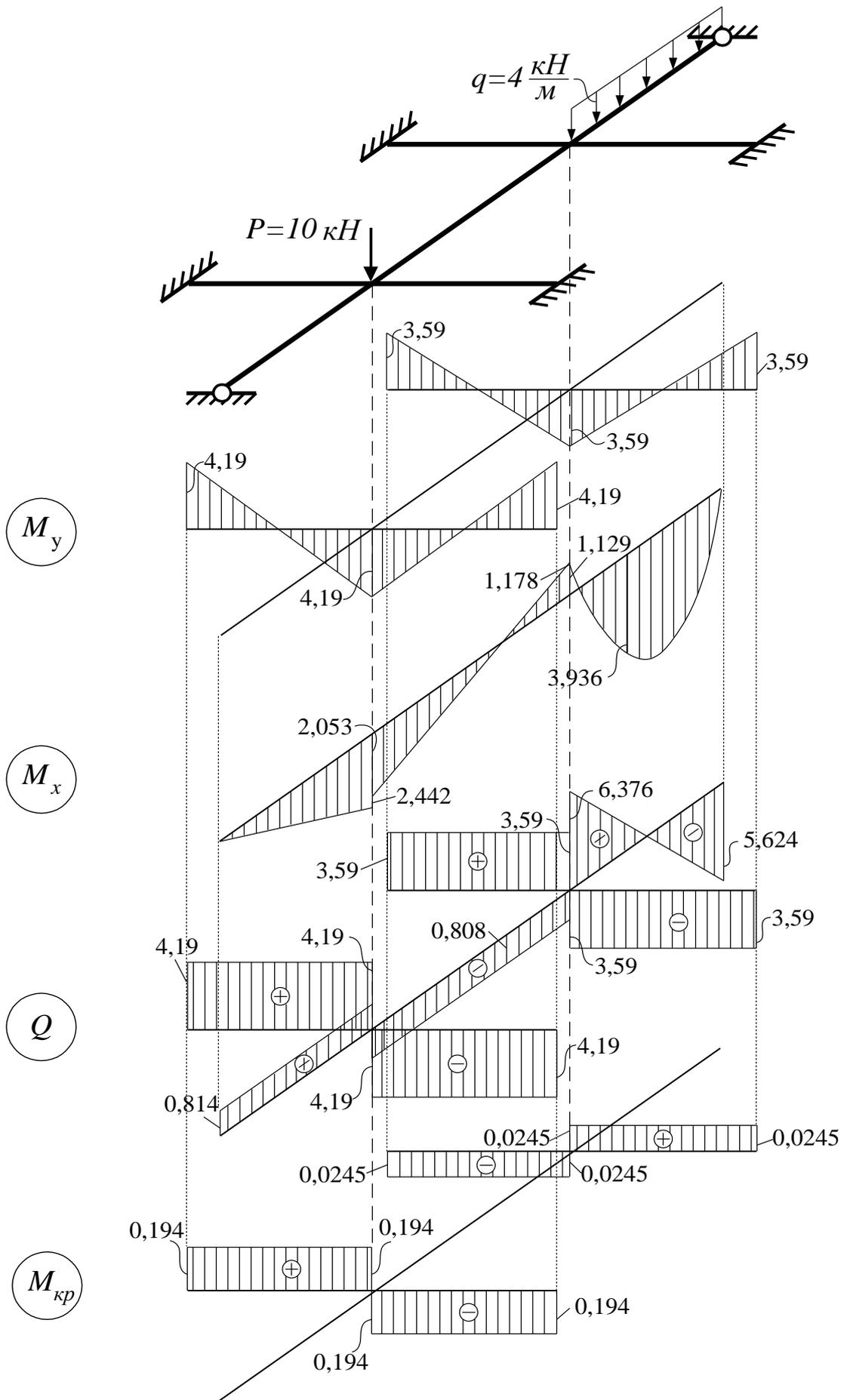


Рис. 3.10

**Пример 2.** Рассмотрим ещё один пример СПБ, не обладающей симметрией, и в которой есть балки, не параллельные осям общей системы координат (рис. 3.11). Жёсткости балок при кручении примем равными изгибным жёсткостям относительно осей  $y'$  ( $GJ_{кр.s} = EJ_{ys} = EJ_s$ ).

Расчётная дискретная модель системы будет состоять из трёх конечных элементов, соединяющихся между собой в узле 3 и с основанием в узлах 1, 2, 4 (рис. 3.12). Общее число узловых перемещений равно 12, из них 9 перемещений в узлах 1, 2 и 4 будет нулевыми. Приведение равномерно распределённой нагрузки к узловой на 1-ый КЭ в местной системе координат показано на рис. 3.13, а в общей системе координат – на рис. 3.14.

Общая система разрешающих уравнений  $[K] \cdot \{\Delta\} = \{P\}$  со структурной схемой матрицы жёсткости дискретной модели показана в (3.15):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
1													0	-12
2													0	-6
3													0	8
4													0	0
5													0	0
6													0	0
7													$\Delta_7$	-12
8													$\Delta_8$	6
9													$\Delta_9$	-8
10													0	0
11													0	0
12													0	0

(3.15)

здесь обозначено:  $[K_1] \rightarrow$  ;  $[K_2] \rightarrow$  ;  $[K_3] \rightarrow$  .

Сокращенная система уравнений (после вычеркивания всех строк и столбцов, соответствующих нулевым перемещениям в связи с наличием опорных связей) принимает вид:

$$\begin{cases} k_{77}\Delta_7 + k_{78}\Delta_8 + k_{79}\Delta_9 = -12; \\ k_{87}\Delta_7 + k_{88}\Delta_8 + k_{89}\Delta_9 = 6; \\ k_{97}\Delta_7 + k_{98}\Delta_8 + k_{99}\Delta_9 = -8. \end{cases} \quad (3.16)$$

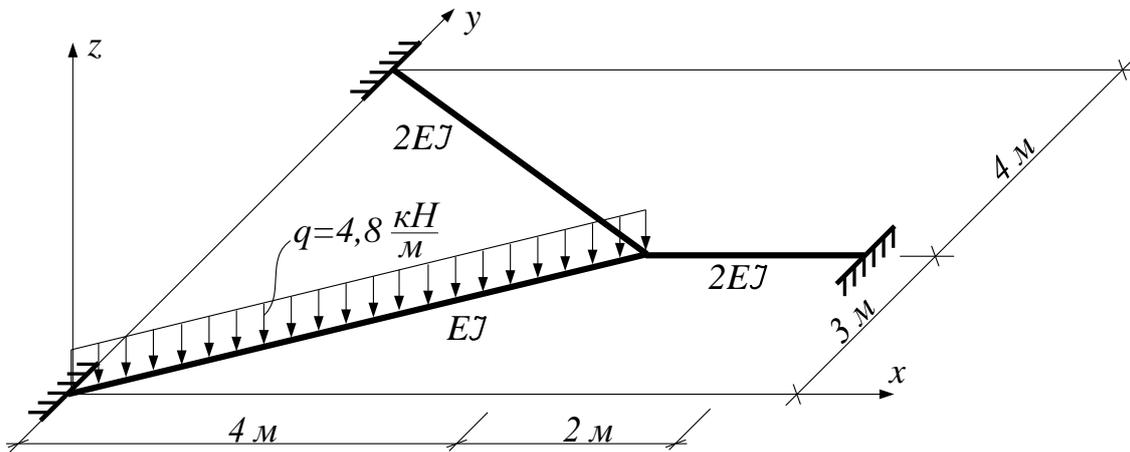
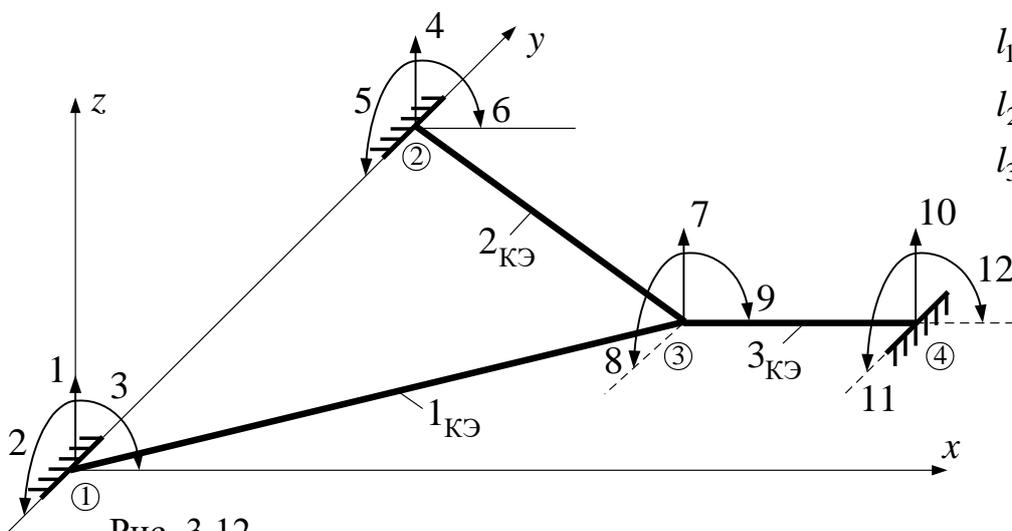


Рис. 3.11



$$l_1 = 5 \text{ м};$$

$$l_2 = 4\sqrt{2} = 5,657 \text{ м};$$

$$l_3 = 2 \text{ м}.$$

Рис. 3.12



Рис. 3.13

$$\gamma_1 = 72,9^\circ$$

$$\sin \gamma_1 = 0,6;$$

$$\cos \gamma_1 = 0,8;$$

$$\gamma_2 = 315^\circ$$

$$\sin \gamma_2 = -0,707;$$

$$\cos \gamma_2 = 0,707.$$

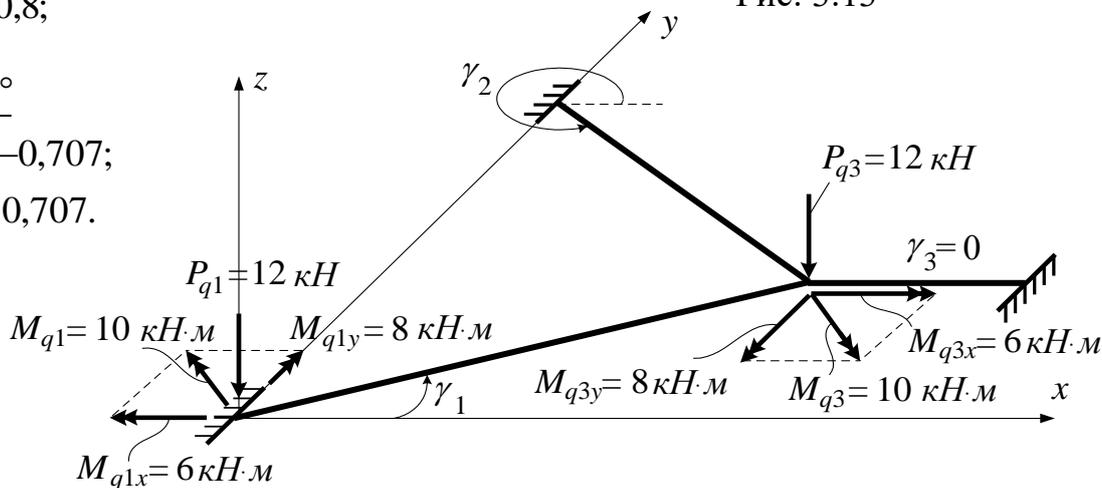


Рис. 3.14

Коэффициенты этой системы уравнений согласно (2.33) равны:

$$k_{77} = \sum_{s=1}^3 r_{77}^s = \sum_{s=1}^3 \frac{12EJ_s}{l_s^3} = \frac{12EJ}{5^3} + \frac{12 \cdot 2EJ}{5,657^3} + \frac{12 \cdot 2EJ}{2^3} = 3,229EJ;$$

$$k_{78} = \sum_{s=1}^3 r_{78}^s = -\frac{6EJ}{5^2} \sin 36,87^\circ - \frac{6 \cdot 2EJ}{5,657^2} \sin 315^\circ + \frac{6 \cdot 2EJ}{2^2} \sin 0^\circ = 0,121EJ;$$

$$k_{79} = \sum_{s=1}^3 r_{79}^s = \frac{6EJ}{5^2} \cos 36,87^\circ + \frac{6 \cdot 2EJ}{5,657^2} \cos 315^\circ - \frac{6 \cdot 2EJ}{2^2} \cos 0^\circ = -2,543EJ;$$

$$k_{88} = \sum_{s=1}^3 r_{88}^s = \sum_{s=1}^3 \left( \frac{GJ_{kp.s}}{l_s} \cos^2 \gamma_s + \frac{4EJ_s}{l_s} \sin^2 \gamma_s \right) = \left( \frac{EJ}{5} \cos^2 36,87^\circ + \frac{4EJ}{5} \sin^2 36,87^\circ \right) +$$

$$+ \left( \frac{2EJ}{5,657} \cos^2 315^\circ + \frac{4 \cdot 2EJ}{5,657} \sin^2 315^\circ \right) + \left( \frac{2EJ}{2} \cos^2 0^\circ + \frac{4 \cdot 2EJ}{2} \sin^2 0^\circ \right) = 2,300EJ;$$

$$k_{89} = \sum_{s=1}^3 r_{89}^s = \sum_{s=1}^3 \frac{1}{2} \left( \frac{GJ_{kp.s}}{l_s} - \frac{4EJ_s}{l_s} \right) \sin 2\gamma_s = \frac{1}{2} \left( \frac{EJ}{5} - \frac{4EJ}{5} \right) \sin(2 \cdot 36,87^\circ) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \frac{2EJ}{5,657} - \frac{4 \cdot 2EJ}{5,657} \right) \sin(2 \cdot 315^\circ) + \frac{1}{2} \left( \frac{2EJ}{2} - \frac{4 \cdot 2EJ}{2} \right) \sin(2 \cdot 0^\circ) = 0,242EJ;$$

$$k_{99} = \sum_{s=1}^3 r_{99}^s = \sum_{s=1}^3 \left( \frac{GJ_{kp.s}}{l_s} \sin^2 \gamma_s + \frac{4EJ_s}{l_s} \cos^2 \gamma_s \right) = \left( \frac{EJ}{5} \sin^2 36,87^\circ + \frac{4EJ}{5} \cos^2 36,87^\circ \right) +$$

$$+ \left( \frac{2EJ}{5,657} \sin^2 315^\circ + \frac{4 \cdot 2EJ}{5,657} \cos^2 315^\circ \right) + \left( \frac{2EJ}{2} \sin^2 0^\circ + \frac{4 \cdot 2EJ}{2} \cos^2 0^\circ \right) = 5,468EJ.$$

Остальные коэффициенты  $k_{ij}$  симметричны относительно главной диагонали (3.16). Подставляя эти значения в (3.16), получим систему уравнений

$$\begin{cases} 3,229 \Delta_7 + 0,121 \Delta_8 - 2,543 \Delta_9 = -12/EJ; \\ 0,121 \Delta_7 + 2,300 \Delta_8 + 0,242 \Delta_9 = 6/EJ; \\ -2,543 \Delta_7 + 0,242 \Delta_8 + 5,468 \Delta_9 = -8/EJ, \end{cases}$$

из решения которой найдем:

$$\Delta_7 = \frac{-8,095}{EJ}; \quad \Delta_8 = \frac{3,603}{EJ}; \quad \Delta_9 = -\frac{5,387}{EJ}.$$

Вычисление усилий в отдельных балочных КЭ выполним по выражениям (2.49) – (2.51) с учетом (3.6), (3.10) и рис. 3.13. Покажем эти вычисления здесь для первого КЭ, как наиболее сложного, и для третьего КЭ:

$$\{r'_1\} = [K'_1] \cdot [T_{\alpha 1}] \cdot \{\Delta_1\} - \{P'_{q1}\} = EJ \begin{bmatrix} 0,096 & 0 & -0,24 & -0,096 & 0 & -0,24 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 & -0,2 & 0 \\ -0,24 & 0 & 0,8 & 0,24 & 0 & 0,4 \\ -0,096 & 0 & 0,24 & 0,096 & 0 & 0,24 \\ 0 & -0,2 & 0 & 0 & 0,2 & 0 \\ -0,24 & 0 & 0,4 & 0,24 & 0 & 0,8 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8,095 \\ 3,603 \\ -5,387 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 10 \\ -12 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,330 \\ 0,070 \\ -14,532 \\ 9,670 \\ -0,070 \\ 2,880 \end{bmatrix}.$$

Схема приложения усилий по концам первого КЭ показана на рис. 3.15.

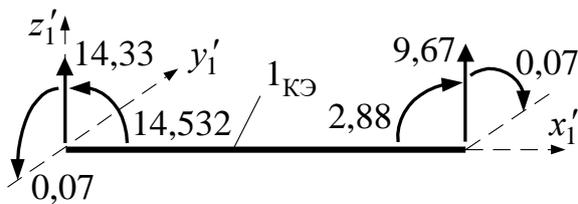


Рис. 3.15

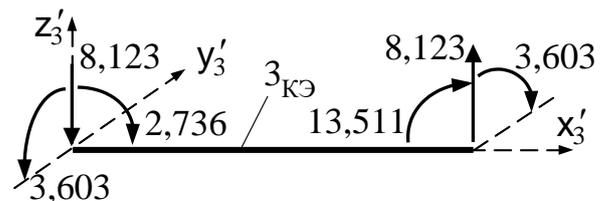


Рис. 3.16

$$\{r'_3\} = [K'_3] \cdot \{\Delta_3\} = EJ \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ} \begin{bmatrix} -8,095 \\ 3,603 \\ -5,387 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,123 \\ 3,603 \\ 2,736 \\ 8,123 \\ -3,603 \\ 13,511 \end{bmatrix}.$$

Схема приложения усилий по концам третьего КЭ показана на рис. 3.16.

Окончательные эпюры изгибающих моментов (относительно осей  $y'$ ), поперечных сил и крутящих моментов показаны на рис. 3.17. Равновесие узла 3 по моментам (в векторном виде они действуют в плоскости  $xu$ ) и по поперечным силам представлено на рис. 3.18. Уравнения равновесия узла имеют вид:

$$\begin{aligned} \sum \tilde{O} = 0; & \quad 3,408 + 1,728 + 0,056 - 3,603 - 1,591 = 0; & \quad 5,192 - 5,194 \approx 0; \\ \sum Y = 0; & \quad 1,591 + 3,408 + 0,042 - 2,304 - 2,736 = 0; & \quad 5,041 - 5,040 \approx 0; \\ \sum Z = 0; & \quad 8,123 - 9,67 + 1,546 = 0; & \quad -9,670 + 9,669 \approx 0. \end{aligned}$$

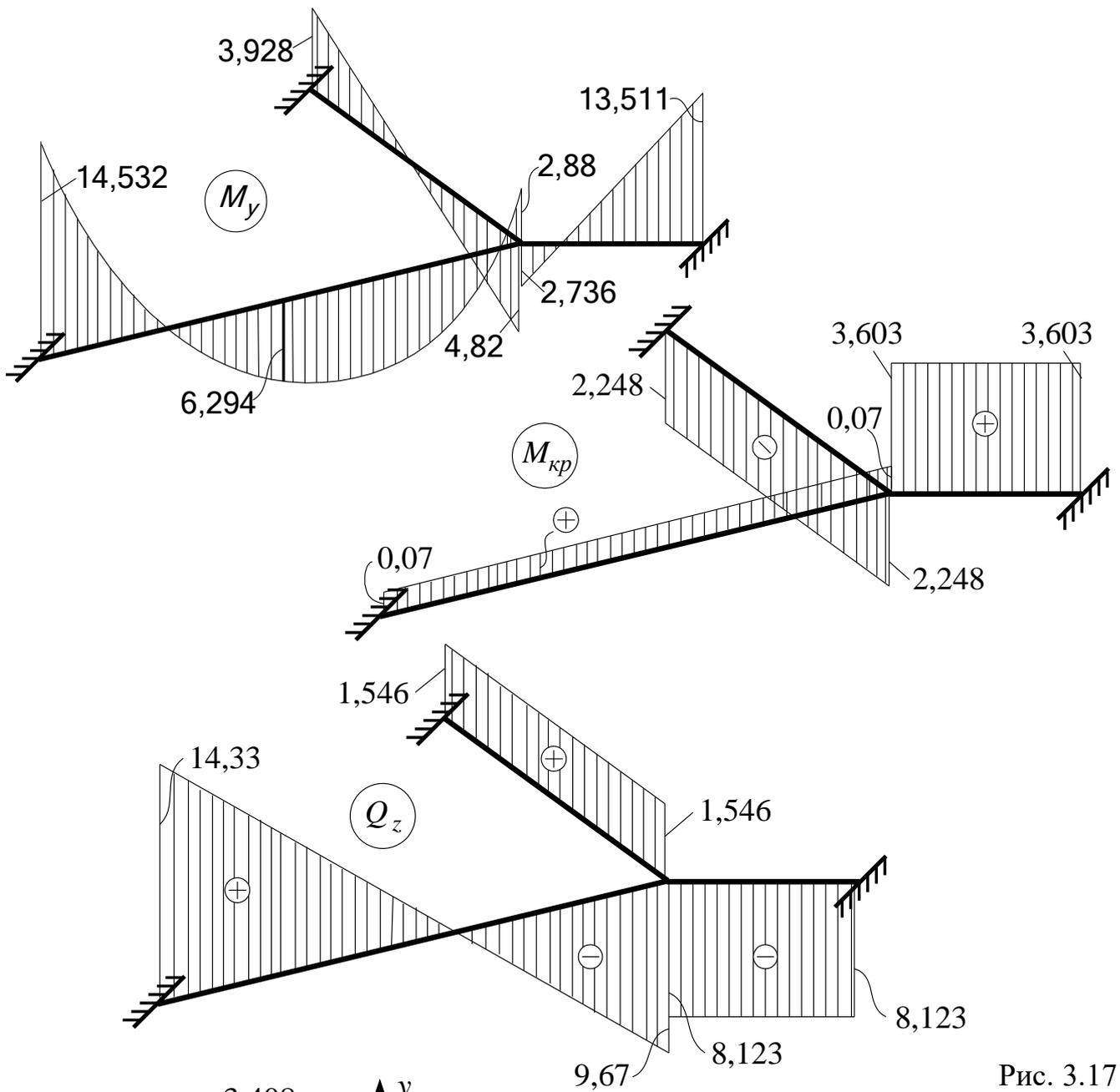


Рис. 3.17

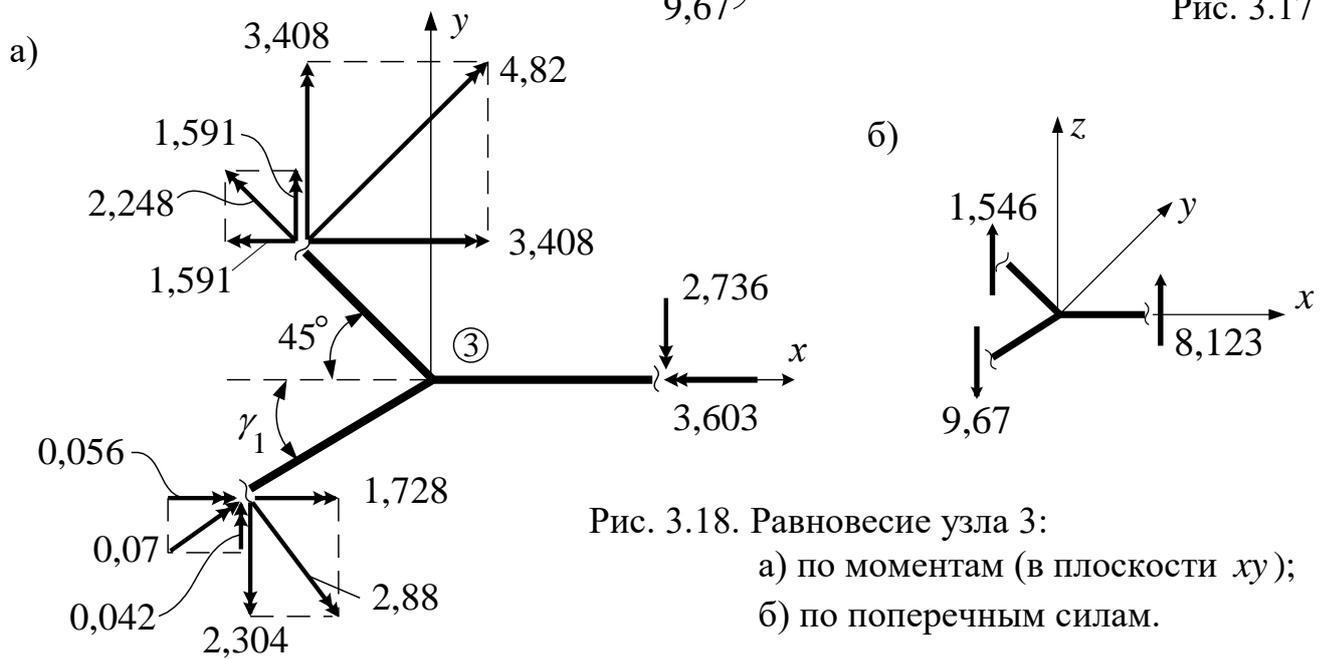


Рис. 3.18. Равновесие узла 3:  
 а) по моментам (в плоскости  $xу$ );  
 б) по поперечным силам.

## 4. РАСЧЕТ МКЭ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФЕРМЕННЫХ СТРУКТУР

### 4.1. Особенности применения МКЭ

Особенности расчета пространственных ферменных систем будут связаны с тем, что конечные элементы здесь, как стержни, которые соединяются в узлах шарнирно, будут работать только на растяжение-сжатие, располагаясь при этом пространственно. Каждый из узлов расчетной дискретной модели будет иметь три независимых перемещения – линейные перемещения по направлениям осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Матрица жесткости КЭ в местной системе координат будет подобна матрице жесткости КЭ плоской фермы (2.24) с учетом того, что узлы по концам КЭ будут иметь по три линейных перемещения (рис. 4.1а) и соответственно по три реактивных усилия (рис. 4.1б), и будет иметь вид

$$[K'_y] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

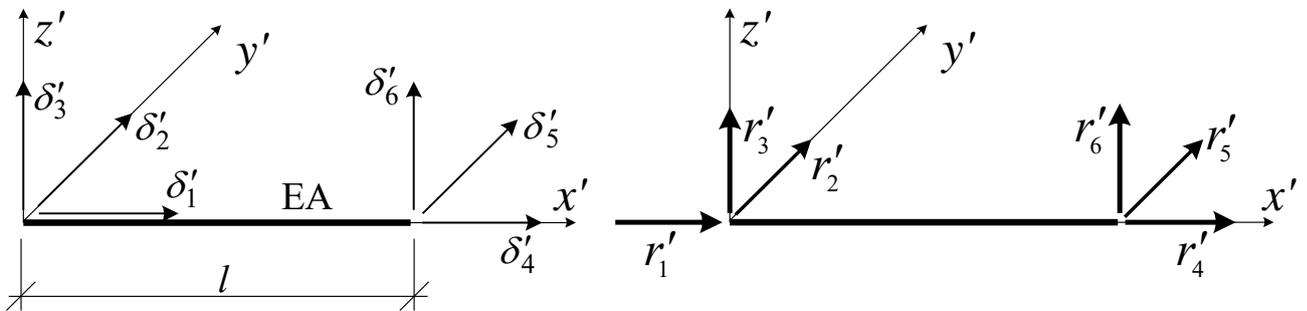


Рис. 4.1

Матрицу жесткости конечного элемента в общей системе координат получим с использованием зависимости (2.43)

$$[K_\alpha] = [T_{\alpha\beta}]^T \cdot [K'_\beta] \cdot [T_{\alpha\beta}], \quad (4.2)$$

для чего вначале необходимо определить матрицу преобразования координат  $[T_{\alpha\beta}]$ . Найдем ее аналогично тому, как это сделано в разделе 2.5, получив зависимость (2.39)

$$\{\delta'\} = [T_\alpha] \cdot \{\delta\}, \quad (4.3)$$

связывающую перемещения концов пространственного ферменного конечного элемента в местной и общей системах координат (рис. 4.2). Получим эту зависимость для одного из концов стержня. Для второго конца КЭ, как показывает анализ подобных зависимостей в плоских рамах (2.40), в СПБ (3.10), они совершенно одинаковы, и матрицу преобразования координат всегда можно представить в виде

$$[T_\alpha] = \begin{bmatrix} [T_\alpha^*] & [0] \\ [0] & [T_\alpha^*] \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Для перемещений начального узла КЭ тогда (рис. 4.2) будем иметь

$$\begin{cases} \delta'_1 = \delta_1 \cos \gamma \cos \beta + \delta_2 \sin \gamma \cos \beta - \delta_3 \sin \beta; \\ \delta'_2 = -\delta_1 \sin \gamma + \delta_2 \cos \gamma + \delta_3 \cdot 0; \\ \delta'_3 = \delta_1 \cos \gamma \sin \beta + \delta_2 \sin \gamma \sin \beta + \delta_3 \cos \beta, \end{cases}$$

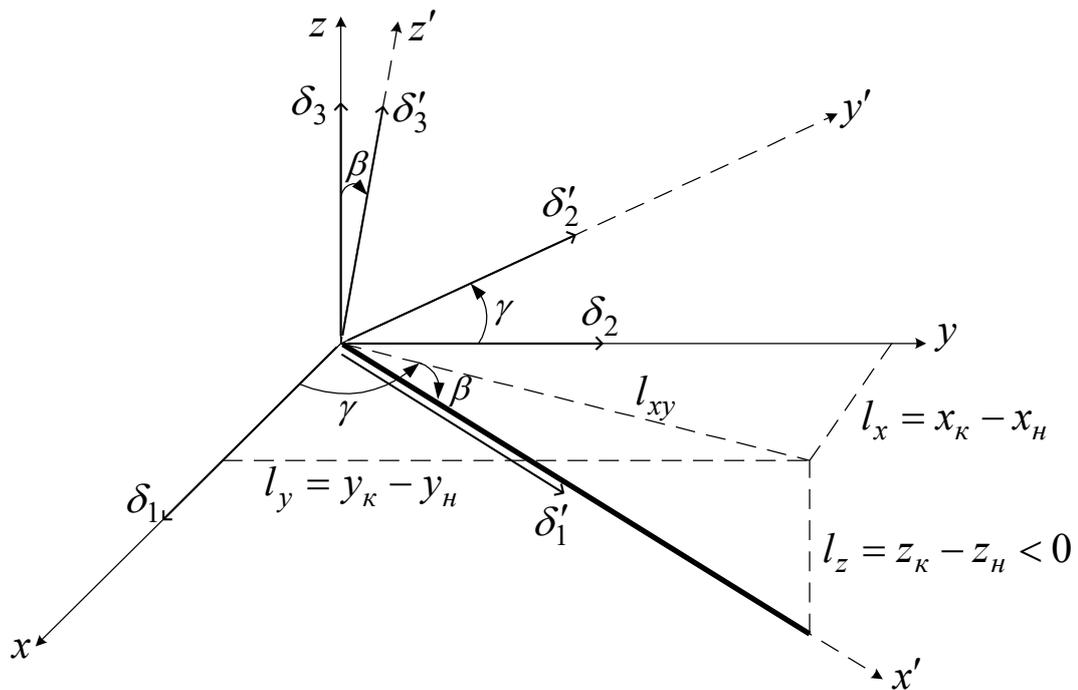


Рис. 4.2

или в матричной форме

$$\begin{cases} \delta'_1 \\ \delta'_2 \\ \delta'_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \beta & \sin \gamma \cos \beta & -\sin \beta \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ \cos \gamma \sin \beta & \sin \gamma \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{cases}.$$

И, таким образом, блок  $[T_\alpha^*]$  матрицы преобразования координат имеет вид

$$[T_\alpha^*] = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \beta & \sin \gamma \cos \beta & -\sin \beta \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ \cos \gamma \sin \beta & \sin \gamma \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

где  $\gamma$  и  $\beta$  – углы, определяющие положение стержня в пространстве по отношению к глобальным осям системы координат (по отношению к положению стержня, при котором совпадают глобальная и локальная системы координат); при этом  $\gamma$  – это, как следует из рис. 4.2, угол поворота стержня относительно оси  $z$ , а  $\beta$  – это (после выполнения поворота относительно оси  $z$ ) угол поворота стержня относительно оси  $y'$  (или угол наклона оси  $z'$  по отношению к оси  $z$ ); положительными эти углы принимаются, когда поворот стержня относительно указанных осей происходит против часовой стрелки, если смотреть с конца соответствующей оси (правило “буравчика”); синусы и косинусы этих углов, входящие в (4.5), вычисляются по соотношениям:

$$\sin \gamma = \frac{l_y}{l_{xy}}; \quad \cos \gamma = \frac{l_x}{l_{xy}}; \quad \sin \beta = -\frac{l_z}{l}; \quad \cos \beta = \frac{l_{xy}}{l}, \quad (4.6)$$

где

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}; \quad l_{xy} = \sqrt{l^2 - l_z^2};$$

$$l_x = x_k - x_n; \quad l_y = y_k - y_n; \quad l_z = z_k - z_n.$$

Здесь  $x_n, y_n, z_n$  и  $x_k, y_k, z_k$  – координаты начального и конечного узлов стержня.

Выполнив теперь процедуры перемножения матриц согласно (4.2) с использованием (4.4) и (4.5), получим матрицу жесткости пространственного ферменного конечного элемента в виде, показанном в (4.7).

Матрицу преобразования координат можно записать и в более общем виде, выразив ее элементы через направляющие косинусы стержня, то есть косинусы углов между осями общей и местной систем координат (рис. 4.3). В этом случае зависимость (4.3) получим в виде

$$\begin{cases} \delta'_1 = \delta_1 \cos(x', x) + \delta_2 \cos(x', y) + \delta_3 \cos(x', z); \\ \delta'_2 = \delta_1 \cos(y', x) + \delta_2 \cos(y', y) + \delta_3 \cos(y', z); \\ \delta'_3 = \delta_1 \cos(z', x) + \delta_2 \cos(z', y) + \delta_3 \cos(z', z), \end{cases}$$

из которого несложно представить, что блок  $[T_\alpha^*]$  матрицы преобразования-

$$[K] = \frac{EA}{l} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2 \gamma \cdot \cos^2 \beta & \frac{1}{2} \sin 2\gamma \cdot \cos^2 \beta & -\frac{1}{2} \cos \gamma \cdot \sin 2\beta & -\cos^2 \gamma \cdot \cos^2 \beta & -\frac{1}{2} \sin 2\gamma \cdot \cos^2 \beta & \frac{1}{2} \cos \gamma \cdot \sin 2\beta \\ \frac{1}{2} \sin 2\gamma \cdot \cos^2 \beta & \sin^2 \gamma \cdot \cos^2 \beta & -\frac{1}{2} \sin \gamma \cdot \sin 2\beta & -\frac{1}{2} \sin 2\gamma \cdot \cos^2 \beta & -\sin^2 \gamma \cdot \cos^2 \beta & \frac{1}{2} \sin \gamma \cdot \sin 2\beta \\ -\frac{1}{2} \cos \gamma \cdot \sin 2\beta & -\frac{1}{2} \sin \gamma \cdot \sin 2\beta & \sin^2 \beta & \frac{1}{2} \cos \gamma \cdot \sin 2\beta & \frac{1}{2} \sin \gamma \cdot \sin 2\beta & -\sin^2 \beta \\ -\cos^2 \gamma \cdot \cos^2 \beta & -\frac{1}{2} \sin 2\gamma \cdot \cos^2 \beta & \frac{1}{2} \cos \gamma \cdot \sin 2\beta & \cos^2 \gamma \cdot \cos^2 \beta & \frac{1}{2} \sin 2\gamma \cdot \cos^2 \beta & -\frac{1}{2} \cos \gamma \cdot \sin 2\beta \\ -\frac{1}{2} \sin 2\gamma \cdot \cos^2 \beta & -\sin^2 \gamma \cdot \cos^2 \beta & \frac{1}{2} \sin \gamma \cdot \sin 2\beta & \frac{1}{2} \sin 2\gamma \cdot \cos^2 \beta & \sin^2 \gamma \cdot \cos^2 \beta & -\frac{1}{2} \sin \gamma \cdot \sin 2\beta \\ \frac{1}{2} \cos \gamma \cdot \sin 2\beta & \frac{1}{2} \sin \gamma \cdot \sin 2\beta & -\sin^2 \beta & -\frac{1}{2} \cos \gamma \cdot \sin 2\beta & -\frac{1}{2} \sin \gamma \cdot \sin 2\beta & \sin^2 \beta \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

$\alpha, \beta, \gamma$  – углы поворота конечного элемента (стержня) относительно осей  $x', y', z'$  местной системы координат, для перехода его из положения, когда общая и местная системы координат совпадают, в заданное положение.

координат в этом случае имеет вид

$$[T_\alpha^*] = \begin{bmatrix} \cos(x',x) & \cos(x',y) & \cos(x',z) \\ \cos(y',x) & \cos(y',y) & \cos(y',z) \\ \cos(z',x) & \cos(z',y) & \cos(z',z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

где  $t_{ik}$ , как видно, представляет собой косинус угла между  $i$ -той осью локальной и  $k$ -той осью глобальной систем координат; при этом для индексов  $i$  и  $k$  здесь приняты следующие обозначения: 1 соответствует осям  $x'$  и  $x$ , 2  $\rightarrow$  осям  $y'$  и  $y$ , 3  $\rightarrow$  осям  $z'$  и  $z$ .

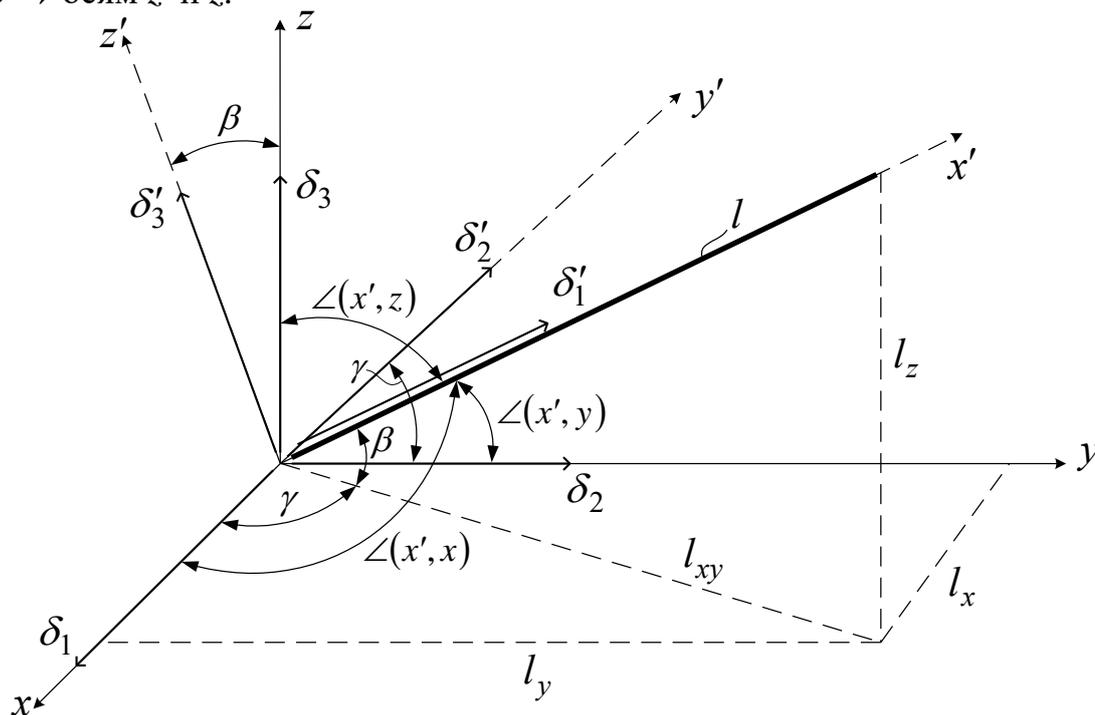


Рис. 4.3

Заметим, что матрицы направляющих косинусов (4.8), (4.5), как и матрицы преобразования координат  $[T_\alpha]$  (4.4) в целом, обладают рядом свойств, которые могут служить как для проверки правильности их нахождения, так и для вычисления отдельных их элементов:

1. Определители этих матриц равны единице, то есть

$$\text{Det}[T_\alpha^*] = \text{Det}[T_\alpha] = 1. \quad (4.9)$$

2. Каждый элемент матрицы направляющих косинусов равен своему алгебраическому дополнению в определителе матрицы

$$t_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot \text{Det}[T'_\alpha], \quad (4.10)$$

где  $\text{Det}[T'_\alpha]$  – определитель матрицы, получаемой после вычеркивания  $i$ -той строки и  $k$ -того столбца в определителе полной матрицы  $[T_\alpha^*]$  (или  $[T_\alpha]$ ).

3. Сумма произведений строк (столбцов) матриц  $[T_\alpha^*]$  и  $[T_\alpha]$  друг на друга равна нулю, а самих на себя – единице.

Определение элементов  $t_{ik}$  матриц направляющих косинусов для стержней пространственных ферм можно выполнять с использованием следующих зависимостей:

$$1) t_{11} = \cos(x', x) = \frac{l_x}{l}; \quad t_{12} = \cos(x', y) = \frac{l_y}{l}; \quad t_{13} = \cos(x', z) = \frac{l_z}{l}; \quad (4.11)$$

2) в связи с тем, что элементы (стержни) ферм работают только на растяжение-сжатие, поворот их относительно собственной оси  $x'$  не играет никакой роли ( $\alpha = 0$ ), поэтому эти элементы всегда можно рассматривать (а здесь они так рассматривались и рассматриваются) таким образом, чтобы ось  $y'$  для них всегда была горизонтальна, то есть лежала в плоскости  $xy$ , а ось  $z'$  всегда была направлена вверх от плоскости  $xy$ , в этом случае всегда будут соблюдаться следующие зависимости:

$$а) \angle(y', z) = 90^\circ \text{ и } t_{23} = \cos(y', z) = 0;$$

$$б) \angle(z', z) = \beta' \text{ и } t_{33} = \cos \beta = \frac{l_{xy}}{l}; \quad (4.12)$$

$$в) \angle(y', x) = 90^\circ + \gamma \text{ и } t_{21} = \cos(y', x) = \cos(90^\circ + \gamma) = -\sin \gamma = -\frac{l_y}{l_{xy}};$$

$$г) \angle(y', y) = \gamma \text{ и } t_{22} = \cos(y', y) = \cos \gamma = \frac{l_x}{l_{xy}};$$

3) элементы  $t_{31}$  и  $t_{32}$  после этого могут быть найдены, например, с помощью 2-го и 3-его свойств матриц направляющих косинусов; а с помощью 1-го их свойства можно проверить правильность определения матрицы в целом.

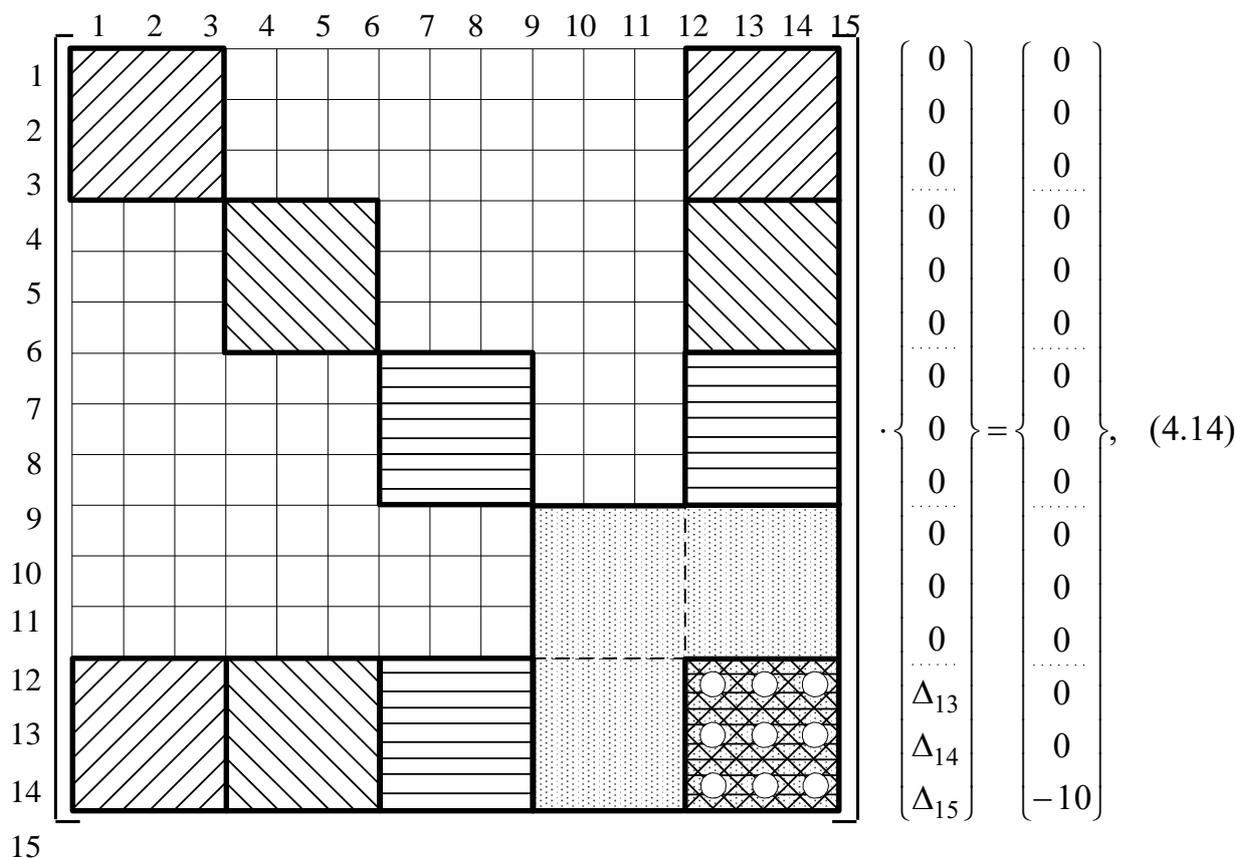
При представлении матрицы преобразования координат с учетом матрицы направляющих косинусов в виде (4.8) матрицу жесткости элемента в глобальной (общей) системе координат получим в виде

$$[K_3] = \frac{EA_3}{l_3} \begin{bmatrix} t_{11}^2 & t_{11}t_{12} & t_{11}t_{13} & -t_{11}^2 & -t_{11}t_{12} & -t_{11}t_{13} \\ t_{11}t_{12} & t_{12}^2 & t_{12}t_{13} & -t_{11}t_{12} & -t_{12}^2 & -t_{12}t_{13} \\ t_{11}t_{13} & t_{12}t_{13} & t_{13}^2 & -t_{11}t_{13} & -t_{12}t_{13} & -t_{13}^2 \\ \hline -t_{11}^2 & -t_{11}t_{12} & -t_{11}t_{13} & t_{11}^2 & t_{11}t_{12} & t_{11}t_{13} \\ -t_{11}t_{12} & -t_{12}^2 & -t_{12}t_{13} & t_{11}t_{12} & t_{12}^2 & t_{12}t_{13} \\ -t_{11}t_{13} & -t_{12}t_{13} & -t_{13}^2 & t_{11}t_{13} & t_{12}t_{13} & t_{13}^2 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

С учетом рассмотренных зависимостей и особенностей процедура расчета пространственных ферм и ферменных структур ничем не отличается от рассмотренных ранее для плоских стержневых систем и для СПБ, то есть общая схема расчета остается такой же, как она изложена в разделе 2.8.

## 4.2. Примеры расчета

**Пример 1.** Рассмотрим расчет МКЭ простой пространственной фермы, представленной на рис 4.4. Расчетная дискретная модель системы, состоящая из четырех КЭ, соединенных между собой и землей в пяти узлах, представлена на рис. 4.5. Там же показаны направления всех возможных перемещений узлов и узловых реакций и усилий в системе – их будет 15. Полная система разрешающих уравнений  $[K] \cdot \{\Delta\} = \{P\}$  с матрицей жесткости дискретной модели в виде ее структурной схемы показана в (4.14). Учитывая, что в узлах 1, 2, 3, 4 стоят шаровые неподвижные опоры, перемещения  $\Delta_1 \div \Delta_{12}$  будут отсутствовать (равны нулю), и остается определить только три перемещения узла 5 –  $\Delta_{13}$ ,  $\Delta_{14}$  и  $\Delta_{15}$ .



где:  $[K_1] \rightarrow$  ;  $[K_2] \rightarrow$  ;  $[K_3] \rightarrow$  ;  $[K_4] \rightarrow$  .

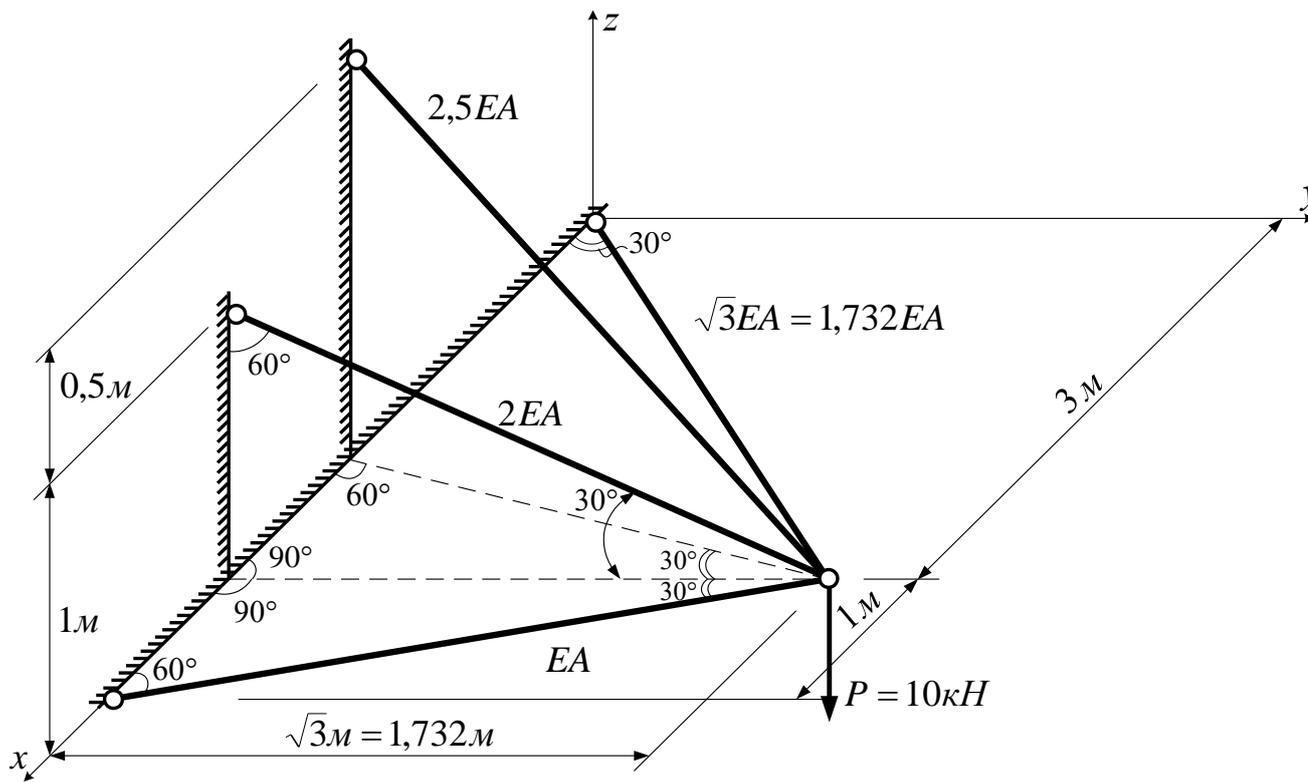


Рис. 4.4

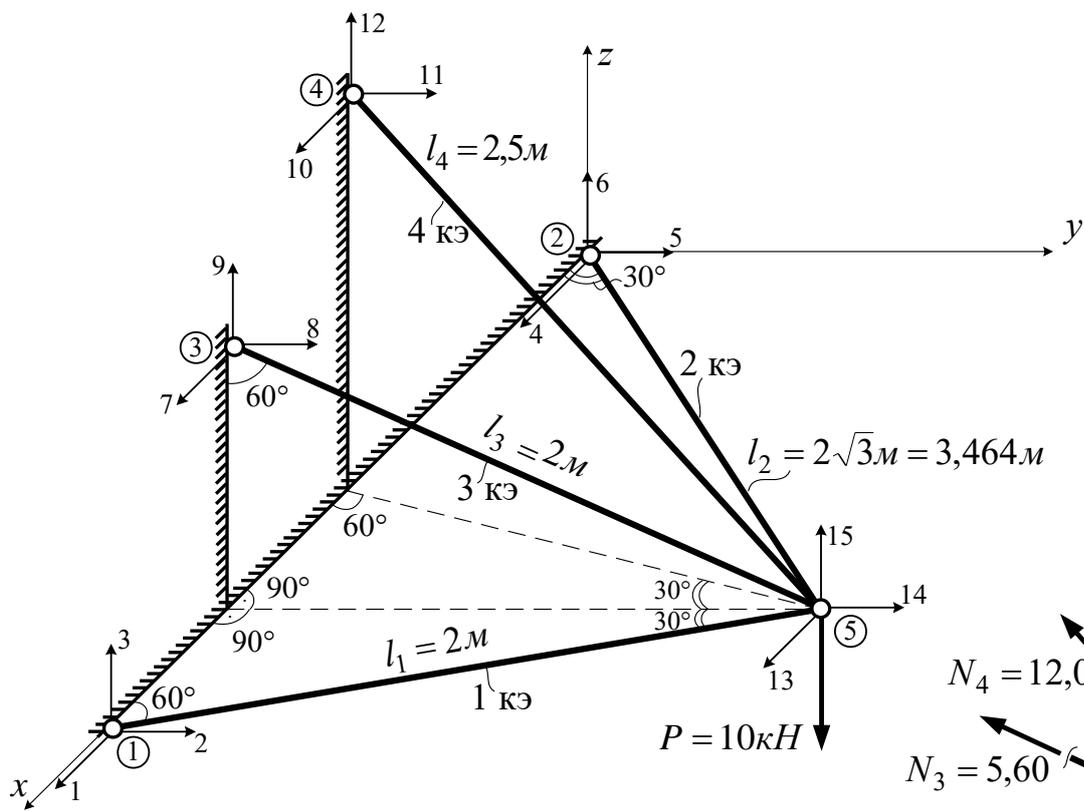


Рис. 4.5

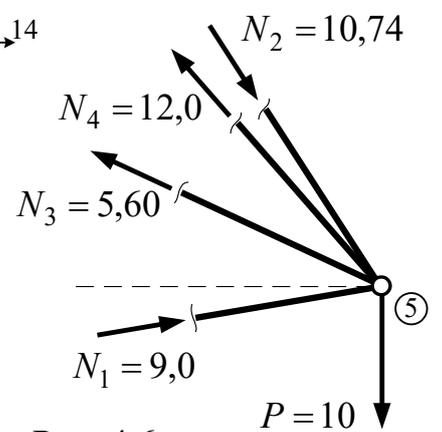


Рис. 4.6

В результате после вычеркивания в (4.14) 1 ÷ 12 строк и 1 ÷ 12 столбцов система уравнений примет вид

$$\begin{cases} k_{13,13}\Delta_{13} + k_{13,14}\Delta_{14} + k_{13,15}\Delta_{15} = P_{13}; \\ k_{14,13}\Delta_{13} + k_{14,14}\Delta_{14} + k_{14,15}\Delta_{15} = P_{14}; \\ k_{15,13}\Delta_{13} + k_{15,14}\Delta_{14} + k_{15,15}\Delta_{15} = P_{15}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Для вычисления коэффициентов  $k_{ij}$  этой системы уравнений необходимо знать углы  $\gamma$  и  $\beta$ , определяющие положение конечных элементов в пространстве:

$$\begin{aligned} \underline{\text{1-ый КЭ (1-5)}}: \gamma_1 = 120^\circ & - \sin \gamma_1 = \sqrt{3}/2; & \cos \gamma_1 = -0,5; & \sin 2\gamma_1 = -\sqrt{3}/2; \\ \beta_1 = 0^\circ & - \sin \beta_1 = 0; & \cos \beta_1 = 1; & \sin 2\beta_1 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{2-ой КЭ (2-5)}}: \gamma_2 = 30^\circ & - \sin \gamma_2 = 0,5; & \cos \gamma_2 = \sqrt{3}/2; & \sin 2\gamma_2 = -\sqrt{3}/2; \\ \beta_2 = 0^\circ & - \sin \beta_2 = 0; & \cos \beta_2 = 1; & \sin 2\beta_2 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{3-ий КЭ (3-5)}}: \gamma_3 = 90^\circ & - \sin \gamma_3 = 1; & \cos \gamma_3 = 0; & \sin 2\gamma_3 = 0; \\ \beta_3 = 30^\circ & - \sin \beta_3 = 0,5; & \cos \beta_3 = \sqrt{3}/2; & \sin 2\beta_3 = \sqrt{3}/2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{4-ый КЭ (4-5)}}: \gamma_4 = 60^\circ & - \sin \gamma_4 = \sqrt{3}/2; & \cos \gamma_4 = 0,5; & \sin 2\gamma_4 = \sqrt{3}/2; \\ \beta_4 = 36,87^\circ & - \sin \beta_4 = 0,6; & \cos \beta_4 = 0,8; & \sin 2\beta_4 = 0,96. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $k_{ij}$  системы уравнений (4.15) тогда будут равны:

$$\begin{aligned} k_{13,13} &= k_{13,13}^1 + k_{13,13}^2 + k_{13,13}^3 + k_{13,13}^4 = \sum_{s=1}^4 \left( \frac{EA_s}{l_s} \cos^2 \gamma_s \cos^2 \beta_s \right) = \\ &= EA \left[ \frac{1}{2} (-0,5)^2 \cdot 1^2 + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot 1^2 + \frac{2}{2} 0^2 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{2,5}{2,5} 0,5^2 \cdot 0,8^2 \right] = 0,66EA; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{13,14} &= k_{14,13} = \sum_{s=1}^4 \left( \frac{EA_s}{2l_s} \sin 2\gamma_s \cos^2 \beta_s \right) = \\ &= EA \left[ \frac{1}{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 1^2 + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} 1^2 + 0 + \frac{2,5}{2,5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} 0,8^2 \right] = 0,2772EA; \end{aligned}$$

$$k_{13,15} = k_{15,13} = \sum_{s=1}^4 \left( -\frac{EA_s}{2l_s} \cos \gamma_s \sin 2\beta_s \right) = -0,24EA;$$

$$k_{14,14} = \sum_{s=1}^4 \left( \frac{EA_s}{l_s} \sin^2 \gamma_s \cos^2 \beta_s \right) = 1,73EA;$$

$$k_{14,15} = k_{15,14} = \sum_{s=1}^4 \left( -\frac{EA_s}{2l_s} \sin \gamma_s \sin 2\beta_s \right) = -0,8487EA;$$

$$k_{15,15} = \sum_{s=1}^4 \left( \frac{EA_s}{l_s} \sin^2 \beta_s \right) = 0,61EA.$$

Система уравнений (4.15) принимает вид

$$\begin{cases} 0,66\Delta_{13} + 0,2772\Delta_{14} - 0,24\Delta_{15} = 0; \\ 0,2772\Delta_{13} + 1,73\Delta_{14} - 0,8487\Delta_{15} = 0; \\ -0,24\Delta_{13} - 0,8487\Delta_{14} + 0,61\Delta_{15} = -10/EA. \end{cases}$$

Решая ее, найдем перемещения узла 5

$$\Delta_{13} = -\frac{9,6}{EA}; \quad \Delta_{14} = -\frac{26,326}{EA}; \quad \Delta_{15} = -\frac{56,8}{EA}.$$

Реакции по концам стержней и соответственно усилия в стержнях определим по формуле

$$\{r_s\} = [K'_s] \cdot [T_{\alpha s}] \cdot \{\Delta_s\}.$$

Получим:

$$\begin{aligned} \{r_1\} &= [K'_1] \cdot [T_{\alpha 1}] \cdot \{\Delta_1\} = \frac{EA}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \\ & \times \begin{bmatrix} -0,5 & 0,866 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,866 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0,866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,866 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -9,6 \\ -26,326 \\ -56,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,0 \\ 0 \\ 0 \\ -9,0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\{r_4\} = [K'_4] \cdot [T_{\alpha 4}] \cdot \{\Delta_4\} = EA \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0,4 & 0,693 & -0,6 & 0 & 0 & 0 \\ -0,866 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,52 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,693 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0 & -0,866 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0,52 & 0,8 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -9,6 \\ -26,326 \\ -56,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12,0 \\ 0 \\ 0 \\ 12,0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Аналогично получим  $N_2 = -10,74 \text{ кН}$  и  $N_3 = 5,60 \text{ кН}$ . Действие усилий в стержнях рассматриваемой фермы по отношению к узлу 5 показано на рис. 4.6. Для оценки правильности выполненных расчетов проверим равновесие узла 5 фермы:

$$\sum X = 0; \quad -9 \cdot 0,5 + 10,74 \cdot 0,866 - 12 \cdot 0,8 \cdot 0,5 = 0; \quad -9,3 + 9,3 = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad 9 \cdot 0,866 + 10,74 \cdot 0,5 - 12 \cdot 0,8 \cdot 0,866 = 0; \quad 13,164 - 13,164 = 0;$$

$$\sum Z = 0; \quad 12 \cdot 0,6 + 5,60 \cdot 0,5 - 10 = 0; \quad 10 - 10 = 0.$$

**Пример 2.** Рассмотрим более сложную ферму, показанную на рис. 4.7. Расчетная модель фермы состоит из шести стержней (конечных элементов), соединенных между собой и с основанием в пяти узлах (рис. 4.8). Общее число возможных перемещений узлов в системе – 15, из них 11 будут нулевыми в связи с наличием опорных связей по направлениям  $2 \div 12$ , а неизвестными остаются четыре перемещения –  $\Delta_1$ ,  $\Delta_{13}$ ,  $\Delta_{14}$  и  $\Delta_{15}$ . Полная система разрешающих уравнений  $[K] \cdot \{\Delta\} = \{P\}$  с матрицей жесткости дискретной модели в виде ее структурной схемы показана в (4.16). Кружками отмечены элементы матрицы жесткости, которые останутся после вычеркивания строк и столбцов, соот-

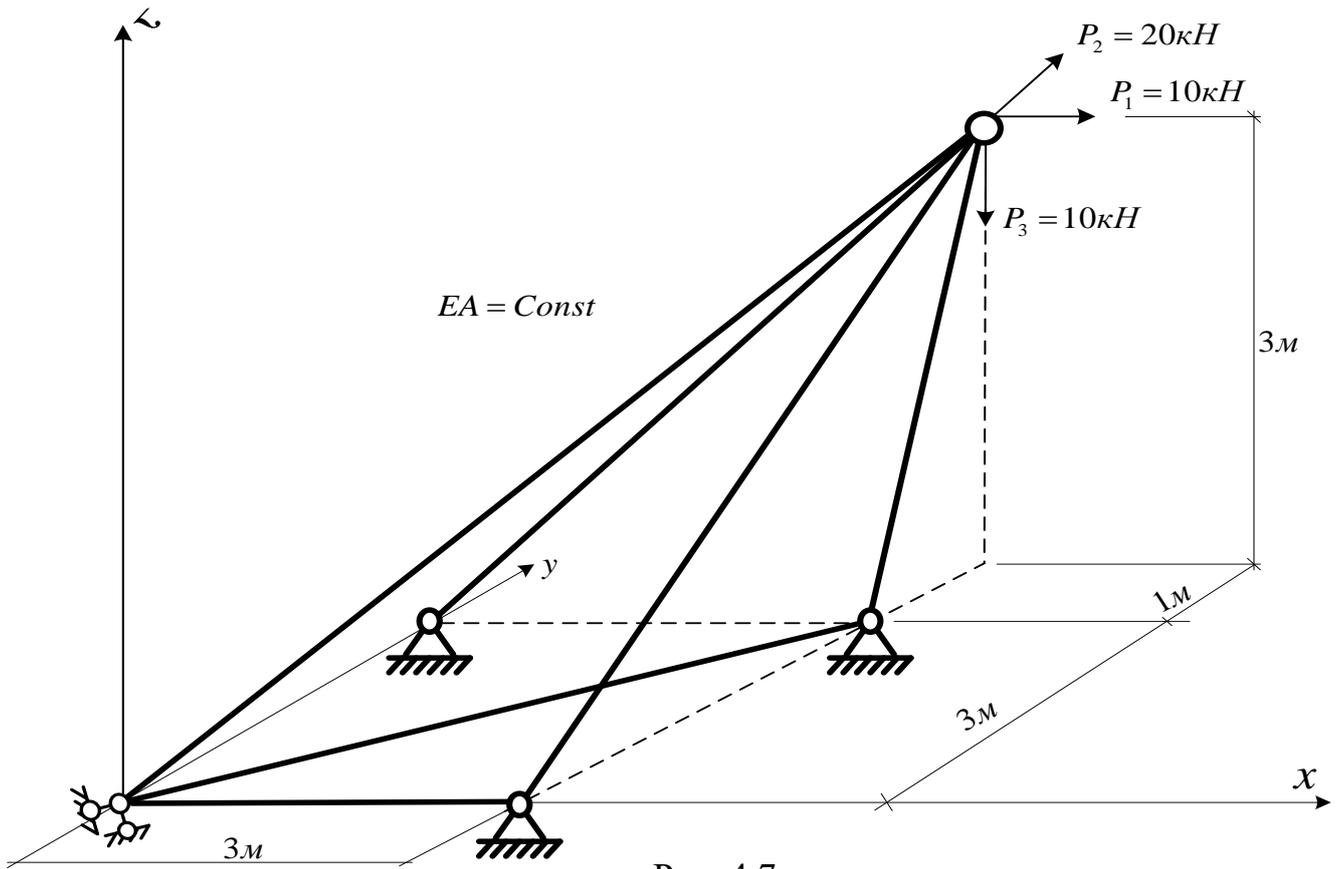


Рис. 4.7

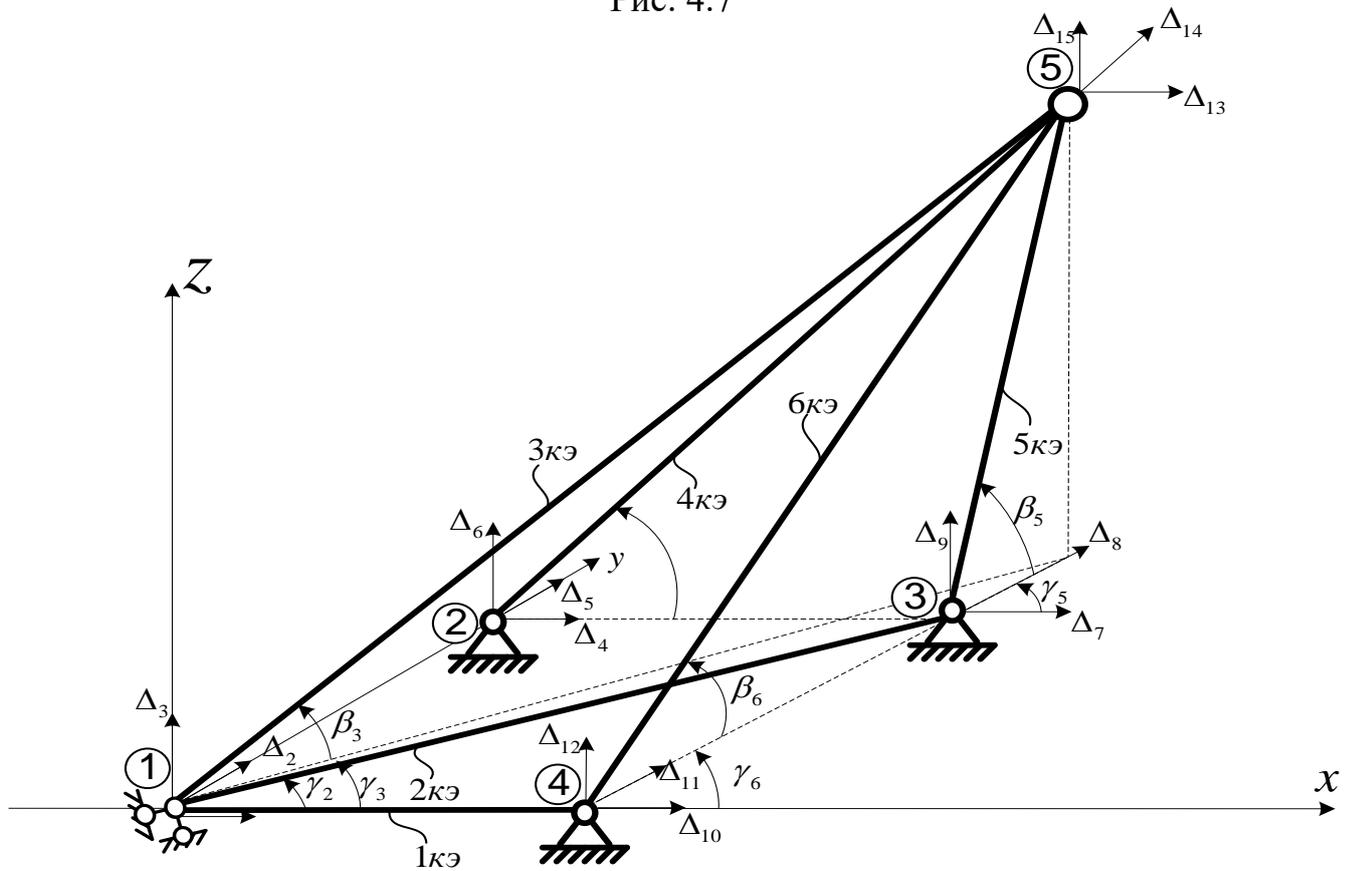
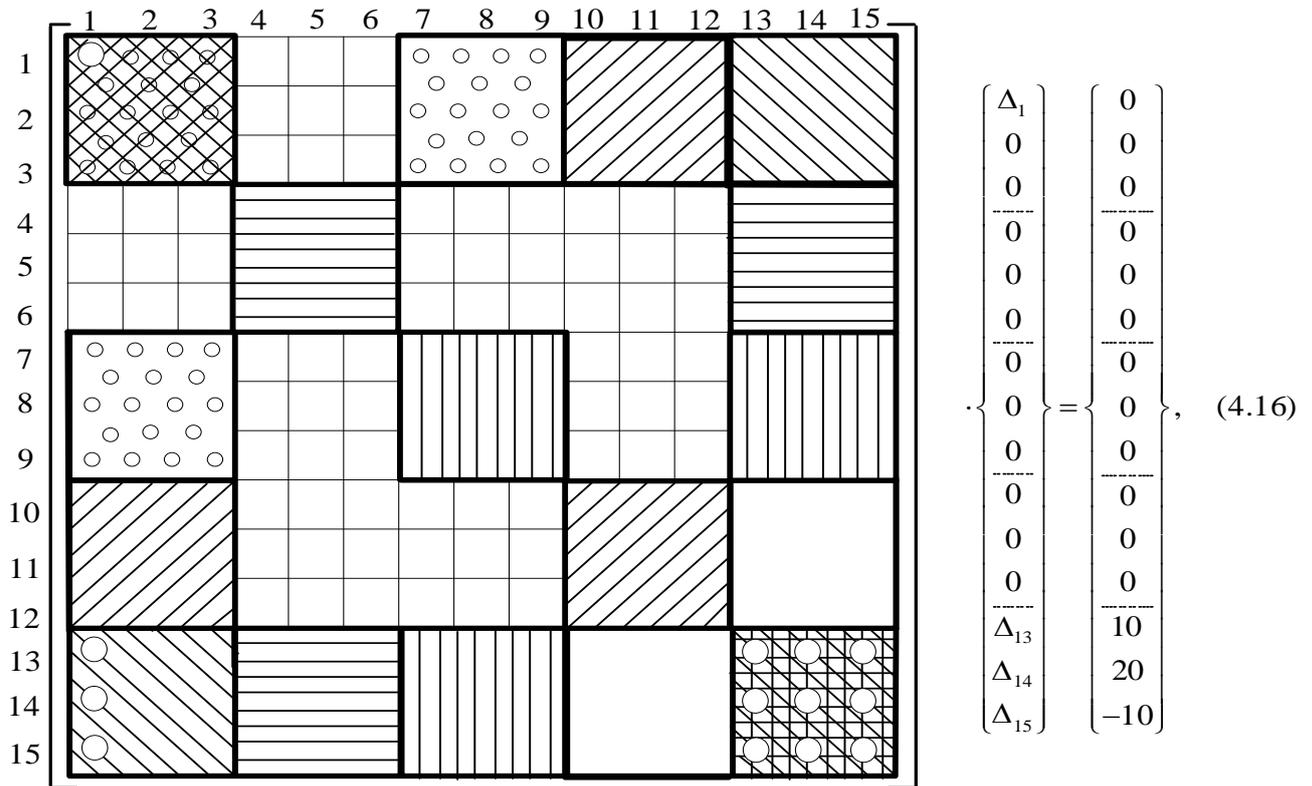


Рис. 4.8



где:  $[K_1] \rightarrow$  ;  $[K_2] \rightarrow$  ;  $[K_3] \rightarrow$  ;  $[K_4] \rightarrow$  ;  $[K_5] \rightarrow$  ;  $[K_6] \rightarrow$

ветствующих нулевым перемещениям узлов. И, таким образом, система разрешающих уравнений принимает вид

$$\begin{cases} k_{1,1}\Delta_1 + k_{1,13}\Delta_{13} + k_{1,14}\Delta_{14} + k_{1,15}\Delta_{15} = 0; \\ k_{13,1}\Delta_1 + k_{13,13}\Delta_{13} + k_{13,14}\Delta_{14} + k_{13,15}\Delta_{15} = 10; \\ k_{14,1}\Delta_1 + k_{14,13}\Delta_{13} + k_{14,14}\Delta_{14} + k_{14,15}\Delta_{15} = 20; \\ k_{15,1}\Delta_1 + k_{15,13}\Delta_{13} + k_{15,14}\Delta_{14} + k_{15,15}\Delta_{15} = -10. \end{cases} \quad (4.17)$$

Коэффициенты  $k_{ij}$  этой системы вычисляются согласно выражению (2.33) путём суммирования величин  $r_{ij}$  матриц жесткости в общей системе координат конечных элементов, примыкающих к узлу, которому принадлежит  $i$ -тое направление возможных перемещений, или величин  $r_{ij}$  матриц жесткости конечных элементов, которые накладываются друг на друга в области элемента  $r_{ij}$  в структурной матрице жесткости системы (4.16). Для вычисления значений  $r_{ij}$  необходимо иметь для конечных элементов матрицы преобразования координат  $[T_{\alpha\beta}]$  (4.4), элементы которых могут быть вычислены через углы  $\gamma$  и  $\beta$  (4.5), определяющие положения конечных элементов в пространстве (рис.4.2). Определим величины этих углов и вычислим длины конечных элементов:

$$\underline{\text{1-ый КЭ (1-4)}}: \gamma_1 = 0^\circ; \quad \beta_1 = 0^\circ \quad l_1 = 3\text{м};$$

$$\underline{\text{2-ой КЭ (1-3)}}: \gamma_2 = 45^\circ \quad \beta_2 = 0^\circ \quad l_2 = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4,243\text{м};$$

$$\underline{\text{3-ий КЭ (1-5)}}: \gamma_3 = 53,13^\circ \quad \beta_3 = -30,964^\circ \quad l_3 = \sqrt{3^2 + 4^2 + 3^2} = 5,83\text{м};$$

$$\underline{\text{4-ый КЭ (2-5)}}: \gamma_4 = 18,435^\circ \quad \beta_4 = -43,492^\circ \quad l_4 = \sqrt{3^2 + 1^2 + 3^2} = 4,359\text{м};$$

$$\underline{\text{5-ый КЭ (3-5)}}: \gamma_5 = 90^\circ \quad \beta_5 = -71,565^\circ \quad l_5 = \sqrt{1^2 + 3^2} = 3,162\text{м};$$

$$\underline{\text{6-ой КЭ (4-5)}}: \gamma_6 = 90^\circ \quad \beta_6 = -36,87^\circ \quad l_6 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\text{м};$$

Приведём вычисления ряда коэффициентов системы уравнений(4.17):

$$k_{1,1} = \sum_{s=1}^3 r_{1,1}^s = \sum_{s=1}^3 \left( \frac{EA_s}{l_s} \cos^2 \gamma_s \cos^2 \beta_s \right) = EA \left( \frac{1}{3} \cos^2 0^\circ \cos^2 0^\circ + \right. \\ \left. + \frac{1}{4,243} \cos^2 45^\circ \cos^2 0^\circ + \frac{1}{5,83} \cos^2 53,15^\circ \cos^2 (-30,964^\circ) \right) = 0,4966EA;$$

$$k_{1,13} = r_{1,13}^3 = -\frac{EA_3}{l_3} \cos^2 \gamma_3 \cos^2 \beta_3 = -\frac{EA}{5,83} \cos^2 53,13^\circ \cos^2 (-30,964^\circ) = -0,0454EA;$$

$$k_{1,14} = r_{1,14}^3 = -\frac{EA_3}{2l_3} \sin 2\gamma_3 \cos^2 \beta_3 = -\frac{EA}{2 \cdot 5,83} \sin 106,26^\circ \cos^2 (-30,964^\circ) = -0,0605EA;$$

$$k_{1,15} = r_{1,15}^3 = \frac{EA_3}{2l_3} \cos \gamma_3 \sin 2\beta_3 = \frac{EA}{2 \cdot 5,83} \cos 53,13^\circ \sin (-61,928^\circ) = -0,0454EA;$$

$$k_{13,3} = \sum_{s=3}^6 r_{13,3}^s = \sum_{s=3}^6 \left( \frac{EA_s}{l_s} \cos^2 \gamma_s \cos^2 \beta_s \right) = 0,1541EA.$$

Остальные коэффициенты вычисляются аналогично.

В результате система уравнений (4.17) принимает вид:

$$\begin{cases} 0,4966\Delta_1 - 0,0454\Delta_{13} - 0,0605\Delta_{14} - 0,0454\Delta_{15} = 0; \\ -0,0454\Delta_1 + 0,1541\Delta_{13} + 0,0968\Delta_{14} + 0,1541\Delta_{15} = 10/EA; \\ -0,0605\Delta_1 + 0,0968\Delta_{13} + 0,2524\Delta_{14} + 0,2876\Delta_{15} = 20/EA; \\ -0,0454\Delta_1 + 0,1541\Delta_{13} + 0,2876\Delta_{14} + 0,5107\Delta_{15} = -10/EA. \end{cases}$$

Решая её, найдём:

$$\Delta_1 = \frac{24,773}{EA}; \quad \Delta_{13} = \frac{102,152}{EA}; \quad \Delta_{14} = \frac{281,819}{EA}; \quad \Delta_{15} = -\frac{206,925}{EA}.$$

Реакции по концам стержней и соответственно усилия в стержнях вычисляем по формуле:

$$\{r_s\} = [K'_s] [T_{\alpha s}] \{\Delta_s\}.$$

Покажем это вычисление для одного из стержней – третьего (жесткости EA сокращены):

$$\{r_3\} = [K'_3][T_{\alpha 3}]\{\Delta_3\} = \begin{bmatrix} 0,1715 & 0 & 0 & -0,1715 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1715 & 0 & 0 & 0,1715 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0,5145 & 0,686 & 0,5145 & 0 & 0 & 0 \\ -0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,3087 & -0,4116 & 0,8575 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5145 & 0,686 & 0,5145 \\ 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,3087 & -0,4116 & 0,8575 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 24,773 \\ 0 \\ 0 \\ 102,152 \\ 281,819 \\ -206,925 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -21,724 \\ 0 \\ 0 \\ 21,724 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Продольные силы в стержнях фермы показаны на рис. 4.9. Теперь несложно проверить и выполнение равновесия узлов 1 и 5.

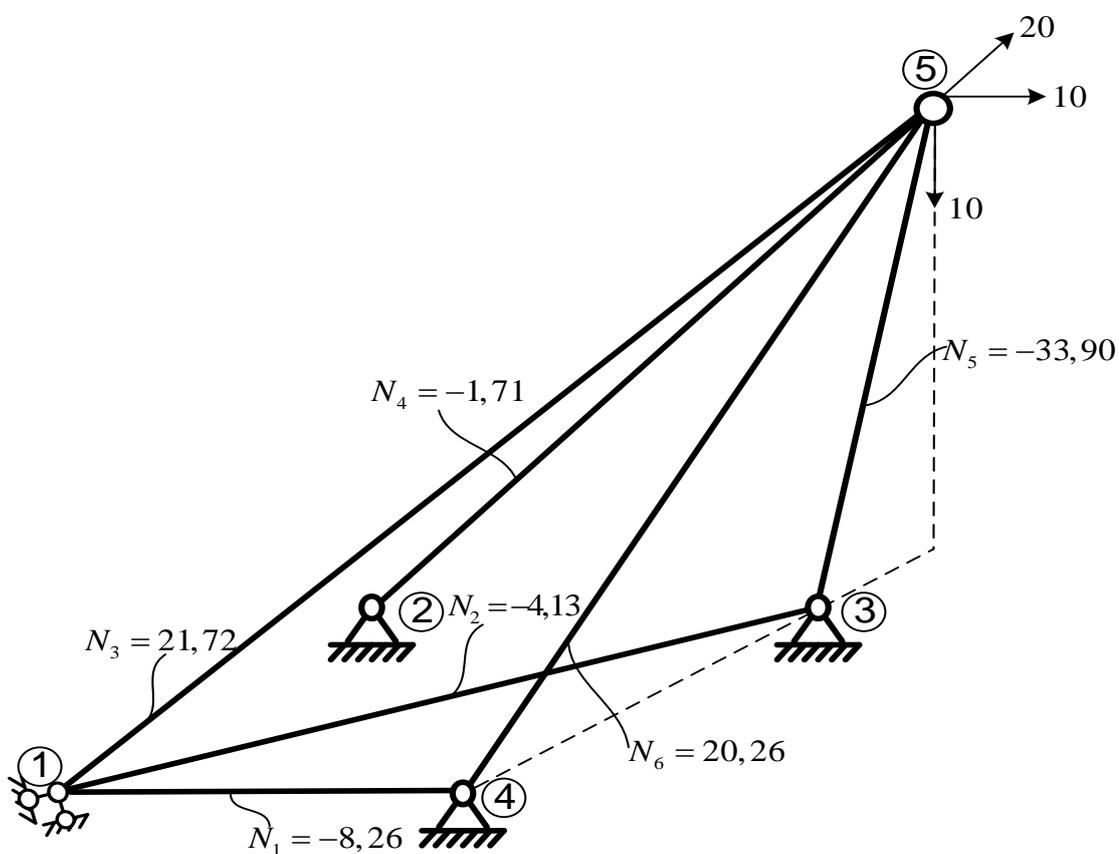


Рис. 4.9

## 5. ОСНОВЫ РАСЧЁТА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

### 5.1. Особенности теории расчёта

Каждый узел пространственной стержневой системы в общем случае имеет шесть степеней свободы – три независимых линейных перемещения по направлениям осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  декартовой системы координат и три независимых перемещения, представляющих повороты узла относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис. 5.1).

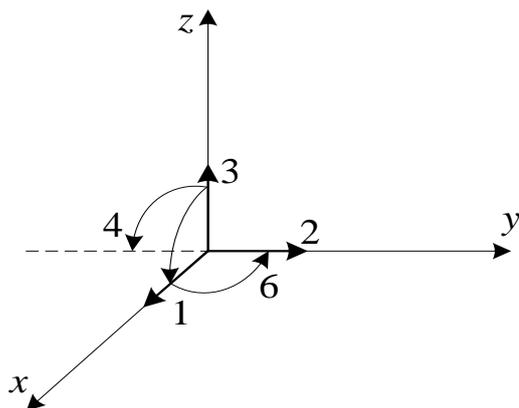


Рис. 5.1

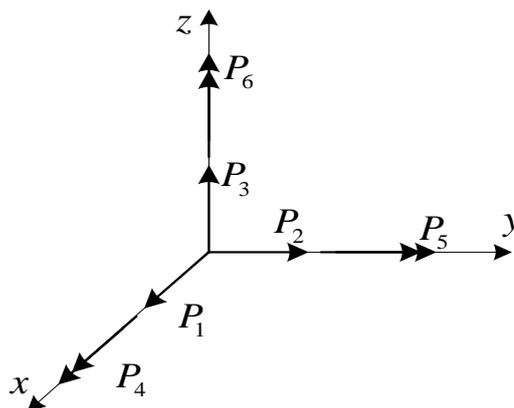


Рис. 5.2

Соответственно указанным направлениям в узле могут быть приложены шесть составляющих внешних нагрузок (рис. 5.2) (двумя стрелками обозначены в векторном виде сосредоточенные моменты в узле) и на узел могут действовать шесть соответствующих реактивных усилий от примыкающих к нему стержней.

Каждый стержень в пространстве, как конечный элемент метода конечных элементов, будет иметь 12 неизвестных перемещений его концов (концевых узлов) – по шесть с каждой стороны (рис. 5.3), и на его концах будет возникать соответственно 12 реактивных усилий (рис. 5.4).

Таким образом, матрица перемещений в узле будет иметь шесть компонент  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_6$ , а матрицы перемещений и усилий для конечного элемента будут иметь по двенадцать компонент. Соответственно матрица жёсткости пространственного стержневого конечного элемента будет иметь размер  $12 \times 12$  и будет учитывать работу КЭ на растяжение-сжатие ( $EA$ ), на изгиб в двух плоскостях – относительно осей  $y'$  ( $EJ_y$ ) и  $z'$  ( $EJ_z$ ) и на кручение ( $GJ_{кр}$ ). Для стержневого КЭ, жёстко присоединённого по концам к узлам, (тип 1) матрица жёсткости в местной системе координат представлена в выражении (5.1).



Рис. 5.3

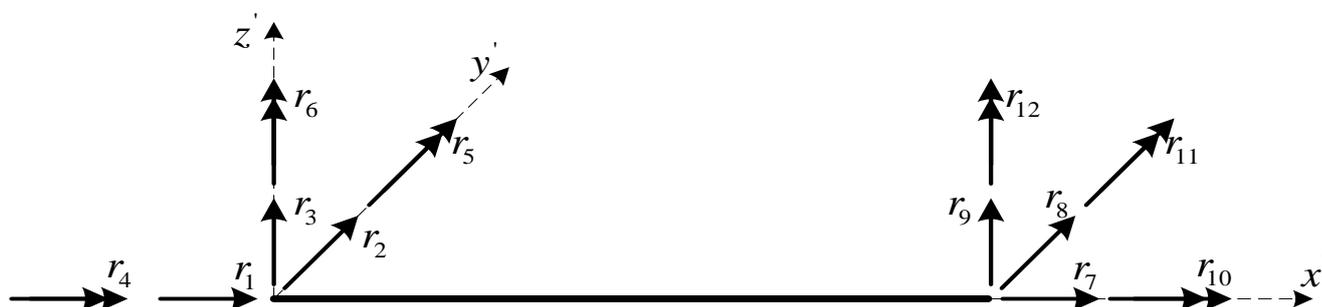


Рис. 5.4

Для стержневых пространственных КЭ типа 2 и 3 матрицы жёсткости их в локальной системе координат показаны в выражениях соответственно (5.2) и (5.3). При этом в указанных матрицах учтена возможность кручения элементов, хотя чаще, наверное, в шарнирном соединении отсутствуют связи, закрепляющие конечный элемент от поворота вокруг продольной оси ( $x'$ ), и такие КЭ на кручение не работают. В этом случае в матрицах (5.2) и (5.3) надо просто обнулить все элементы, содержащие жёсткость при кручении  $GJ_{кр}$ , приняв  $GJ_{кр} = 0$ .

Подобный подход можно использовать и для учёта особенностей условий закрепления для КЭ типа 1. Из матрицы жёсткости (5.1) можно получить, например, матрицу жёсткости КЭ, который в одной плоскости будет жестко закреплен по обоим концам, а в другой плоскости – шарнирно с одной из сторон. Если, например, столбцы и строки с  $EJ_z$  из матрицы (5.1) заменить на соответствующие столбцы и строки с  $EJ_z$  из матриц (5.2) или (5.3), то получим матрицу жёсткости КЭ, который в плоскости  $xz$ , будет жестко присоединяться к узлам с обеих сторон, а в плоскости  $xy$  с одной стороны будет присоединяться к узлам жестко, а с другой стороны – шарнирно.



$$[K'] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_{kp}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_{kp}}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{l} & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{l} \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & \frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_{kp}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_{kp}}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_x}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{l} & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{l} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$



$$[K'] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EJ_z}{l^2} & 0 & -\frac{3EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3EJ_y}{l^3} & 0 & -\frac{3EJ_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EJ_y}{l^3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_{kp}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_{kp}}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{3EJ_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EJ_z}{l} & 0 & -\frac{3EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{l} \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EJ_z}{l^2} & 0 & \frac{3EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3EJ_y}{l^3} & 0 & \frac{3EJ_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EJ_y}{l^3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_{kp}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_{kp}}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$



$$[K'] = \begin{bmatrix}
 \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{3EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EJ_z}{l^3} \\
 0 & 0 & \frac{3EJ_y}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EJ_y}{l^3} & 0 & -\frac{3EJ_y}{l^2} & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_{kp}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_{kp}}{l} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{3EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EJ_z}{l^2} \\
 0 & 0 & -\frac{3EJ_y}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3EJ_y}{l^3} & 0 & \frac{3EJ_y}{l^2} & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_{kp}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_{kp}}{l} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{3EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EJ_z}{l^2} & 0 & \frac{3EJ_y}{l} & 0 \\
 0 & \frac{3EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EJ_z}{l}
 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Преобразование матриц жесткости из местных (локальных) систем координат в общую (глобальную) выполняется по тем же принципам, что и ранее, то есть по формуле

$$[K_{\alpha}] = [T_{\alpha}]^T \cdot [K'_{\alpha}] \cdot [T_{\alpha}], \quad (5.4)$$

в которой матрица преобразования координат  $[T_{\alpha}]$  может быть выражена:

- 1) через направляющие косинусы осей местных систем координат;
- 2) через узлы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , то есть углы поворота КЭ относительно собственных осей  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , на которые КЭ нужно повернуть для перехода его из положения, когда общая и местная системы координат совпадают, в заданное положение (см., например, (4.5) для пространственных ферм).

Получим зависимость между реакциями в общей и в местной системах координат для одного из концов пространственного КЭ (рис. 5.5) с помощью направляющих косинусов  $t_{ik}$ :

$$\begin{cases} r_1 = r'_1 \cos(x', x) + r'_2 \cos(y', x) + r'_3 \cos(z', x) + r'_4 \cdot 0 & + r'_5 \cdot 0 & + r'_6 \cdot 0; \\ r_2 = r'_1 \cos(x', y) + r'_2 \cos(y', y) + r'_3 \cos(z', y) + r'_4 \cdot 0 & + r'_5 \cdot 0 & + r'_6 \cdot 0; \\ r_3 = r'_1 \cos(x', z) + r'_2 \cos(y', z) + r'_3 \cos(z', z) + r'_4 \cdot 0 & + r'_5 \cdot 0 & + r'_6 \cdot 0; \\ r_4 = r'_1 \cdot 0 & + r'_2 \cdot 0 & + r'_3 \cdot 0 & + r'_4 \cos(x', x) + r'_5 \cos(y', x) + r'_6 \cos(z', x); \\ r_5 = r'_1 \cdot 0 & + r'_2 \cdot 0 & + r'_3 \cdot 0 & + r'_4 \cos(x', y) + r'_5 \cos(y', y) + r'_6 \cos(z', y); \\ r_6 = r'_1 \cdot 0 & + r'_2 \cdot 0 & + r'_3 \cdot 0 & + r'_4 \cos(x', z) + r'_5 \cos(y', z) + r'_6 \cos(z', z), \end{cases}$$

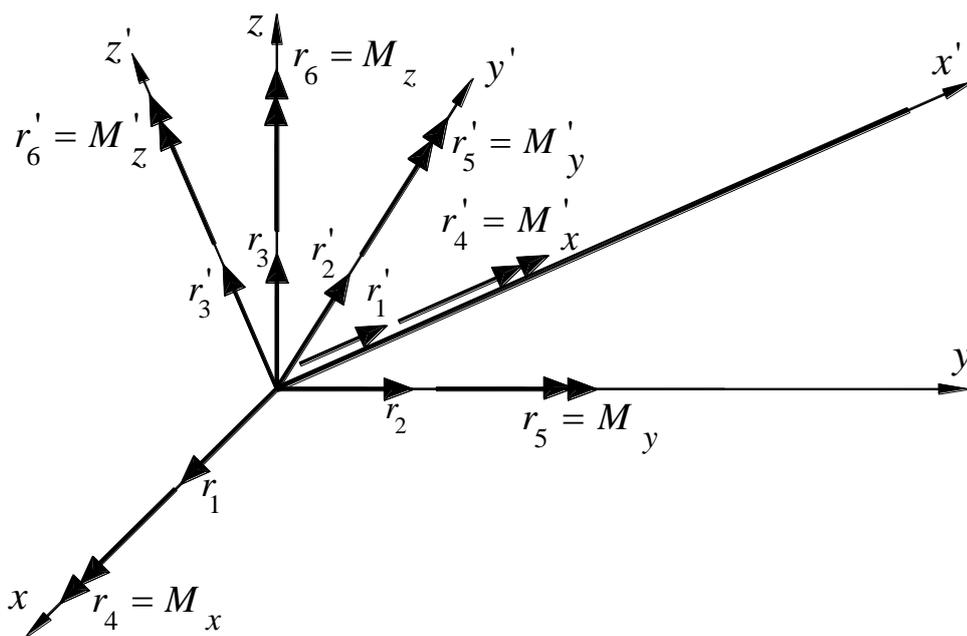


Рис. 5.5

которая в матричной форме запишется в виде (2.41)  $\{r\} = [T_\alpha]^T \cdot \{r'\}$ . Распространив эту зависимость на весь конечный элемент (на оба его конца) и учтя форму записи транспонированной матрицы в сравнении с обычной, получим матрицу преобразования координат для пространственных стержневых КЭ в виде

$$[T_\alpha] = \begin{bmatrix} [T_\alpha^*] & [0] & [0] & [0] \\ 0 & [T_\alpha^*] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [T_\alpha^*] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [T_\alpha^*] \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

где  $[T_\alpha^*]$  – матрица направляющих косинусов, имеющая вид (4.8)

$$[T_\alpha^*] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) & \cos(x', z) \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) & \cos(y', z) \\ \cos(z', x) & \cos(z', y) & \cos(z', z) \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Свойства этой матрицы описаны в разделе 4.

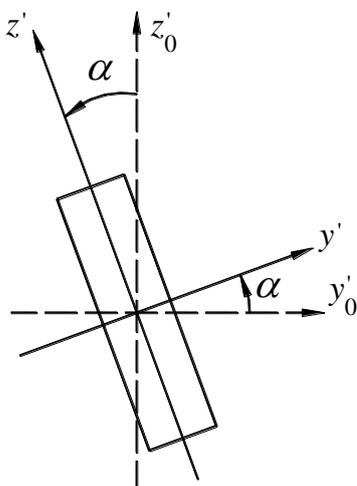


Рис. 5.6

Определение величин  $t_{ik}$  матрицы направляющих косинусов (5.6) здесь можно выполнить по аналогии с тем, как это делалось для пространственных ферм, но с учётом того, что для произвольных пространственных стержневых систем (в отличие от ферм) имеет значение и поворот стержня относительно собственной оси (оси  $x'$ ). И при этом величина этого поворота  $\alpha$  не определяется координатами начального и конечного узлов стержня, а должна быть задана отдельно (дополнительно). Положительным углом  $\alpha$  будем считать тогда, когда вращение элемента относительно оси  $x'$  будет происходить против ча-

совой стрелки, если смотреть из конца оси  $x'$  (рис 5.6). При этом следует иметь в виду, что при наличии угла поворота элемента относительно собственной оси (угла  $\alpha$ ) этот элемент будет работать на кривой изгиб.

С учётом отмеченного значения направляющих косинусов  $t_{ik}$  могут быть определены, например, следующим образом:

1) величины  $t_{11}$ ,  $t_{12}$  и  $t_{13}$ , которые не имеют никакой связи с поворотом элемента относительно собственной оси  $x'$ , могут быть вычислены по тем же выражениям, что и для пространственных ферм (4.11):

$$t_{11} = \cos(x', x) = \frac{l_x}{l}; \quad t_{12} = \cos(x', y) = \frac{l_y}{l}; \quad t_{13} = \cos(x', z) = \frac{l_z}{l}, \quad (5.7)$$

где  $l_x$ ,  $l_y$ ,  $l_z$  определяются согласно (4.6) и рис. 4.2;

2) анализ матриц направляющих косинусов (5.6) показывает, что в них всегда будет соблюдаться соотношение

$$\frac{t_{23}}{t_{33}} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (5.8)$$

которое после задания (определения) угла  $\alpha$  позволяет уменьшить число неизвестных  $t_{ik}$  при их определении.

Отметим ещё раз, что  $\alpha$  – это угол поворота КЭ относительно собственной оси (оси  $x'$ ), или угол между плоскостью  $x'z'$  и вертикальной плоскостью  $x'z$  при перенесении оси  $z$  общей системы координат в начало местной системы координат. Рекомендуется оси местной системы координат выбирать таким образом, чтобы ось  $z'$  была направлена в сторону возрастания ординат  $z$  общей системы координат, угол  $\alpha$  при этом всегда можно задать (рассматривать) находящимся в пределах:  $-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ . В этом случае направляющий косинус  $t_{33} = \cos(z', z)$  будет всегда больше нуля ( $t_{33} > 0$ ). В противоположном случае просто поменяются знаки на обратные всех элементов  $t_{ik}$  второй и третьей строк матрицы направляющих косинусов, что будет соответствовать положению конечного элемента, повернутому по отношению к выше рассмотренному на  $180^\circ$  относительно своей оси (оси  $x'$ );

3) используя свойства матриц направляющих косинусов, запишем произведение 3-го столбца матрицы  $[T_\alpha^*]$  (5.6) самого на себя

$$t_{13}^2 + t_{23}^2 + t_{33}^2 = 1,$$

после чего, исключив из этого выражения  $t_{23}$  с помощью соотношения (5.8), найдём

$$t_{33} = \sqrt{\frac{1 - t_{13}^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \quad (5.9)$$

знак величины  $t_{33}$  определяется на основе соображений, отмеченных в предыдущем пункте;

4) на основе соотношения (5.8) получим

$$t_{23} = t_{33} \operatorname{tg} \alpha; \quad (5.10)$$

5) используя свойства матриц направляющих косинусов, запишем следующие два уравнения:

$$\begin{cases} t_{11}t_{21} + t_{12}t_{22} + t_{13}t_{23} = 0; & (\text{произведение первой строки на вторую}) \\ t_{33} = (-1)^{3+3}(t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}), & (\text{второе свойство}) \end{cases}$$

решая которые относительно неизвестных величин  $t_{21}$  и  $t_{22}$ , получим

$$t_{21} = -\frac{t_{11}t_{13}t_{23} + t_{12}t_{33}}{t_{11}^2 + t_{12}^2}; \quad (5.11)$$

$$t_{22} = \frac{t_{11}t_{33} - t_{12}t_{13}t_{23}}{t_{11}^2 + t_{12}^2}; \quad (5.12)$$

б) на основе второго свойства матриц  $[T_{\alpha}^*]$  (4.10) получим

$$\begin{aligned} t_{31} &= t_{12}t_{23} - t_{22}t_{13}; \\ t_{32} &= t_{21}t_{13} - t_{11}t_{23}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

После вычисления всех элементов матрицы направляющих косинусов для исключения ошибок необходимо сделать ее проверку, для чего можно вычислить определитель всей матрицы, который согласно первому свойству (4.9) должен равняться единице. Это особенно важно в случаях, когда в системе имеются стержни, параллельные осям общей системы координат, в связи с чем целый ряд коэффициентов  $t_{ik}$  будет обращаться в нуль и вычисления  $t_{ik}$  по представленным выражениям могут приводить к неопределённости (деление на нуль) (см., например, вычисление  $t_{21}$  для третьего КЭ в примере расчёта). В таких случаях проверку значений  $t_{ik}$  и их определение можно выполнить на основе визуального (или логического) анализа положения КЭ (положение местной системы координат по отношению к общей) в расчётной дискретной системе (этот анализ несложно реализовать и в логических процедурах любой из систем программирования при составлении программ для ЭВМ). Заметим, что для стержней, параллельных осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , значения  $t_{ik}$  будут равняться либо нулю, либо  $\pm 1$ .

Матрицу направляющих косинусов  $[T_\alpha^*]$  можно выразить и через углы поворота стержня  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  (рис. 5.7) по аналогии с тем, как это сделано для пространственных ферм, и в этом случае она будет иметь вид:

$$[T_\alpha^*] = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Следует отметить, что при таком представлении  $[T_\alpha^*]$  (5.14) при вычислении  $t_{ik}$  не возникает никаких неопределённостей, о которых говорилось выше.

Матрицы жесткости КЭ в общей (глобальной) системе координат получают, как обычно, по формуле (5.4). При этом здесь эти матрицы получаются довольно громоздкими. Например, для КЭ типа 1, жестко присоединённого с двух сторон к узлам, если представить её в виде (2.47), матрица жёсткости будет иметь размер  $12 \times 12$ , и для записи её элементов здесь разобьём эту матрицу на ряд блоков на схеме

$$[K] = \begin{bmatrix} [A_{ii}^1] & [A_{ii}^2] & [A_{ik}^1] & [A_{ik}^2] \\ [A_{ki}^1] & [A_{ki}^2] & [A_{kk}^1] & [A_{kk}^2] \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

где блоки  $[A]$  имеют размер  $3 \times 6$  (три элемента по горизонтали и шесть по вертикали) и будут иметь вид, представленный в (5.16) ÷ (5.23) на стр. 132 – 139.

С учётом указанных зависимостей и особенностей процедура расчёта произвольных пространственных стержневых систем в целом остается такой же, как для рассмотренных ранее систем – для плоских стержневых систем (раздел 2.8), для систем перекрёстных балок и для пространственных ферм.

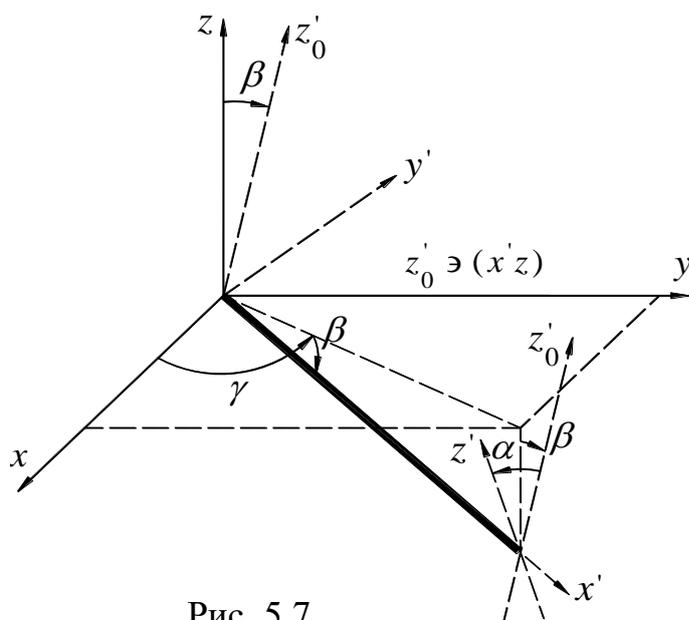


Рис. 5.7

$$[A_{ii}^1]=$$

$$(5.16)$$

	1	2	3
1	$\frac{12EJ_z}{l^3}t_{21}^2 + \frac{12EJ_y}{l^3}t_{31}^2 + \frac{EA}{l}t_{11}^2$	$\frac{12EJ_z}{l^3}t_{21}t_{22} + \frac{12EJ_y}{l^3}t_{32}t_{31} + \frac{EA}{l}t_{11}t_{12}$	$\frac{12EJ_z}{l^3}t_{21}t_{23} + \frac{12EJ_y}{l^3}t_{31}t_{33} + \frac{EA}{l}t_{11}t_{13}$
2	$\frac{12EJ_z}{l^3}t_{21}t_{22} + \frac{12EJ_y}{l^3}t_{32}t_{31} + \frac{EA}{l}t_{11}t_{12}$	$\frac{12EJ_z}{l^3}t_{22}^2 + \frac{12EJ_y}{l^3}t_{32}^2 + \frac{EA}{l}t_{12}^2$	$\frac{12EJ_z}{l^3}t_{22}t_{23} + \frac{12EJ_y}{l^3}t_{32}t_{33} + \frac{EA}{l}t_{12}t_{13}$
3	$\frac{12EJ_z}{l^3}t_{21}t_{23} + \frac{12EJ_y}{l^3}t_{31}t_{33} + \frac{EA}{l}t_{11}t_{13}$	$\frac{12EJ_z}{l^3}t_{22}t_{23} + \frac{12EJ_y}{l^3}t_{32}t_{33} + \frac{EA}{l}t_{12}t_{13}$	$\frac{12EJ_z}{l^3}t_{23}^2 + \frac{12EJ_y}{l^3}t_{33}^2 + \frac{EA}{l}t_{13}^2$
4	$\frac{6EJ_z}{l^2}t_{21}t_{31} - \frac{6EJ_y}{l^2}t_{21}t_{31}$	$\frac{6EJ_z}{l^2}t_{22}t_{31} - \frac{6EJ_y}{l^2}t_{32}t_{21}$	$\frac{6EJ_z}{l^2}t_{31}t_{23} - \frac{6EJ_y}{l^2}t_{33}t_{21}$
5	$\frac{6EJ_z}{l^2}t_{21}t_{32} - \frac{6EJ_y}{l^2}t_{31}t_{22}$	$\frac{6EJ_z}{l^2}t_{32}t_{22} - \frac{6EJ_y}{l^2}t_{32}t_{22}$	$\frac{6EJ_z}{l^2}t_{32}t_{23} - \frac{6EJ_y}{l^2}t_{33}t_{22}$
6	$\frac{6EJ_z}{l^2}t_{33}t_{21} - \frac{6EJ_y}{l^2}t_{31}t_{23}$	$\frac{6EJ_z}{l^2}t_{33}t_{22} - \frac{6EJ_y}{l^2}t_{32}t_{23}$	$\frac{6EJ_z}{l^2}t_{23}t_{33} - \frac{6EJ_y}{l^2}t_{23}t_{33}$

$$[A_{ii}^2] = \quad (5.17)$$

	1	2	3
1	$\frac{6EJ_z}{l^2} t_{21} t_{31} - \frac{6EJ_y}{l^2} t_{21} t_{31}$	$\frac{6EJ_z}{l^2} t_{21} t_{32} - \frac{6EJ_y}{l^2} t_{31} t_{22}$	$\frac{6EJ_z}{l^2} t_{33} t_{21} - \frac{6EJ_y}{l^2} t_{31} t_{23}$
2	$\frac{6EJ_z}{l^2} t_{22} t_{31} - \frac{6EJ_y}{l^2} t_{32} t_{21}$	$\frac{6EJ_z}{l^2} t_{32} t_{22} - \frac{6EJ_y}{l^2} t_{32} t_{22}$	$\frac{6EJ_z}{l^2} t_{33} t_{22} - \frac{6EJ_y}{l^2} t_{32} t_{23}$
3	$\frac{6EJ_z}{l^2} t_{31} t_{23} - \frac{6EJ_y}{l^2} t_{33} t_{21}$	$\frac{6EJ_z}{l^2} t_{23} t_{32} - \frac{6EJ_y}{l^2} t_{33} t_{22}$	$\frac{6EJ_z}{l^2} t_{23} t_{33} - \frac{6EJ_y}{l^2} t_{23} t_{33}$
4	$\frac{4EJ_z}{l} t_{31}^2 + \frac{4EJ_y}{l} t_{21}^2 + \frac{GJ_{kp}}{l} t_{11}^2$	$\frac{4EJ_z}{l} t_{32} t_{31} + \frac{4EJ_y}{l} t_{21} t_{22} + \frac{GJ_{kp}}{l} t_{11} t_{12}$	$\frac{4EJ_z}{l} t_{33} t_{31} + \frac{4EJ_y}{l} t_{21} t_{23} + \frac{GJ_{kp}}{l} t_{11} t_{13}$
5	$\frac{4EJ_z}{l} t_{32} t_{31} + \frac{4EJ_y}{l} t_{21} t_{22} + \frac{GJ_{kp}}{l} t_{11} t_{12}$	$\frac{4EJ_z}{l} t_{32}^2 + \frac{4EJ_y}{l} t_{22}^2 + \frac{GJ_{kp}}{l} t_{12}^2$	$\frac{4EJ_z}{l} t_{32} t_{33} + \frac{4EJ_y}{l} t_{22} t_{23} + \frac{GJ_{kp}}{l} t_{13} t_{12}$
6	$\frac{4EJ_z}{l} t_{33} t_{31} + \frac{4EJ_y}{l} t_{21} t_{23} + \frac{GJ_{kp}}{l} t_{11} t_{13}$	$\frac{4EJ_z}{l} t_{32} t_{33} + \frac{4EJ_y}{l} t_{22} t_{23} + \frac{GJ_{kp}}{l} t_{13} t_{12}$	$\frac{4EJ_z}{l} t_{33}^2 + \frac{4EJ_y}{l} t_{23}^2 + \frac{GJ_{kp}}{l} t_{13}^2$

$$[A_{ki}^1] = \quad (5.18)$$

	1	2	3
7	$-\frac{12EJ_z}{l^3}t_{12}^2 - \frac{12EJ_y}{l^3}t_{13}^2 - \frac{EA}{l}t_{11}^2$	$-\frac{12EJ_z}{l^3}t_{12}t_{22} - \frac{12EJ_y}{l^3}t_{13}t_{23} - \frac{EA}{l}t_{11}t_{21}$	$-\frac{12EJ_z}{l^3}t_{12}t_{32} - \frac{12EJ_y}{l^3}t_{13}t_{33} - \frac{EA}{l}t_{11}t_{31}$
8	$-\frac{12EJ_z}{l^3}t_{12}t_{22} - \frac{12EJ_y}{l^3}t_{13}t_{23} - \frac{EA}{l}t_{11}t_{21}$	$-\frac{12EJ_z}{l^3}t_{22}^2 - \frac{12EJ_y}{l^3}t_{23}^2 - \frac{EA}{l}t_{21}^2$	$-\frac{12EJ_z}{l^3}t_{22}t_{32} - \frac{12EJ_y}{l^3}t_{23}t_{33} - \frac{EA}{l}t_{21}t_{31}$
9	$-\frac{12EJ_z}{l^3}t_{12}t_{32} - \frac{12EJ_y}{l^3}t_{13}t_{33} - \frac{EA}{l}t_{11}t_{31}$	$-\frac{12EJ_z}{l^3}t_{22}t_{32} - \frac{12EJ_y}{l^3}t_{23}t_{33} - \frac{EA}{l}t_{21}t_{31}$	$-\frac{12EJ_z}{l^3}t_{32}^2 - \frac{12EJ_y}{l^3}t_{33}^2 - \frac{EA}{l}t_{31}^2$
=			
10	$\frac{6EJ_z}{l^2}t_{12}t_{13} - \frac{6EJ_y}{l^2}t_{12}t_{13}$	$\frac{6EJ_z}{l^2}t_{22}t_{13} - \frac{6EJ_y}{l^2}t_{12}t_{23}$	$\frac{6EJ_z}{l^2}t_{32}t_{13} - \frac{6EJ_y}{l^2}t_{12}t_{33}$
11	$\frac{6EJ_z}{l^2}t_{23}t_{12} - \frac{6EJ_y}{l^2}t_{22}t_{13}$	$\frac{6EJ_z}{l^2}t_{22}t_{23} - \frac{6EJ_y}{l^2}t_{22}t_{23}$	$\frac{6EJ_z}{l^2}t_{23}t_{32} - \frac{6EJ_y}{l^2}t_{22}t_{33}$
12	$\frac{6EJ_z}{l^2}t_{12}t_{33} - \frac{6EJ_y}{l^2}t_{32}t_{13}$	$\frac{6EJ_z}{l^2}t_{22}t_{33} - \frac{6EJ_y}{l^2}t_{23}t_{32}$	$\frac{6EJ_z}{l^2}t_{32}t_{33} - \frac{6EJ_y}{l^2}t_{32}t_{33}$

$$[A_{ki}^2] = \quad (5.19)$$

4	5	6
7	8	9
10	11	12

$$= \left[ \begin{array}{ccc}
-\frac{6EJ_z}{l^2}t_{12}t_{13} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{12}t_{13} & -\frac{6EJ_z}{l^2}t_{12}t_{23} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{22}t_{13} & -\frac{6EJ_z}{l^2}t_{12}t_{33} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{32}t_{13} \\
-\frac{6EJ_z}{l^2}t_{22}t_{13} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{12}t_{23} & -\frac{6EJ_z}{l^2}t_{22}t_{23} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{22}t_{23} & -\frac{6EJ_z}{l^2}t_{22}t_{33} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{23}t_{32} \\
-\frac{6EJ_z}{l^2}t_{32}t_{13} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{12}t_{33} & -\frac{6EJ_z}{l^2}t_{23}t_{32} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{22}t_{33} & -\frac{6EJ_z}{l^2}t_{32}t_{33} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{32}t_{33} \\
\hline
\frac{2EJ_z}{l}t_{13}^2 + \frac{2EJ_y}{l}t_{12}^2 - \frac{GJ_{kp}}{l}t_{11}^2 & \frac{2EJ_z}{l}t_{13}t_{23} + \frac{2EJ_y}{l}t_{12}t_{22} - \frac{GJ_{kp}}{l}t_{11}t_{21} & \frac{2EJ_z}{l}t_{33}t_{13} + \frac{2EJ_y}{l}t_{12}t_{32} - \frac{GJ_{kp}}{l}t_{11}t_{31} \\
\frac{2EJ_z}{l}t_{13}t_{23} + \frac{2EJ_y}{l}t_{12}t_{22} - \frac{GJ_{kp}}{l}t_{11}t_{21} & \frac{2EJ_z}{l}t_{23}^2 + \frac{2EJ_y}{l}t_{22}^2 - \frac{GJ_{kp}}{l}t_{21}^2 & \frac{2EJ_z}{l}t_{23}t_{33} + \frac{2EJ_y}{l}t_{22}t_{32} - \frac{GJ_{kp}}{l}t_{21}t_{31} \\
\frac{2EJ_z}{l}t_{13}t_{33} + \frac{2EJ_y}{l}t_{12}t_{32} - \frac{GJ_{kp}}{l}t_{11}t_{31} & \frac{2EJ_z}{l}t_{23}t_{33} + \frac{2EJ_y}{l}t_{22}t_{32} - \frac{GJ_{kp}}{l}t_{21}t_{31} & \frac{2EJ_z}{l}t_{33}^2 + \frac{2EJ_y}{l}t_{32}^2 - \frac{GJ_{kp}}{l}t_{31}^2
\end{array} \right]$$

$$[A_{ik}^1] = \quad (5.20)$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{ccc} -\frac{12EJ_z}{l^3}t_{22}^2 - \frac{12EJ_y}{l^3}t_{33}^2 - \frac{EA}{l}t_{11}^2 & -\frac{12EJ_z}{l^3}t_{12}t_{22} - \frac{12EJ_y}{l^3}t_{23}t_{13} - \frac{EA}{l}t_{11}t_{21} & -\frac{12EJ_z}{l^3}t_{12}t_{32} - \frac{12EJ_y}{l^3}t_{33}t_{13} - \frac{EA}{l}t_{31}t_{11} \\ -\frac{12EJ_z}{l^3}t_{12}t_{22} - \frac{12EJ_y}{l^3}t_{23}t_{13} - \frac{EA}{l}t_{11}t_{21} & -\frac{12EJ_z}{l^3}t_{22}^2 - \frac{12EJ_y}{l^3}t_{23}^2 - \frac{EA}{l}t_{21}^2 & -\frac{12EJ_z}{l^3}t_{22}t_{32} - \frac{12EJ_y}{l^3}t_{23}t_{33} - \frac{EA}{l}t_{31}t_{21} \\ -\frac{12EJ_z}{l^3}t_{12}t_{32} - \frac{12EJ_y}{l^3}t_{33}t_{13} - \frac{EA}{l}t_{31}t_{11} & -\frac{12EJ_z}{l^3}t_{22}t_{32} - \frac{12EJ_y}{l^3}t_{23}t_{33} - \frac{EA}{l}t_{31}t_{21} & -\frac{12EJ_z}{l^3}t_{32}^2 - \frac{12EJ_y}{l^3}t_{33}^2 - \frac{EA}{l}t_{31}^2 \\ -\frac{6EJ_z}{l^2}t_{12}t_{13} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{12}t_{13} & -\frac{6EJ_z}{l^2}t_{22}t_{13} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{23}t_{12} & -\frac{6EJ_z}{l^2}t_{13}t_{32} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{33}t_{12} \\ -\frac{6EJ_z}{l^2}t_{23}t_{12} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{22}t_{13} & -\frac{6EJ_z}{l^2}t_{23}t_{22} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{23}t_{22} & -\frac{6EJ_z}{l^2}t_{23}t_{32} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{33}t_{22} \\ -\frac{6EJ_z}{l^2}t_{33}t_{12} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{13}t_{32} & -\frac{6EJ_z}{l^2}t_{33}t_{22} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{23}t_{32} & -\frac{6EJ_z}{l^2}t_{32}t_{33} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{32}t_{33} \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$[A_{ik}^2] = \quad (5.21)$$

	10	11	12
1	$\frac{6EJ_z}{l^2} t_{12} t_{13} - \frac{6EJ_y}{l^2} t_{12} t_{13}$	$\frac{6EJ_z}{l^2} t_{23} t_{12} - \frac{6EJ_y}{l^2} t_{22} t_{13}$	$\frac{6EJ_z}{l^2} t_{33} t_{12} - \frac{6EJ_y}{l^2} t_{13} t_{32}$
2	$\frac{6EJ_z}{l^2} t_{22} t_{13} - \frac{6EJ_y}{l^2} t_{23} t_{12}$	$\frac{6EJ_z}{l^2} t_{23} t_{22} - \frac{6EJ_y}{l^2} t_{23} t_{22}$	$\frac{6EJ_z}{l^2} t_{33} t_{22} - \frac{6EJ_y}{l^2} t_{23} t_{32}$
3	$\frac{6EJ_z}{l^2} t_{13} t_{32} - \frac{6EJ_y}{l^2} t_{33} t_{12}$	$\frac{6EJ_z}{l^2} t_{23} t_{32} - \frac{6EJ_y}{l^2} t_{33} t_{22}$	$\frac{6EJ_z}{l^2} t_{32} t_{33} - \frac{6EJ_y}{l^2} t_{32} t_{33}$
4	$\frac{2EJ_z}{l} t_{13}^2 + \frac{2EJ_y}{l} t_{12}^2 - \frac{GJ_{kp}}{l} t_{11}^2$	$\frac{2EJ_z}{l} t_{23} t_{13} + \frac{2EJ_y}{l} t_{12} t_{22} - \frac{GJ_{kp}}{l} t_{11} t_{21}$	$\frac{2EJ_z}{l} t_{33} t_{13} + \frac{2EJ_y}{l} t_{12} t_{32} - \frac{GJ_{kp}}{l} t_{31} t_{11}$
5	$\frac{2EJ_z}{l} t_{23} t_{13} + \frac{2EJ_y}{l} t_{12} t_{22} - \frac{GJ_{kp}}{l} t_{11} t_{21}$	$\frac{2EJ_z}{l} t_{23}^2 + \frac{2EJ_y}{l} t_{22}^2 - \frac{GJ_{kp}}{l} t_{21}^2$	$\frac{2EJ_z}{l} t_{33} t_{23} + \frac{2EJ_y}{l} t_{22} t_{32} - \frac{GJ_{kp}}{l} t_{31} t_{21}$
6	$\frac{2EJ_z}{l} t_{33} t_{13} + \frac{2EJ_y}{l} t_{12} t_{32} - \frac{GJ_{kp}}{l} t_{31} t_{11}$	$\frac{2EJ_z}{l} t_{33} t_{23} + \frac{2EJ_y}{l} t_{22} t_{32} - \frac{GJ_{kp}}{l} t_{31} t_{21}$	$\frac{2EJ_z}{l} t_{33}^2 + \frac{2EJ_y}{l} t_{32}^2 - \frac{GJ_{kp}}{l} t_{31}^2$

$$[A_{kk}^1] = \quad (5.22)$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} 7 \\ \begin{array}{c} \frac{12EJ_z}{l^3} t_{12}^2 + \frac{12EJ_y}{l^3} t_{13}^2 + \frac{EA}{l} t_{11}^2 \\ \frac{12EJ_z}{l^3} t_{12} t_{22} + \frac{12EJ_y}{l^3} t_{13} t_{23} + \frac{EA}{l} t_{11} t_{21} \\ \frac{12EJ_z}{l^3} t_{12} t_{32} + \frac{12EJ_y}{l^3} t_{13} t_{33} + \frac{EA}{l} t_{11} t_{31} \end{array} \\ \dots \\ \begin{array}{c} 8 \\ \begin{array}{c} \frac{12EJ_z}{l^3} t_{12} t_{22} + \frac{12EJ_y}{l^3} t_{13} t_{23} + \frac{EA}{l} t_{11} t_{21} \\ \frac{12EJ_z}{l^3} t_{22}^2 + \frac{12EJ_y}{l^3} t_{23}^2 + \frac{EA}{l} t_{21}^2 \\ \frac{12EJ_z}{l^3} t_{22} t_{32} + \frac{12EJ_y}{l^3} t_{23} t_{33} + \frac{EA}{l} t_{21} t_{31} \end{array} \\ \dots \\ \begin{array}{c} 9 \\ \begin{array}{c} \frac{12EJ_z}{l^3} t_{12} t_{32} + \frac{12EJ_y}{l^3} t_{13} t_{33} + \frac{EA}{l} t_{11} t_{31} \\ \frac{12EJ_z}{l^3} t_{22} t_{32} + \frac{12EJ_y}{l^3} t_{23} t_{33} + \frac{EA}{l} t_{21} t_{31} \\ \frac{12EJ_z}{l^3} t_{32}^2 + \frac{12EJ_y}{l^3} t_{33}^2 + \frac{EA}{l} t_{31}^2 \end{array} \end{array} \\ \dots \\ \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} 10 \\ \begin{array}{c} -\frac{6EJ_z}{l^2} t_{12} t_{13} + \frac{6EJ_y}{l^2} t_{12} t_{13} \\ -\frac{6EJ_z}{l^2} t_{22} t_{13} + \frac{6EJ_y}{l^2} t_{12} t_{23} \\ -\frac{6EJ_z}{l^2} t_{32} t_{13} + \frac{6EJ_y}{l^2} t_{12} t_{33} \end{array} \\ \dots \\ \begin{array}{c} 11 \\ \begin{array}{c} -\frac{6EJ_z}{l^2} t_{12} t_{23} + \frac{6EJ_y}{l^2} t_{22} t_{13} \\ -\frac{6EJ_z}{l^2} t_{22} t_{23} + \frac{6EJ_y}{l^2} t_{22} t_{23} \\ -\frac{6EJ_z}{l^2} t_{23} t_{32} + \frac{6EJ_y}{l^2} t_{22} t_{33} \end{array} \\ \dots \\ \begin{array}{c} 12 \\ \begin{array}{c} -\frac{6EJ_z}{l^2} t_{12} t_{33} + \frac{6EJ_y}{l^2} t_{32} t_{13} \\ -\frac{6EJ_z}{l^2} t_{22} t_{33} + \frac{6EJ_y}{l^2} t_{23} t_{32} \\ -\frac{6EJ_z}{l^2} t_{32} t_{33} + \frac{6EJ_y}{l^2} t_{32} t_{33} \end{array} \end{array} \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$[A_{kk}^2] = \quad (5.23)$$

10	11	12
7	7	7
$-\frac{6EJ_z}{l^2}t_{12}t_{13} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{12}t_{13}$	$-\frac{6EJ_z}{l^2}t_{23}t_{12} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{22}t_{13}$	$-\frac{6EJ_z}{l^2}t_{12}t_{33} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{32}t_{13}$
8	8	8
$-\frac{6EJ_z}{l^2}t_{22}t_{13} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{23}t_{12}$	$-\frac{6EJ_z}{l^2}t_{22}t_{23} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{22}t_{23}$	$-\frac{6EJ_z}{l^2}t_{22}t_{33} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{23}t_{32}$
9	9	9
$-\frac{6EJ_z}{l^2}t_{32}t_{13} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{12}t_{33}$	$-\frac{6EJ_z}{l^2}t_{23}t_{32} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{22}t_{33}$	$-\frac{6EJ_z}{l^2}t_{32}t_{33} + \frac{6EJ_y}{l^2}t_{32}t_{33}$
10	10	10
$\frac{4EJ_z}{l}t_{13}^2 + \frac{4EJ_y}{l}t_{12}^2 + \frac{GJ_{kp}}{l}t_{11}^2$	$\frac{4EJ_z}{l}t_{13}t_{23} + \frac{4EJ_y}{l}t_{12}t_{22} + \frac{GJ_{kp}}{l}t_{11}t_{21}$	$\frac{4EJ_z}{l}t_{13}t_{33} + \frac{4EJ_y}{l}t_{12}t_{32} + \frac{GJ_{kp}}{l}t_{11}t_{31}$
11	11	11
$\frac{4EJ_z}{l}t_{13}t_{23} + \frac{4EJ_y}{l}t_{12}t_{22} + \frac{GJ_{kp}}{l}t_{11}t_{21}$	$\frac{4EJ_z}{l}t_{23}^2 + \frac{4EJ_y}{l}t_{22}^2 + \frac{GJ_{kp}}{l}t_{21}^2$	$\frac{4EJ_z}{l}t_{23}t_{33} + \frac{4EJ_y}{l}t_{22}t_{32} + \frac{GJ_{kp}}{l}t_{21}t_{31}$
12	12	12
$\frac{4EJ_z}{l}t_{13}t_{33} + \frac{4EJ_y}{l}t_{12}t_{32} + \frac{GJ_{kp}}{l}t_{11}t_{31}$	$\frac{4EJ_z}{l}t_{23}t_{33} + \frac{4EJ_y}{l}t_{22}t_{32} + \frac{GJ_{kp}}{l}t_{21}t_{31}$	$\frac{4EJ_z}{l}t_{33}^2 + \frac{4EJ_y}{l}t_{32}^2 + \frac{GJ_{kp}}{l}t_{31}^2$

## 5.2. Пример расчёта пространственной стержневой системы

Рассмотрим расчёт рамы, показанный на рис. 5.8а. Жёсткости стержней рамы относительно осей местных систем координат (рис. 5.8б) для всех элементов одинаковы и, выраженные через одну из жесткостей ( $EJ_y$ ), приняты равными:

$$EA = 10EJ_y; \quad EJ_z = 0,5EJ_y; \quad GJ_{кр} = 0,25EJ_y.$$

Учитывая разные величины жёсткостей элементов относительно осей  $y'$  и  $z'$ , покажем положение элементов в пространстве, которое по отношению к узлу 1 представлено на рис. 5.8в.

Расчётная дискретная модель системы будет состоять из трёх конечных элементов, соединённых жёстко между собой в узле 1 и в узлах 2, 3 и 4 с основанием (рис. 5.8а). Представление и нумерация всех возможных перемещений узлов (по шесть в каждом) в соответствии с выбранной общей системой координат показаны на рис. 5.8г. Местные системы координат для элементов представлены на рис. 5.8в. Приведение равномерно распределённой нагрузки на первый КЭ к узловым нагрузкам согласно рис. 2.10а показано на рис. 5.8д. В результате в узле 1 будет действовать сосредоточенная сила, равная

$$P_1 = \bar{P} + P_{q1} = 5 + 12 = 17 \text{ кН},$$

которая при этом согласно правилу знаков для внешних нагрузок в матрице нагрузок должна быть записана со знаком «минус» (действует в направлении, противоположном направлению оси  $z$ ). Сосредоточенные моменты в матрице нагрузок записываются действующими относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (или параллельных им). Внешний же момент в первом узле  $m = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$  действует в вертикальной плоскости, проходящей через второй КЭ, относительно оси  $y'_2$ , которая не параллельна ни оси  $x$ , ни оси  $y$ . Поэтому этот момент необходимо разложить на составляющие относительно осей  $x$  и  $y$ , что удобно делать в векторном виде. Это разложение показано на рис. 5.8е (вид сверху). В результате в узле 1 в матрице внешних нагрузок будем иметь два сосредоточенных момента:  $M_{px} = 12 - 1,94 = 10,06 \text{ кН} \cdot \text{м}$  и  $M_{py} = -7,76 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Общая система разрешающих уравнений для рассматриваемой рамы показана в (5.24), где матрица жёсткости дискретной модели представлена в виде структурной схемы. При этом учтено, что из 24 возможных перемещений узлов системы 18 перемещений в узлах 2, 3 и 4 будут равны нулю; неизвестными остаются шесть перемещений в узле 1 –  $\Delta_1 \div \Delta_6$ , для нахождения которых будем иметь соответственно шесть уравнений, коэффициенты которых в (5.24) выделены кружками. Для определения этих коэффициентов необходимо иметь матрицы преобразования координат для всех конечных элементов системы.

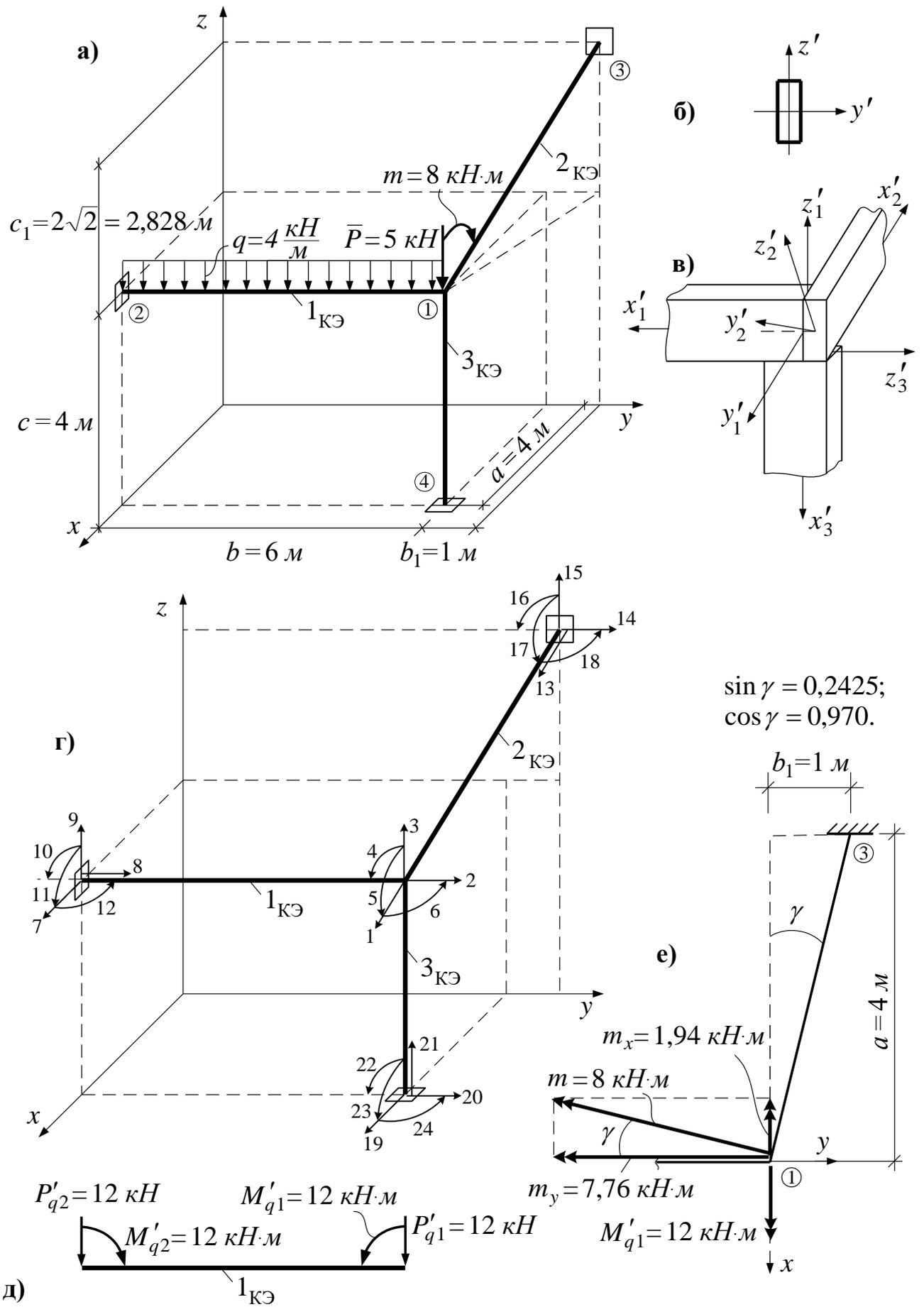
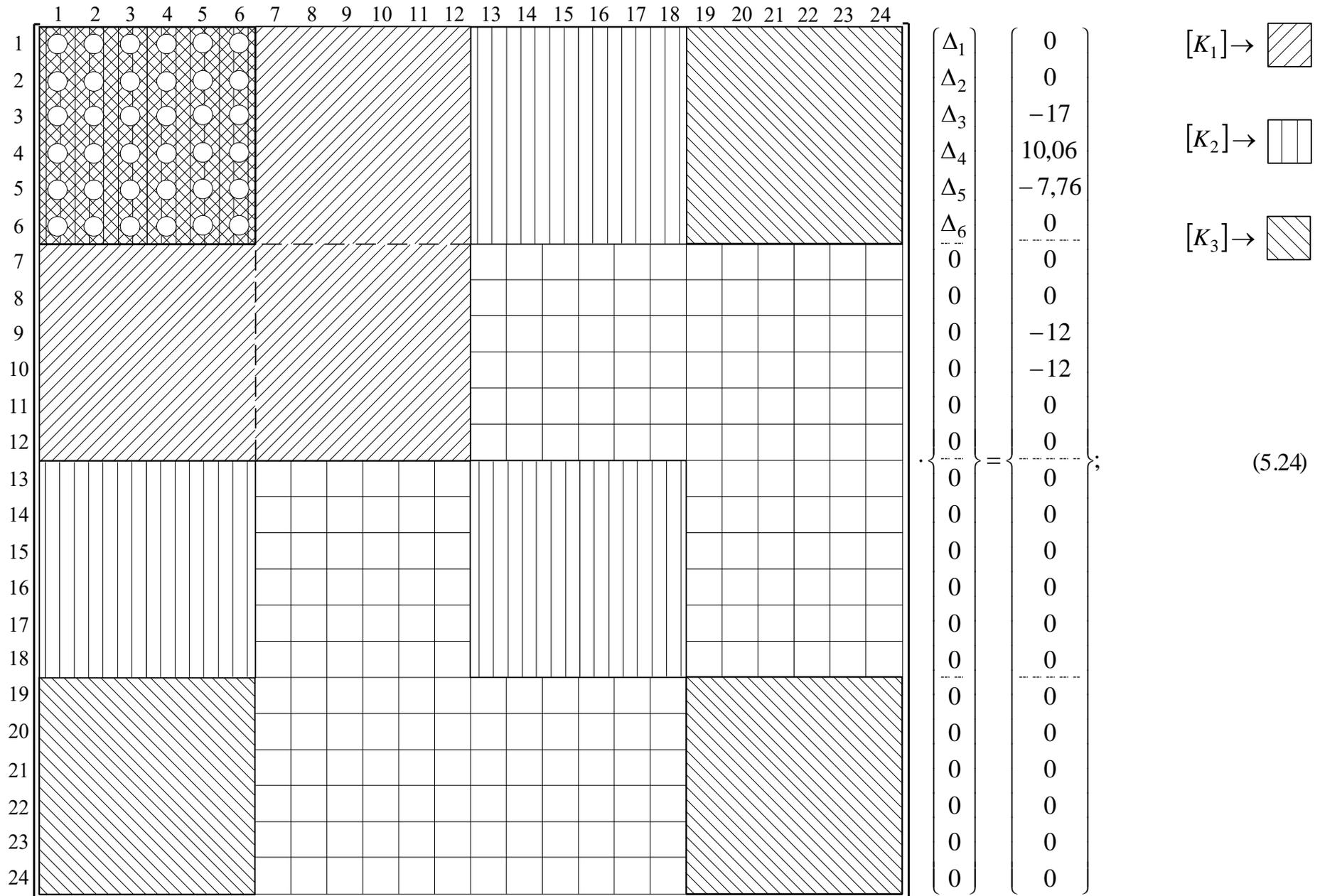


Рис. 5.8



Определение элементов матрицы направляющих косинусов (5.6) для конечных элементов выполним согласно зависимостям (5.7) – (5.13).

**Для 1-го КЭ:**

$$1) \quad t_{11} = \frac{l_{x1}}{l_1} = \frac{0}{6} = 0; \quad t_{12} = \frac{l_{y1}}{l_1} = \frac{0-6}{6} = -1; \quad t_{13} = \frac{l_{z1}}{l_1} = 0;$$

$$2) \quad \alpha_1 = 0; \quad tg \alpha_1 = 0;$$

$$3) \quad t_{33} = \sqrt{\frac{1-t_{13}^2}{1+tg^2\alpha_1}} = \sqrt{\frac{1-0^2}{1+0^2}} = 1;$$

$$4) \quad t_{23} = t_{33} \cdot tg \alpha_1 = 1 \cdot 0 = 0;$$

$$5) \quad t_{21} = -\frac{t_{11}t_{13}t_{23} + t_{12}t_{33}}{t_{11}^2 + t_{12}^2} = -\frac{0 \cdot 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1}{0^2 + (-1)^2} = 1;$$

$$t_{22} = \frac{t_{11}t_{33} - t_{12}t_{13}t_{23}}{t_{11}^2 + t_{12}^2} = \frac{0 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 0}{0^2 + (-1)^2} = 0;$$

$$6) \quad t_{31} = t_{12}t_{23} - t_{22}t_{13} = (-1) \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0; \quad t_{32} = t_{21}t_{13} - t_{11}t_{23} = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

**Для 2-го КЭ:**

$$1) \quad t_{11} = \frac{l_{x2}}{l_2} = \frac{0-4}{5} = -0,8; \quad t_{12} = \frac{l_{y2}}{l_2} = \frac{1-0}{5} = 0,2; \quad t_{13} = \frac{l_{z2}}{l_2} = \frac{6,828-4}{5} = 0,5656;$$

$$\text{где } l_2 = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 2,828^2} = 5 \text{ (м);}$$

$$2) \quad \alpha_2 = 0; \quad tg \alpha_2 = 0;$$

$$3) \quad t_{33} = \sqrt{\frac{1-t_{13}^2}{1+tg^2\alpha_2}} = \sqrt{\frac{1-0,5656^2}{1+0^2}} = 0,8247;$$

$$4) \quad t_{23} = t_{33} \cdot tg \alpha_2 = 0,8247 \cdot 0 = 0;$$

$$5) \quad t_{21} = -\frac{t_{11}t_{13}t_{23} + t_{12}t_{33}}{t_{11}^2 + t_{12}^2} = -\frac{-0,8 \cdot 0,5656 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0,8247}{0,8^2 + 0,2^2} = -0,2425;$$

$$t_{22} = \frac{t_{11}t_{33} - t_{12}t_{13}t_{23}}{t_{11}^2 + t_{12}^2} = \frac{-0,8 \cdot 0,8247 - 0,2 \cdot 0,5656 \cdot 0}{0,8^2 + 0,2^2} = -0,9702;$$

$$6) \quad t_{31} = t_{12}t_{23} - t_{22}t_{13} = 0,2 \cdot 0 - (-0,9702) \cdot 0,5656 = 0,5487;$$

$$t_{32} = t_{21}t_{13} - t_{11}t_{23} = -0,2425 \cdot 0,5656 - 0,8 \cdot 0 = -0,1372.$$

Для 3-го КЭ:

$$1) \quad t_{11} = \frac{l_{x3}}{l_3} = \frac{0}{4} = 0; \quad t_{12} = \frac{l_{y3}}{l_3} = \frac{0}{4} = 0; \quad t_{13} = \frac{l_{z3}}{l_3} = \frac{0-4}{4} = -1;$$

$$2) \quad \alpha_3 = 0; \quad \operatorname{tg} \alpha_3 = 0;$$

$$3) \quad t_{33} = \sqrt{\frac{1-t_{13}^2}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha_3}} = \sqrt{\frac{1-(-1)^2}{1+0^2}} = 0;$$

$$4) \quad t_{23} = t_{33} \cdot \operatorname{tg} \alpha_3 = 0 \cdot 0 = 0;$$

$$5) \quad t_{21} = -\frac{t_{11}t_{13}t_{23} + t_{12}t_{33}}{t_{11}^2 + t_{12}^2} = -\frac{0 \cdot (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 0}{0^2 + 0^2} = \frac{0}{0} \quad (\text{решение не определено});$$

решение найдём из визуального анализа положения КЭ (см. рис. 5.7) в системе; получим

$$t_{21} = \cos(y', x) = \cos 180^\circ = -1;$$

$$t_{22} = \frac{t_{11}t_{33} - t_{12}t_{13}t_{23}}{t_{11}^2 + t_{12}^2} = \frac{0 \cdot 0 - 0 \cdot (-1) \cdot 0}{0^2 + 0^2} = 0;$$

$$6) \quad t_{31} = t_{12}t_{23} - t_{22}t_{13} = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0; \quad t_{32} = t_{21}t_{13} - t_{11}t_{23} = (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = 1.$$

Таким образом, матрицы направляющих косинусов  $[T_\alpha^*]$  для КЭ примет вид:

$$[T_{\alpha 1}^*] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [T_{\alpha 2}^*] = \begin{bmatrix} -0,8 & 0,2 & 0,5656 \\ -0,2425 & -0,970 & 0 \\ 0,5487 & -0,137 & 0,8247 \end{bmatrix}; \quad [T_{\alpha 3}^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Для получения системы разрешающих уравнений в сокращённом виде (2.36)

$$[K^*] \cdot \{\Delta^*\} = \{P^*\}$$

необходимо вычислить коэффициенты этой системы, которые в (5.24) отмечены кружками и которые вычисляются по формуле (2.33) с учётом выражений элементов матрицы жёсткости КЭ типа 1, приведенных в (5.16), (5.17):

$$\begin{aligned} k_{11} = r_{11}^1 + r_{11}^2 + r_{11}^3 &= \sum_{s=1}^3 r_{11}^s = \sum_{s=1}^3 \left[ \frac{EA_s}{l_s} (t_{11}^s)^2 + \frac{12EJ_{zs}}{l_s^3} (t_{21}^s)^2 + \frac{12EJ_{ys}}{l_s^3} (t_{31}^s)^2 \right] = \\ &= \left[ \frac{10EJ_y}{6} \cdot 0^2 + \frac{12 \cdot 0,5EJ_y}{6^3} \cdot (1)^2 + \frac{12EJ_y}{6^3} \cdot 0^2 \right] + \\ &+ \left[ \frac{10EJ_y}{5} \cdot (-0,8)^2 + \frac{12 \cdot 0,5EJ_y}{5^3} \cdot (-0,2425^2) + \frac{12EJ_y}{5^3} \cdot 0,5487^2 \right] + \\ &+ \left[ \frac{10EJ_y}{4} \cdot 0^2 + \frac{12 \cdot 0,5EJ_y}{4^3} \cdot (-1)^2 + \frac{12EJ_y}{4^3} \cdot (0)^2 \right] = 1,433EJ_y; \end{aligned}$$

$$k_{12} = \sum_{s=1}^3 r_{12}^s = \sum_{s=1}^3 \left[ \frac{12EJ_{ys}}{l_s^3} t_{32}^s t_{31}^s + \frac{12EJ_{zs}}{l_s^3} t_{21} t_{22} + \frac{EA_s}{l_s} t_{11} t_{12} \right] = (0+0+0) +$$

$$+ \left[ \frac{12EJ_y}{5^3} \cdot 0,5487 \cdot (-0,1372) + \frac{12 \cdot 0,5EJ_y}{5^3} (-2425) \cdot (-0,970) + \frac{10EJ_y}{5} (-0,8) \cdot 0,2 \right] +$$

$$+ (0+0+0) = -0,316 EJ_y.$$

Аналогично получим остальные коэффициенты системы разрешающих уравнений, которая в результате примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1,433\Delta_1 - 0,316\Delta_2 - 0,862\Delta_3 + 0,016\Delta_4 - 0,0557\Delta_5 + 0,0593\Delta_6 = 0; \\ -0,316\Delta_1 + 1,981\Delta_2 + 0,215\Delta_3 + 0,303\Delta_4 - 0,016\Delta_5 - 0,096\Delta_6 = 0; \\ -0,862\Delta_1 + 0,215\Delta_2 + 3,261\Delta_3 - 0,119\Delta_4 + 0,192\Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 = -17/EJ_y; \\ 0,016\Delta_1 + 0,303\Delta_2 - 0,119\Delta_3 + 1,866\Delta_4 + 0,150\Delta_5 + 0,158\Delta_6 = 10,06/EJ_y; \\ -0,0557\Delta_1 - 0,016\Delta_2 + 0,192\Delta_3 + 0,150\Delta_4 + 1,304\Delta_5 - 0,0396\Delta_6 = -7,76/EJ_y; \\ 0,0593\Delta_1 - 0,096\Delta_2 + 0 \cdot \Delta_3 + 0,158\Delta_4 - 0,0396\Delta_5 + 0,684\Delta_6 = 0. \end{array} \right.$$

Решая эту систему уравнений, найдём:

$$\Delta_1 = -3,820/EJ_y; \quad \Delta_2 = -1,018/EJ_y; \quad \Delta_3 = -5,588/EJ_y;$$

$$\Delta_4 = 5,846/EJ_y; \quad \Delta_5 = -6,022/EJ_y; \quad \Delta_6 = -1,514/EJ_y.$$

Усилия по концам КЭ получим на основе зависимостей (2.49), (2.50) с учётом (5.1), (5.5) и (5.25). Для 1-го КЭ процедура вычисления этих усилий показана в (5.26) (в представленном выражении опущены жесткости  $EJ_y$ , как взаимно сокращающиеся). Для остальных КЭ она аналогична. Действие усилий по концам 1-го КЭ показано на рис. 5.9. Окончательны эпюры усилий в раме (рис. 5.7) показаны на рис. 5.10, 5.11. Величины усилий на них представлены относительно местных систем координат, что в данном случае удобнее, в связи с наличием в системе стержня (2-й), который ориентирован в пространстве произвольно. Рядом с эпюрами внешних усилий показаны силы и моменты, действующие в соответствии каждой из этих эпюр по отношению к узлу 1, которые при этом разложены по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$  общей системы координат. Это представление позволяет проверить равновесие узла и по силам, и по моментам:

$$\sum X = 0; \quad -0,494 + 0,232 + 0,104 + 0,928 - 0,770 = 0; \quad 1,264 - 1,264 = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad 1,697 + 0,122 + 0,416 - 2,002 - 2,233 = 0; \quad 2,235 - 2,235 = 0;$$

$$\sum Z = 0; \quad 13,971 + 0,349 - 10,715 + 1,395 - 5 = 0; \quad 15,715 - 15,715 = 0;$$

$$\sum M_x = 0; \quad -5,465 + 1,243 - 0,738 - 0,271 + 7,171 = 0; \quad 8,414 - 8,414 = 0;$$

$$\sum M_y = 0; \quad 4,970 + 2,29 + 0,184 + 0,066 - 7,76 + 0,250 = 0; \quad 7,760 - 7,760 = 0;$$

$$\sum M_z = 0; \quad -1,108 + 0,823 + 0,190 + 0,095 = 0; \quad -1,108 + 1,108 = 0.$$



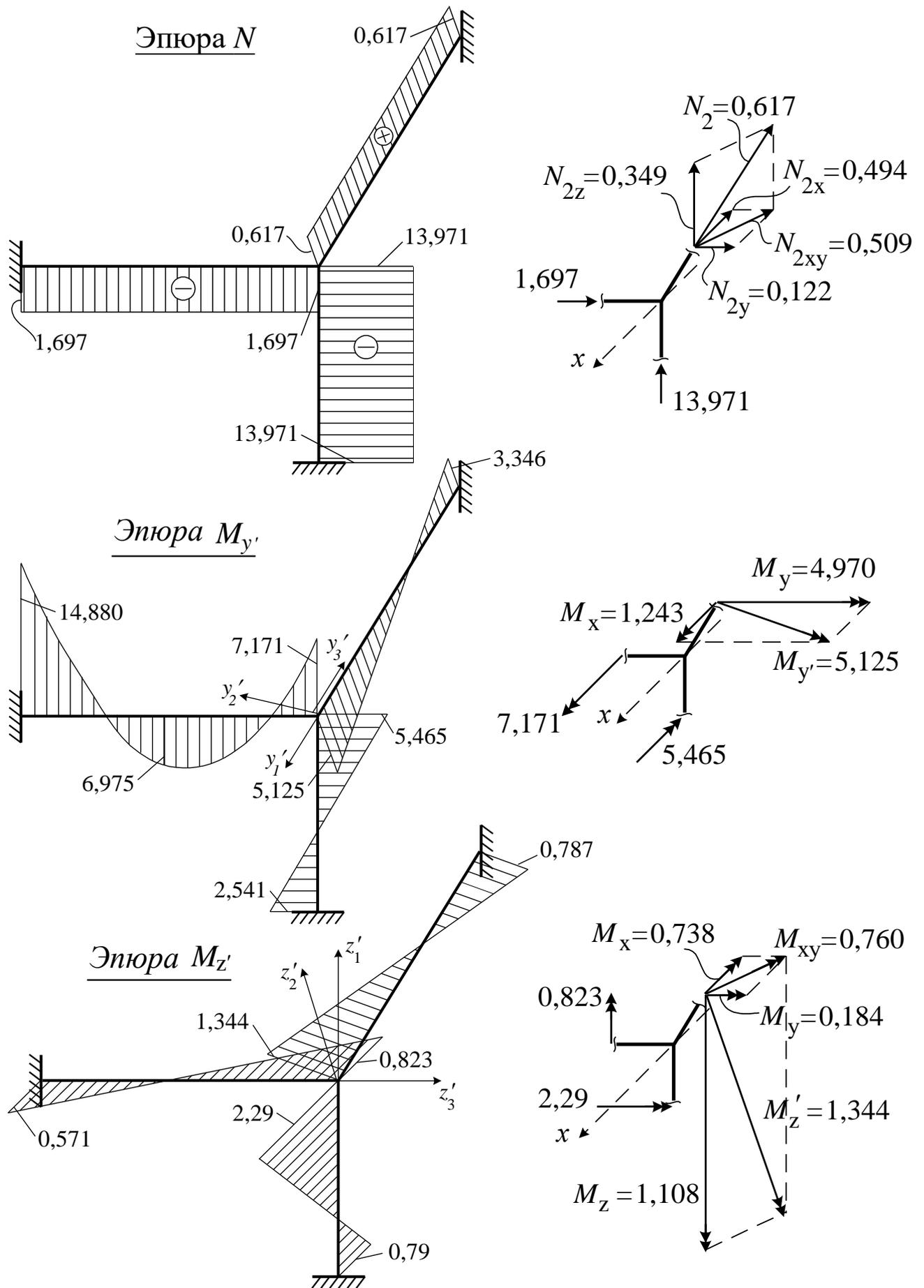


Рис. 5.10

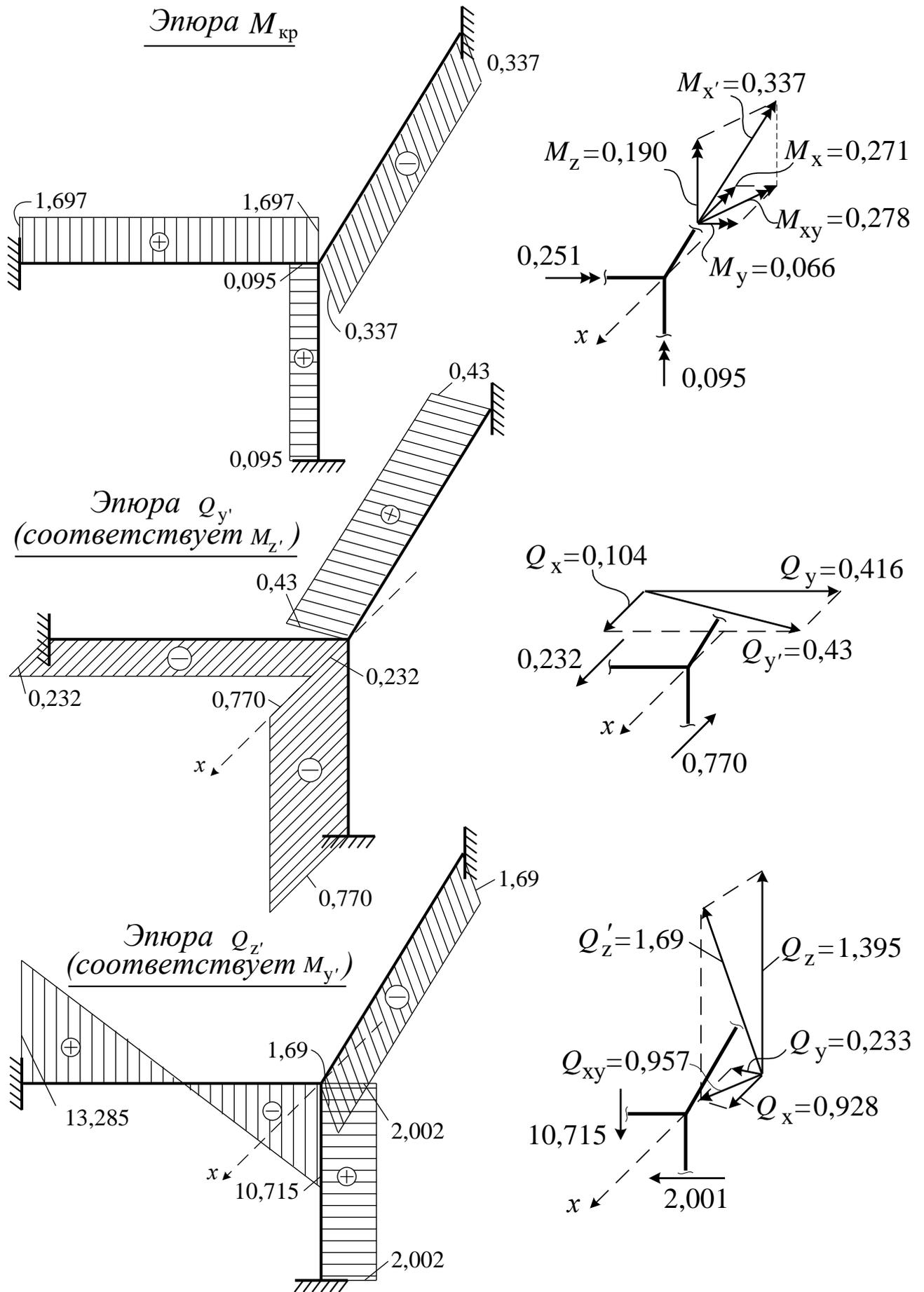


Рис. 5.11

## 6. ПРОГРАММА “ORION”

На основе изложенных принципов на кафедре «Строительная механика» Брестского государственного технического университета составлена<sup>2</sup> компьютерная программа “ORION” для расчета произвольных пространственных стержневых систем на статические нагрузки [7, 8]. Программа реализована в среде программирования Delphi с применением объектно-ориентированной модели программирования. Исходный текст программы включает 92 модуля общим объемом около 3 Мб, исполняемый файл программы – Orion.exe – имеет размер 822 Кб. Программа работает под управлением операционных систем Windows 95 и выше и не требует специальной установки на компьютер и дополнительных библиотек. Стандартный для Windows графический многооконный интерфейс и достаточно развитый сервис делают работу в программе простой, понятной и удобной.

Важными достоинствами программы являются:

- практически неограниченное количество узлов и стержней расчетной модели (их число определяется ресурсами компьютера);
- для идентификации узлов и стержней вместо номеров применяются имена и при удалении отдельных узлов, стержней не происходит их переобозначение;
- для каждого узла и стержня и для системы в целом можно посмотреть практически любую матрицу, применяемую в процессе решения;
- возможность автоматического расчета при внесении изменений в исходные данные; эта возможность полезна при исследовании небольших систем.

Программа выполнена в стиле SDI (однодокументный интерфейс), то есть может работать только с одной задачей, но на компьютере можно запустить одновременно несколько экземпляров программы с различными задачами и настройками.

После запуска программы появляется ее главная управляющая панель (рис. 6.1), основное назначение которой – управление задачами и вызов различных окон и инструментов программы. Сворачивание этой панели приводит к сворачиванию всех открытых окон и самого приложения, а закрытие ее вызывает завершение работы программы.

На главной управляющей панели находятся главное меню программы и панель инструментов.

---

<sup>2</sup> Программа составлена В.И. Игнатьюком и Н.С. Бондаруком.

**Главное меню** программы содержит команды:

- “Файл” – команды управления файлами задач (создание, открытие, сохранение) и выхода из программы;
- “Вид” – команды вызова различных окон и инструментов для работы с задачей;
- “Дополнительно” – команды этого пункта меню повторяют команды пункта “Вид” с той разницей, что они вызывают создание новых экземпляров окон или инструментов;
- “Система” – просмотр внутренней организации объектов программы;
- “Расчет” – запуск расчета сооружения;
- “Помощь” – вызов справочной системы.

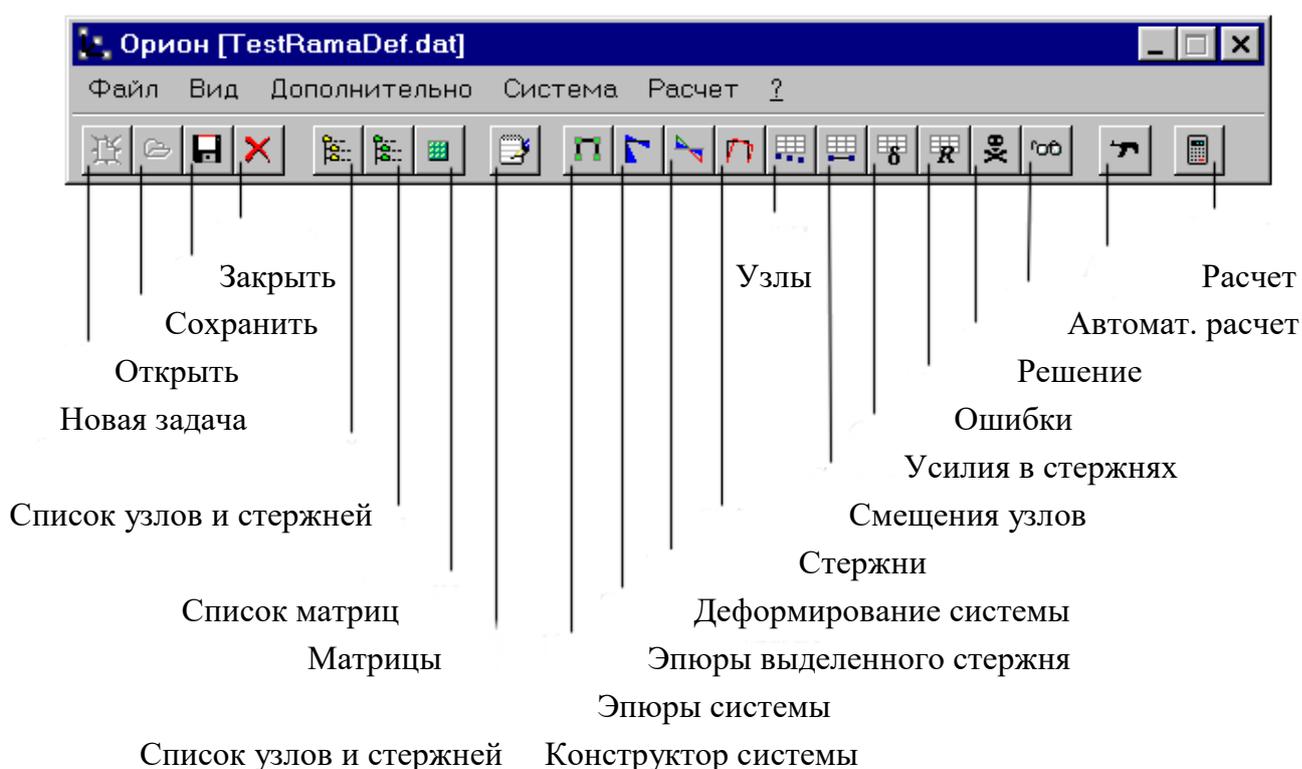


Рис. 6.1. Главная управляющая панель программы “Орион”

**Панель инструментов** дублирует наиболее часто используемые команды главного меню (рис 6.1). Все эти команды открывают дополнительные окна, имеющие свои функции и наборы команд.

Исходные данные в программе вводятся в окне **“Конструктор системы”** с использованием графического интерфейса, представленного на рис. 6.2. Конструктор системы позволяет создавать, просматривать и корректировать рас-

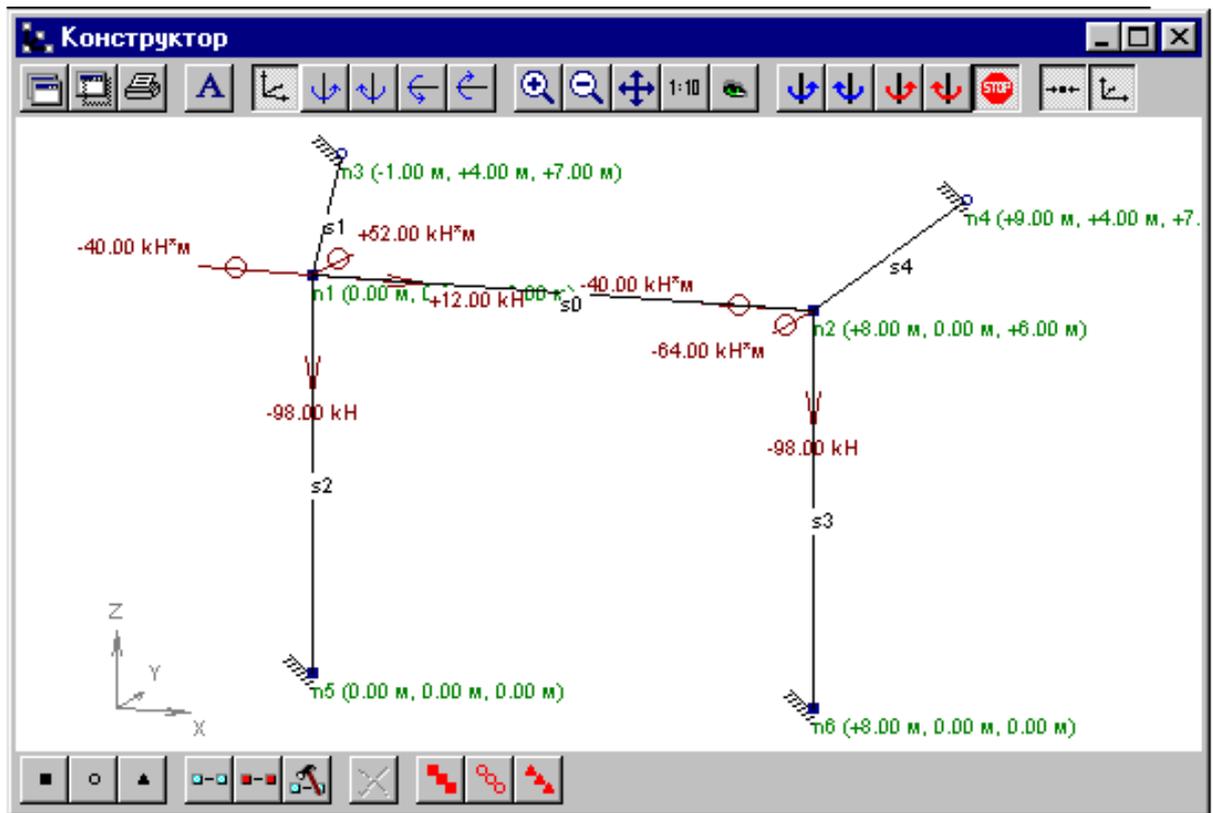


Рис. 6.2. Конструктор расчетной модели программы “ORION”

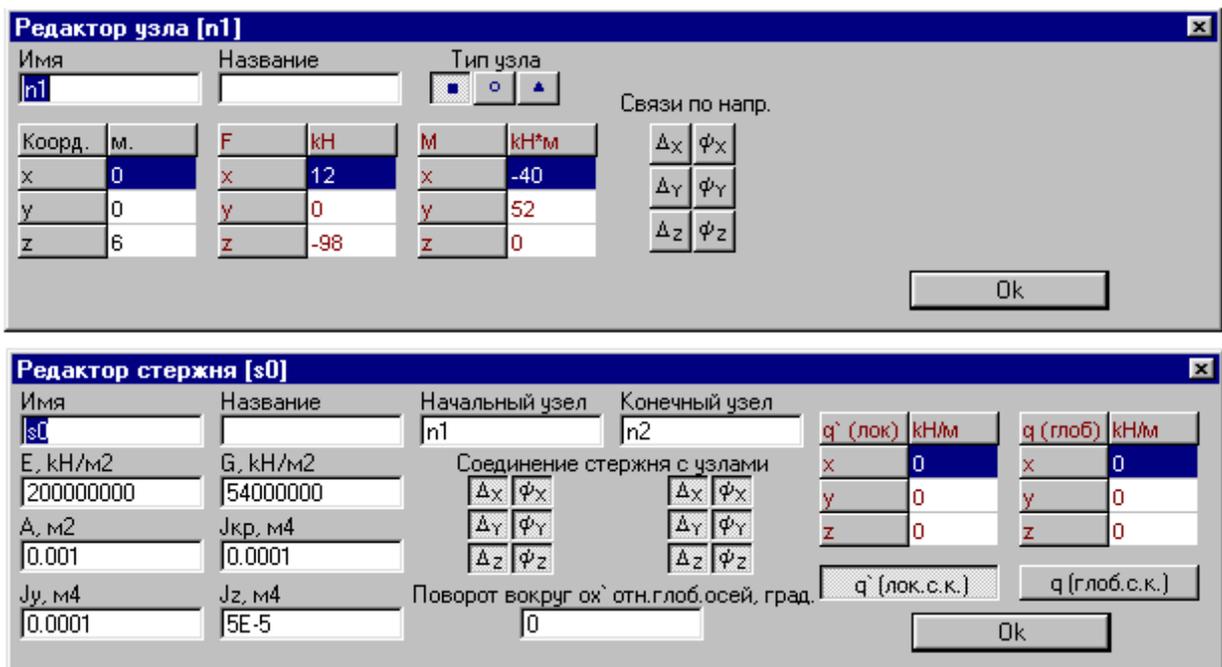


Рис. 6.3. Редакторы узлов и стержней

считываемую расчетную модель. Кнопки внизу окна служат для добавления новых узлов (жестких, шарнирных, прочих) и стержней, для корректировки привязки стержней, для разбивки стержней на более мелкие конечные элементы,

для удаления текущих (предварительно выделенных) узлов и стержней, для изменения типа сразу всех узлов системы (например, шарнирных узлов на жесткие и наоборот). Выделение объекта (узла, стержня) производится с помощью мыши в окне графики или в списке узлов и стержней (выделенный текущий объект отмечается красным цветом).

Кнопки вверху “Конструктора системы” представляют инструменты для работы с изображением расчетной системы, включая возможности масштабирования графических объектов, их поворота и вращения относительно осей координат, настройки параметров и форм представления характеристик сооружения – названия узлов, их координат, названия стержней, их жесткостных характеристик, нагрузок, единиц измерения вводимых величин и т. д.

При вводе и редактировании узлов и стержней открываются “Редактор узлов” и “Редактор стержней” (рис. 6.3), которые позволяют менять любые их характеристики.

Все эти и другие функции, реализованные в программе, дают возможность достаточно легко менять различные параметры и характеристики рассчитываемого объекта, что позволяет выполнять исследования напряженно-деформированного состояния сооружений при различных вариантах их расчетных схем и изменении их параметров и характеристик.

В результате расчета можно получить и увидеть эпюры внутренних усилий как в целом в системе, так и для каждого (выделенного) из стержней системы, деформированный вид сооружения с заданным увеличением, можно просмотреть все матрицы разрешающих уравнений как в полном виде, так и с учетом граничных условий (с учетом вычеркивания строк и столбцов), матрицы каждого из стержней в общей и местной системах координат (причем для местной системы координат их можно увидеть и в формульном виде). При наличии в решении ошибок их также можно посмотреть.

Тестирование программы выполнено на примерах, просчитанных вручную и взятых из литературы. Расчеты и их анализ показали полное совпадение результатов. Например, в окне конструктора системы на рис. 6.2 представлена пространственная рама, взятая из работы [4]. Одна из эпюр внутренних усилий – эпюра  $M_y$  – для этой рамы показана на рис. 6.4, на рис. 6.5 показана схема ее деформирования с увеличением 140:1, а на рис. 6.6 – эпюры внутренних усилий в одном из стержней (в стержне s3).

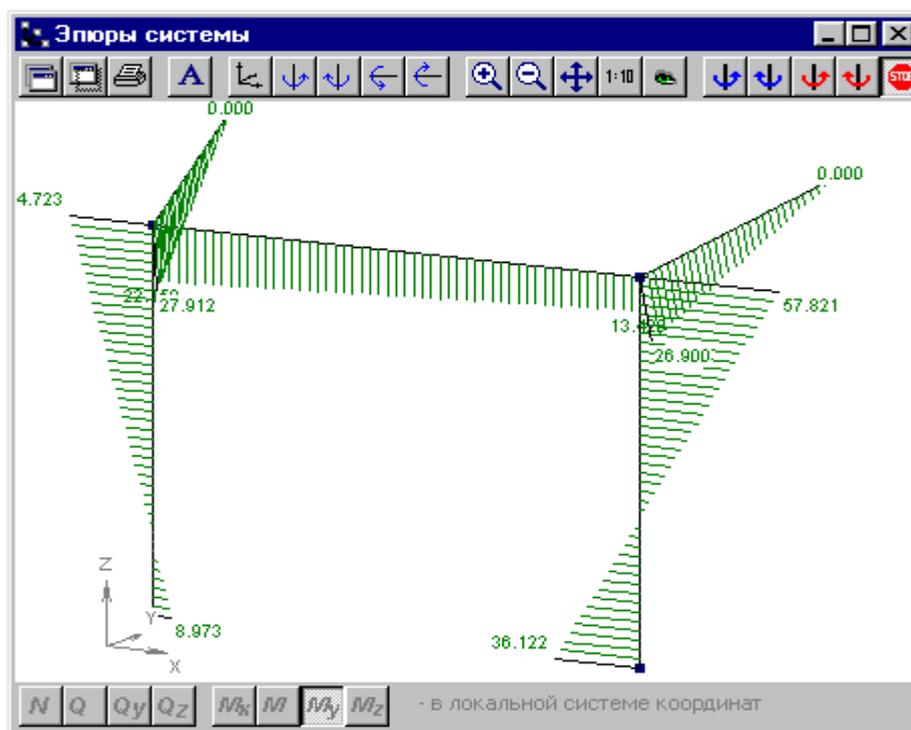


Рис. 6.4. Эпюра  $M_y$

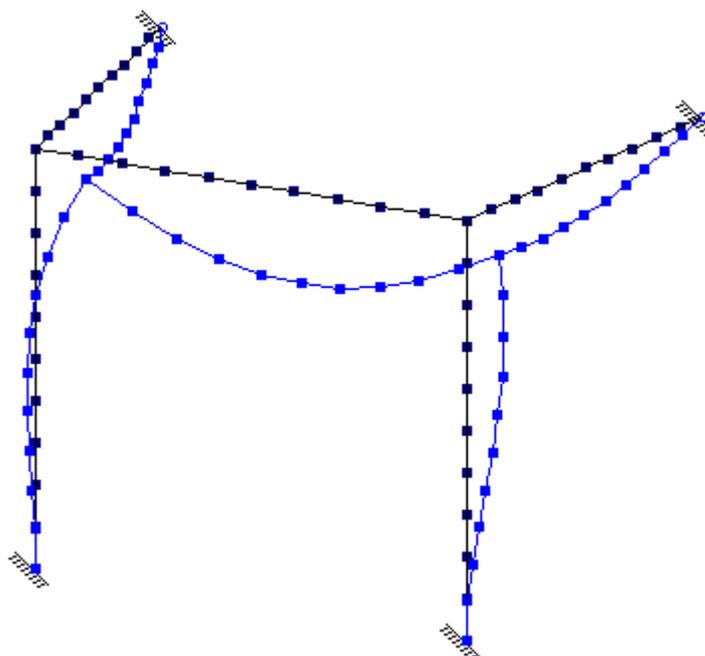


Рис. 6.5. Деформированный вид рамы (увеличение 140:1)

Исходные данные, результаты решения и параметры их графического представления сохраняются в программе в файлах текстового формата известной структуры. Поэтому эти файлы можно редактировать, а также создавать их независимо от самой программы в любом из редакторов, работающих с текстовыми файлами. Последнее позволяет использовать и так называемые генераторы

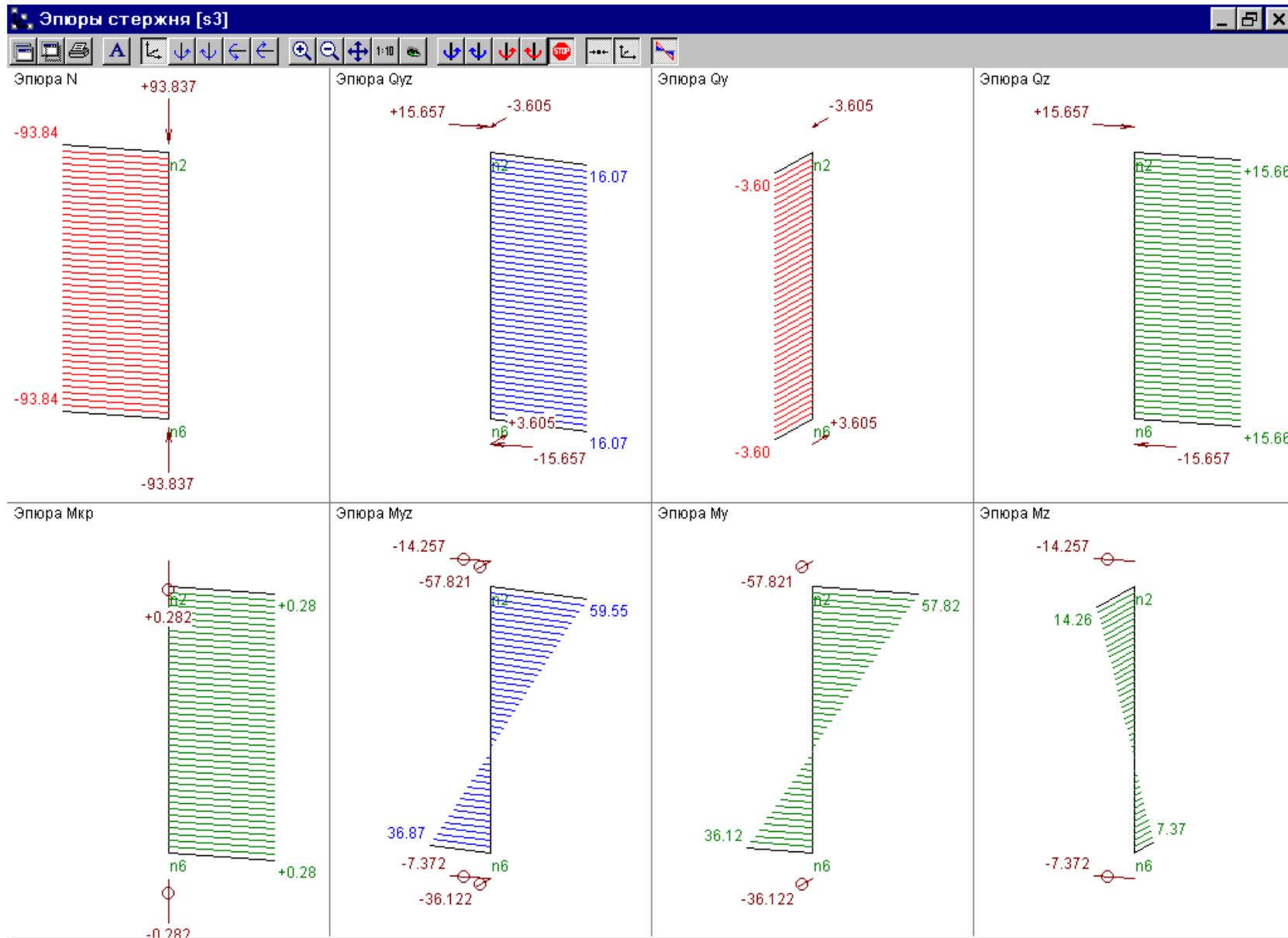
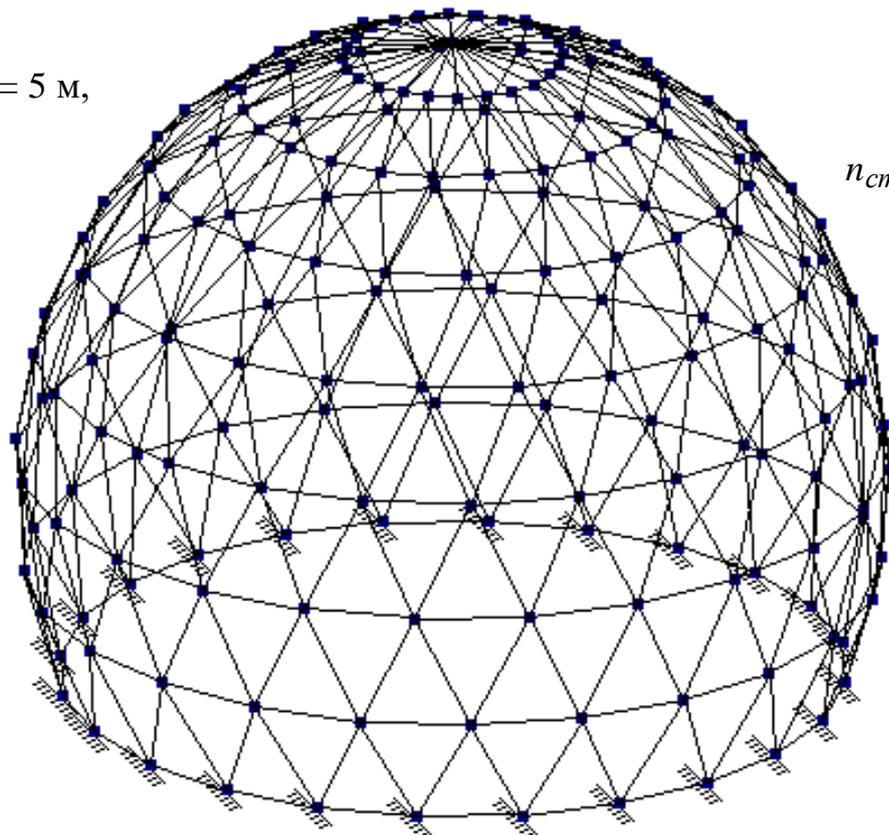


Рис. 6.6. Эпюры внутренних усилий в стержне  $s3$

систем, которые автоматически формируют файлы исходных данных для заданных сооружений. Генераторы систем могут создаваться с использованием любой системы программирования. Полученные файлы исходных данных затем вызываются (читаются) программой “ORION”, в которой сгенерированной системой могут выполняться любые действия.

а)  $r_{\text{основания}} = 5 \text{ м}$ ,

$H = 8 \text{ м}$

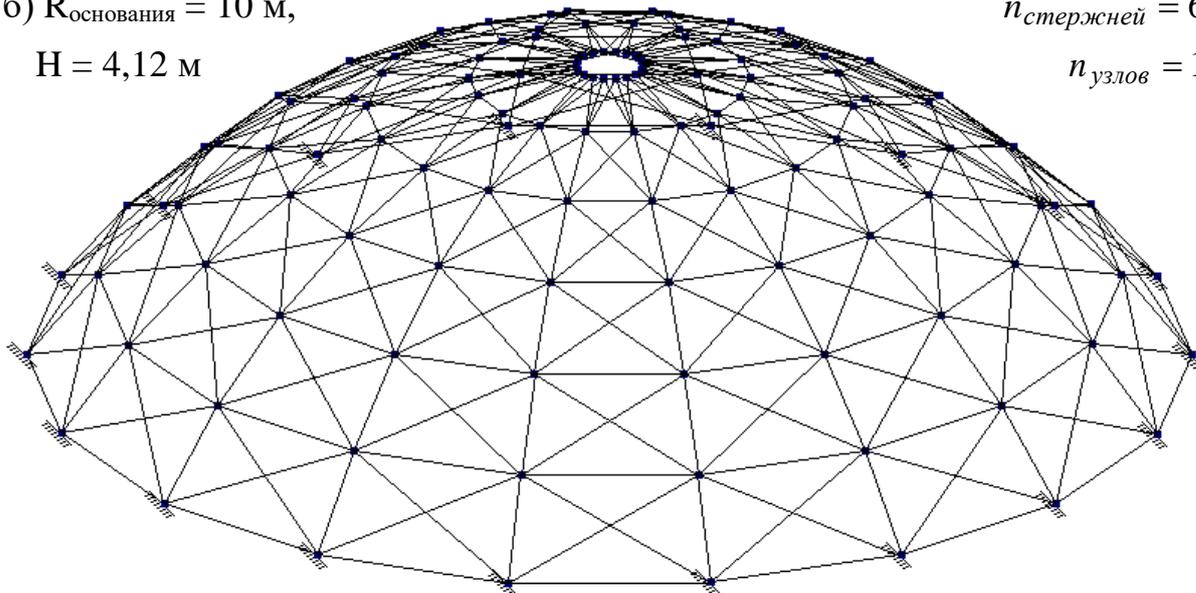


$n_{\text{узлов}} = 193$ ;

$n_{\text{стержней}} = 696$ ;

б)  $R_{\text{основания}} = 10 \text{ м}$ ,

$H = 4,12 \text{ м}$

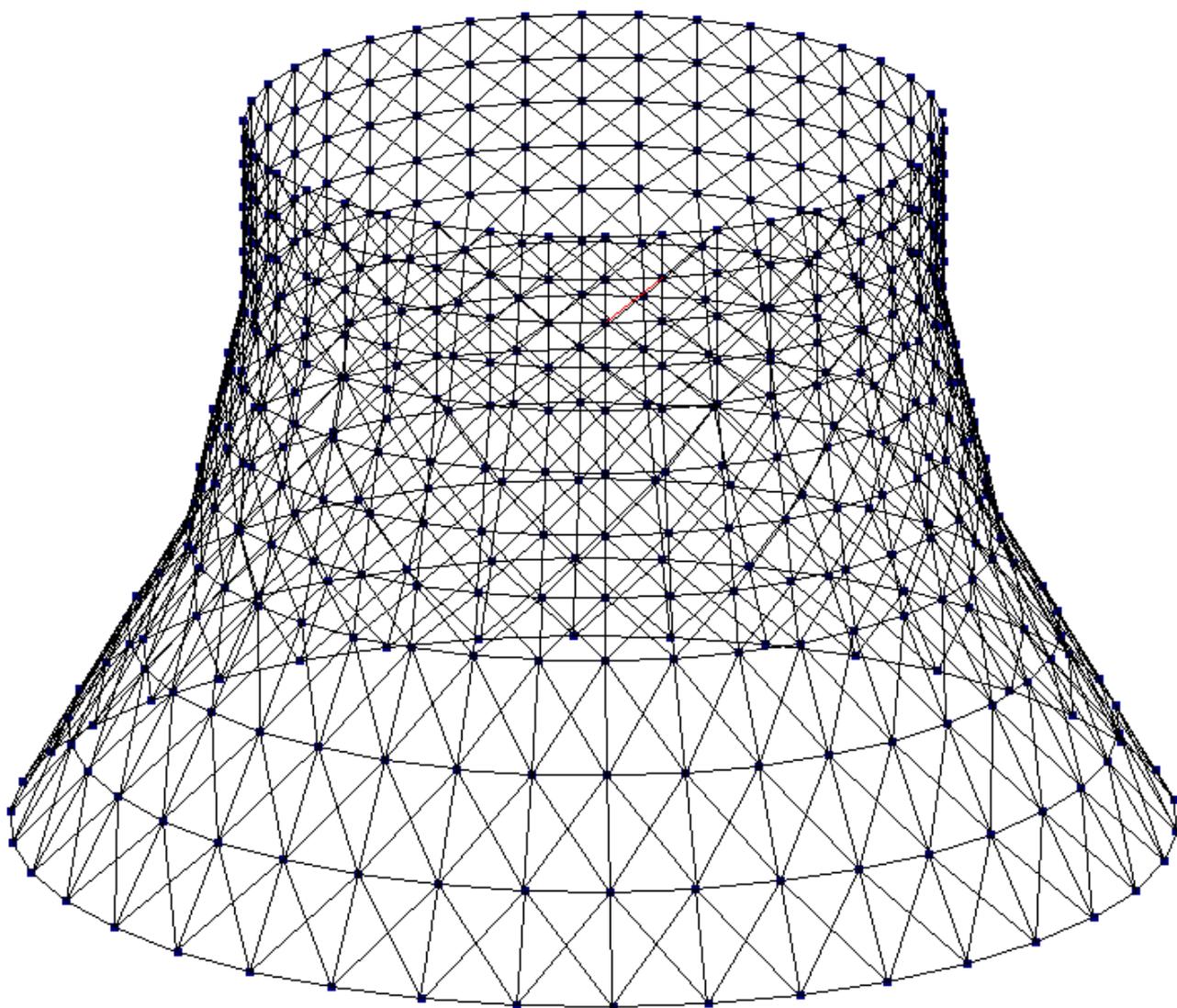


$n_{\text{стержней}} = 600$ ;

$n_{\text{узлов}} = 156$ .

Рис. 6.7. Расчетные схемы стержневых куполов

Достоинствами использования генераторов являются возможности легко менять размеры больших систем и их элементов, структуру систем, рассматривать различные варианты близких конструктивных схем сооружений. С помощью подобного генератора получены, например, купола, представленные на рис. 6.7. Этот генератор позволяет получить шесть различных вариантов решеток для подобных куполов, схемы которых представлены в работе [5].



$H = 12 \text{ м}$ ,  $R_{\text{основания}} = 10 \text{ м}$ ,  $r_{\text{верхн.}} = 6 \text{ м}$ ,  $n_{\text{узлов}} = 456$ ;  $n_{\text{стержней}} = 1372$ .

Рис. 6.8. Расчетная схема градирни

Разработанная программа “ORION” позволяет рассчитывать любые пространственные стержневые системы (см., например, рис. 6.7), включая различного рода структуры, покрытия, купола, на действие статических нагрузок, и позволяет анализировать напряженно-деформированное состояние этих соору-

жений при изменении их расчетных схем и других их параметров. На рис. 6.9, например, представлена расчетная модель опоры ЛЭП и схема ее деформирования (вид сбоку) при особом нагружении – при обрыве части проводов (в масштабе 1000:1). Программа очень удобна в учебно-исследовательском процессе, может применяться в расчетно-проектной практике.

Общий вид ряда окон программы “ORION” в процессе работы с ней при расчете структурного покрытия показан на рис. 6.10.

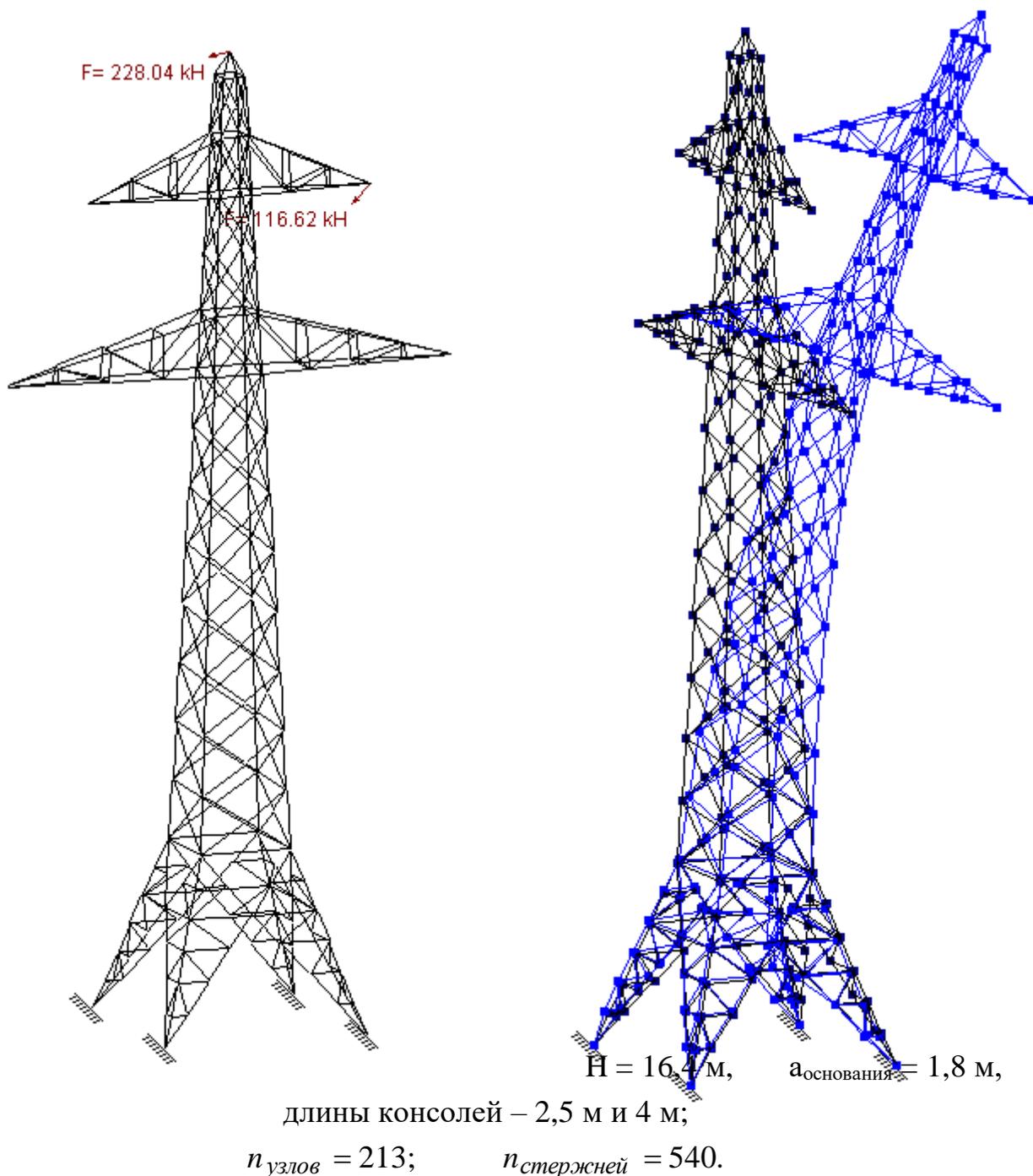


Рис. 6.9. Расчетная модель и схема деформирования опоры ЛЭП

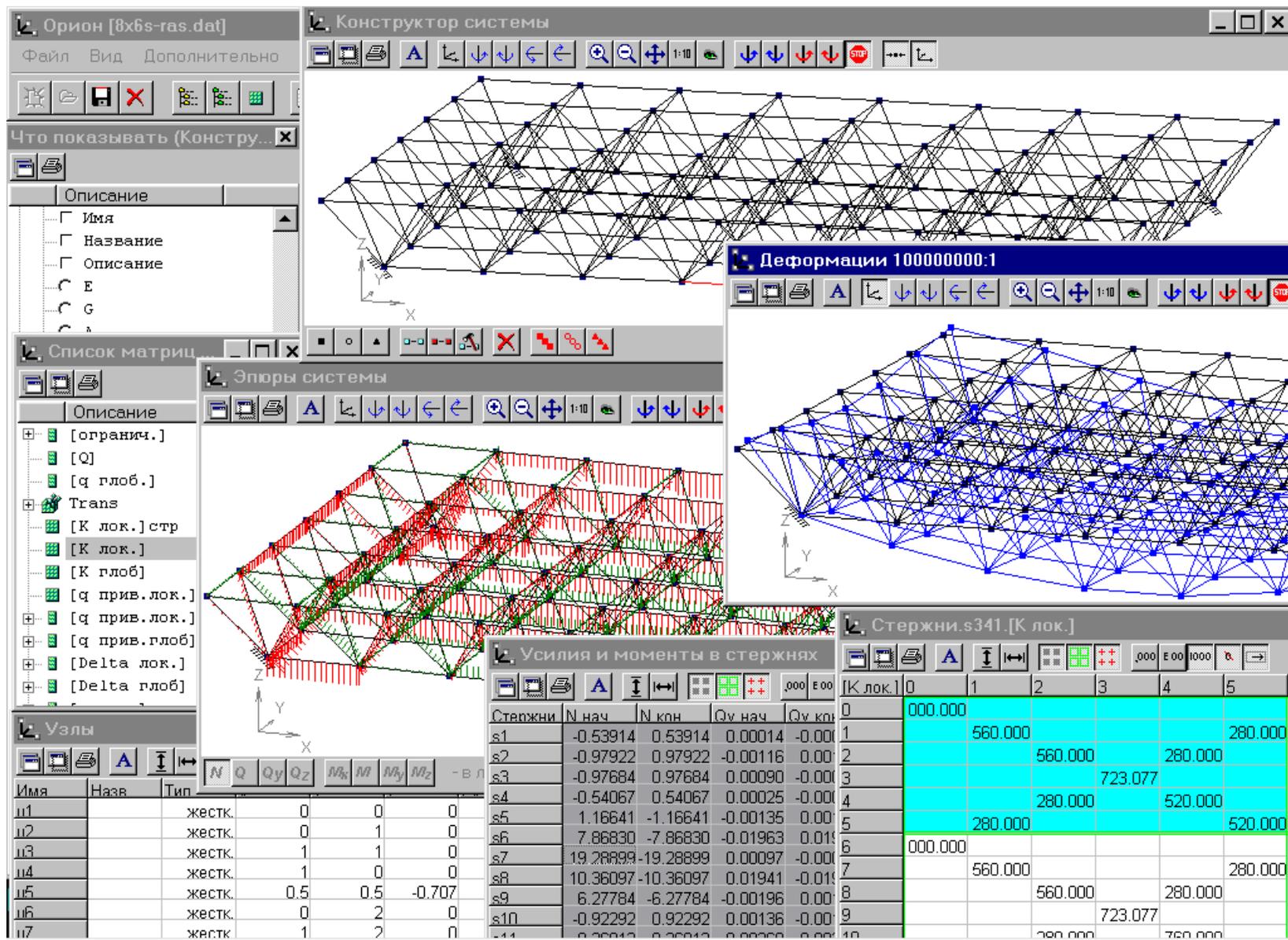


Рис. 6.10

## 7. ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ

### 7.1. Уравнения динамического равновесия

Здесь рассмотрим только системы с точечными массами. К таким расчетным схемам можно привести и системы с распределенными массами. Число возможных направлений независимых перемещений (колебаний) этих масс в системе называют степенью свободы системы с точки зрения динамики. Инерцией вращения масс будем пренебрегать. Точки приложения масс при формировании расчетной дискретной модели МКЭ для системы здесь необходимо принимать дополнительно в качестве узловых (если они не совпадают с обычными узлами конечно-элементной системы). При этом при формировании разрешающих уравнений МКЭ, рассматривая равновесие узлов (см. раздел 2.4), дополнительно к рассмотренным ранее действующим в узлах по каждому из направлений внешним силам, реакциям опор и реакциям от примыкающих стержней (рис. 2.9), нужно приложить на основе принципа Даламбера инерционные силы масс  $J$ :

$$-\{r\} + \{p\} + \{R\} + \{J\} = 0. \quad (7.1)$$

Такое уравнение (7.1) называют уравнением динамического равновесия системы. Силы инерции  $J$  будем считать положительными при их действии в направлениях осей общей системы координат.

Рассмотрим гармонические колебания, при которых перемещения узлов системы будут изменяться во времени (для  $i$ -того направления) по закону

$$\Delta_i(x, y, z, t) = \Delta_i(x, y, z) \cdot \sin(\theta t - \varepsilon), \quad (7.2)$$

где  $\theta$  – частота колебаний системы;  $\varepsilon$  – начальная фаза колебаний.

Тогда сила инерции для  $i$ -того направления определится выражением

$$J_i = -m_i \frac{\partial^2 \Delta_i}{\partial t^2} = -m_i \Delta_i(x, y, z) \cdot \frac{\partial^2 \sin(\theta t - \varepsilon)}{\partial t^2} = \Delta_i(x, y, z) \cdot \theta^2 m_i \sin(\theta t - \varepsilon).$$

В матричной форме с учетом всех возможных направлений перемещений узлов в системе получим

$$\{J\} = [M] \{\Delta\} \theta^2 \sin(\theta t - \varepsilon), \quad (7.3)$$

где  $\{\Delta\}$  – матрица перемещений узлов системы в общей системе координат, записывается по ранее рассмотренным принципам;  $[M]$  – матрица сосредоточенных в узлах масс, колеблющихся по направлениям возможных перемещений, имеющая вид диагональной матрицы

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}, \quad (7.4)$$

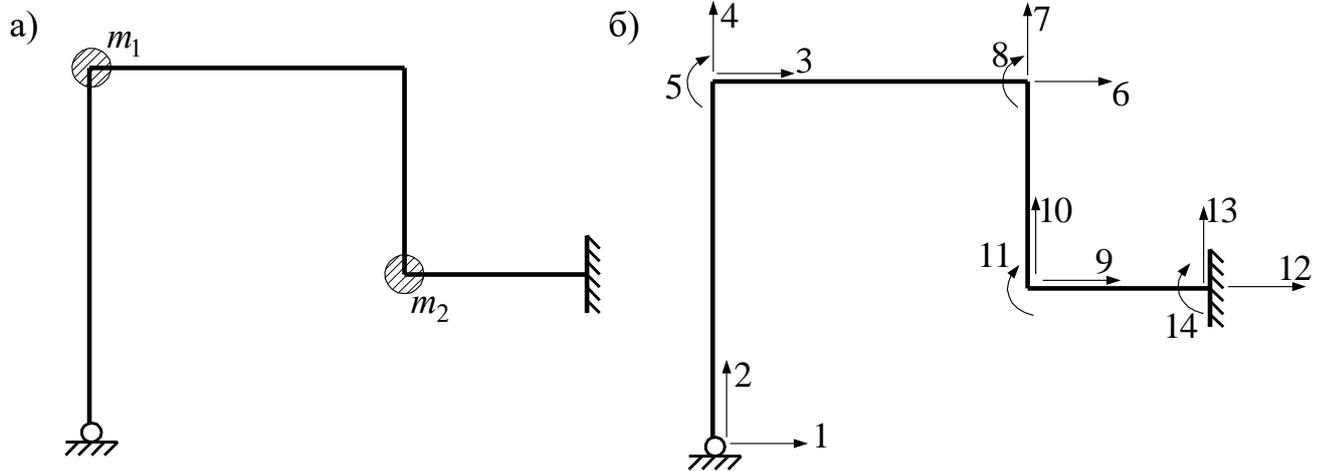


Рис. 7.1

в которой диагональные элементы принимаются равными либо величине массы, которая колеблется (или может колебаться) в направлении, номер которого совпадает с номером соответствующего элемента (строки и столбца), либо нулю, если в данном направлении массы в узле нет. Например, для рамы, представленной на рис. 7.1а, дискретная модель которой (рис. 7.1б) в целом имеет 14 возможных перемещений узлов (поворот в левом опорном узле как шарнирном отсутствует), матрица масс будет иметь вид

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.5)$$

Подставляя (7.3) в (7.1) и учитывая соотношения (2.19) и (7.2), получим

$$-[K]\{\Delta\}\sin(\theta t + \lambda) + [M]\{\Delta\}\theta^2 \sin(\theta t + \lambda) + \{P\} + \{R\} = 0.$$

При определении только узловых перемещений в этой системе уравнений можно опустить матрицу опорных реакций  $\{R\}$  (см. раздел 2.4), в результате, выполнив простые преобразования, систему уравнений динамического равновесия получим в виде

$$[[K] - [M] \cdot \theta^2] \cdot \{\Delta\} \cdot \sin(\theta t - \varepsilon) - \{P\} = 0, \quad (7.6)$$

## 7.2. Свободные колебания

При свободных колебаниях сооружений внешние нагрузки на них будут отсутствовать, а частоты собственных колебаний обычно обозначают через  $\omega$ . С учетом этого уравнение (7.6) запишется в виде

$$[[K] - [M] \cdot \omega^2] \cdot \{\Delta\} \cdot \sin(\omega t - \varepsilon) = 0. \quad (7.7)$$

Так как величина  $\sin(\omega t - \varepsilon)$  в процессе колебаний будет иметь и отличные от нулевого значения, то превращение выражения (7.7) в ноль возможно только в случае равенства нулю множителя при этой синусоиде

$$[[K] - [M] \cdot \omega^2] \cdot \{\Delta\} = 0.$$

Вычеркивая в этом выражении строки и столбцы, соответствующие нулевым перемещениям по направлениям опорных связей, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$[[K^*] - [M^*] \cdot \omega^2] \cdot \{\Delta^*\} = 0, \quad (7.8)$$

которая может иметь отличное от нулевого решение для  $\{\Delta^*\}$  только в случае равенства нулю определителя этой системы уравнений. Приравняв его нулю, получим уравнение для определения частот свободных колебаний (частотное уравнение)

$$|K_m| = \text{Det}[[K^*] - [M^*] \cdot \omega^2] = 0, \quad (7.9)$$

которое в развернутой форме может быть записано в виде

$$|K_m| = \begin{vmatrix} k_{11} - m_1 \omega^2 & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} - m_2 \omega^2 & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ k_{31} & & k_{33} - m_3 \omega^2 & \dots & k_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \dots & k_{nn} - m_n \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (7.10)$$

Раскрывая этот определитель, получим нелинейное уравнение относительно  $\omega^2$ ,

которое в общем случае решается специальными методами. Для систем с числом степеней свободы (с точки зрения динамики) не более двух решение уравнения (7.10) выполняется одним из известных способов.

Заметим, что в определителе (7.10) произведение  $m_i \omega^2$  вычитается только из тех диагональных элементов  $k_{ii}$ , для которых в соответствующем им ( $i$ -ом) направлении имеется масса  $m_i$ , которая может совершать в этом направлении колебания. В противном случае элемент  $k_{ii}$  остается самим собой, что соответствует нулевым значениям по диагонали в матрице масс – см. (7.4), (7.5).

Приведем несколько примеров определения частот свободных колебаний систем.

**Пример 1.** Рассмотрим балку с двумя одинаковыми массами  $m$ , представленную на рис. 7.2а. Расчетная дискретная модель ее показана на рис. 7.2б (узел 4 является шарнирным и поворот в нем отсутствует). Полная система разреша-

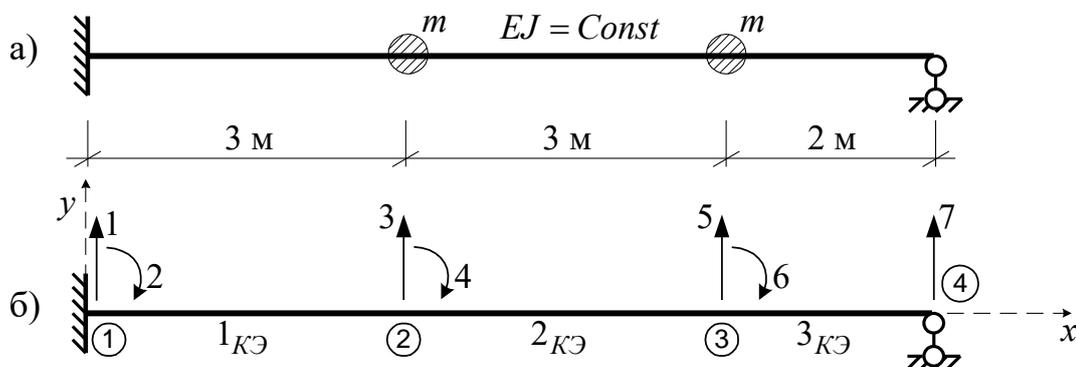


Рис. 7.2

ющих уравнений вида (7.7) со структурной матрицей жесткости представлена в (7.11). Кружочками в матрице жесткости отмечены элементы, которые остаются после вычеркивания строк и столбцов, соответствующих нулевым перемещениям. Конечные элементы здесь имеют балочный тип, матрицы жесткости

$$\begin{bmatrix}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 1 & \text{hatched} & \text{hatched} & \text{hatched} & & & \\
 2 & \text{hatched} & \text{hatched} & \text{hatched} & & & \\
 3 & \text{hatched} & \text{circles} & \text{circles} & \text{circles} & & \\
 4 & \text{hatched} & \text{circles} & \text{circles} & \text{circles} & & \\
 5 & & \text{circles} & \text{circles} & \text{hatched} & & \\
 6 & & & \text{circles} & \text{circles} & \text{hatched} & \\
 7 & & & & \text{circles} & \text{circles} & \text{hatched}
 \end{bmatrix}
 - \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \cdot \omega^2 \begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0, \quad (7.11)$$

где обозначено:  $[K_1] \rightarrow$  ;  $[K_2] \rightarrow$  ;  $[K_3] \rightarrow$  .

их, учитывая структуру системы, совпадают в общей и местной системах координат и определяются выражениями (2.21) и (2.22), в последнем из которых необходимо вычеркнуть 1, 4 и 6 строки и столбцы. В результате коэффициенты матрицы жесткости, отмеченные кружками, (7.11) будут равны:

$$\begin{aligned}
 k_{33} &= r_{33}^1 + r_{33}^2 = \frac{12EJ_1}{l_1^3} + \frac{12EJ_2}{l_2^3} = \left(\frac{4}{9} + \frac{4}{9}\right)EJ = \frac{8}{9}EJ; \\
 k_{34} &= k_{43} = r_{34}^1 + r_{34}^2 = \frac{6EJ_1}{l_1^2} - \frac{6EJ_2}{l_2^2} = 0; & k_{35} &= k_{53} = r_{35}^2 = -\frac{12EJ_2}{l_2^3} = -\frac{4}{9}EJ; \\
 k_{36} &= k_{63} = r_{36}^2 = -\frac{6EJ_2}{l_2^2} = -\frac{2}{3}EJ; \\
 k_{44} &= r_{44}^1 + r_{44}^2 = \frac{4EJ_1}{l_1} + \frac{4EJ_2}{l_2} = \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right)EJ = \frac{8}{3}EJ; & & (7.12) \\
 k_{45} &= k_{54} = r_{45}^2 = \frac{6EJ_2}{l_2^2} = \frac{2}{3}EJ; & k_{46} &= k_{64} = r_{46}^2 = \frac{2EJ_2}{l_2} = \frac{2}{3}EJ; \\
 k_{55} &= r_{55}^2 + r_{55}^3 = \frac{12EJ_2}{l_2^3} + \frac{3EJ_3}{l_3^3} = \frac{12EJ}{3^3} + \frac{3EJ}{2^3} = 0,8194EJ; \\
 k_{56} &= k_{65} = r_{56}^2 + r_{56}^3 = \frac{6EJ_2}{l_2^2} - \frac{3EJ_3}{l_3^2} = \frac{6EJ}{3^2} - \frac{3EJ}{2^2} = -0,0833EJ; \\
 k_{66} &= r_{66}^2 + r_{66}^3 = \frac{4EJ_2}{l_2} + \frac{3EJ_3}{l_3} = \frac{4EJ}{3} + \frac{3EJ}{2} = 2,8333EJ,
 \end{aligned}$$

а частотное уравнение (7.10) (после вынесения жесткости EJ и сокращения на нее) принимает вид

$$\begin{vmatrix}
 \frac{8}{9} - \frac{m\omega^2}{EJ} & 0 & -\frac{4}{9} & -\frac{2}{3} \\
 0 & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\
 -\frac{4}{9} & \frac{2}{3} & 0,8194 - \frac{m\omega^2}{EJ} & -0,0833 \\
 -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -0,0833 & 2,8333
 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель, получим квадратное уравнение

$$\lambda^2 - 1,352\lambda + 0,1975 = 0, \quad \text{где обозначено } \lambda = \frac{m\omega^2}{EJ},$$

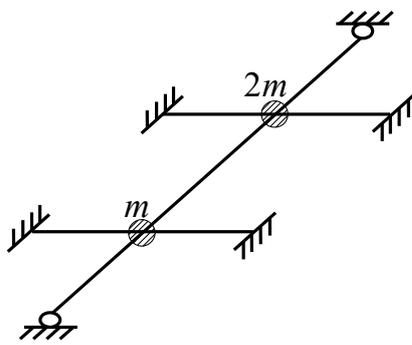
решая которое, найдем

$$\lambda = 0,6760 \pm \sqrt{0,457 - 0,1975} = 0,6760 \pm 0,5094;$$

$$\lambda_1 = 0,1666 = \frac{m\omega_1^2}{EJ}, \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 0,4082\sqrt{\frac{EJ}{m}}; \quad (7.13)$$

$$\lambda_2 = 1,1854 = \frac{m\omega_2^2}{EJ}, \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = 1,0888\sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

**Пример 2.** Рассмотрим систему перекрестных балок, рассчитанную ранее в разделе 3.4 (рис. 3.8), в четвертом и пятом узлах которой приложим массы



$m_1 = m$  и  $m_2 = 2m$  соответственно (рис. 7.3).

Система уравнений (7.8) с учетом матрицы жесткости сооружения, полученной в разделе 3.4, после вычеркивания строк и столбцов, соответствующих нулевым перемещениям, будет иметь вид:

Рис. 7.3

$$EJ \cdot \begin{bmatrix} 4,25 & 0 & -0,75 & 1,5 \\ 0 & 9,5 & -1,5 & 2 \\ -0,75 & -1,5 & 4,25 & 0 \\ 1,5 & 2 & 0 & 9,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \omega^2 \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_8 \\ \Delta_9 \\ \Delta_{11} \\ \Delta_{12} \end{Bmatrix} = 0.$$

Частотное уравнение (7.10) запишется в виде

$$\begin{vmatrix} 4,25 - \lambda & 0 & -0,75 & 1,5 \\ 0 & 9,5 & -1,5 & 2 \\ -0,75 & -1,5 & 4,25 - 2\lambda & 0 \\ 1,5 & 2 & 0 & 9,5 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{где } \lambda = \frac{m\omega^2}{EJ}.$$

Раскрывая определитель, получим

$$2\lambda^2 - 669\lambda + 959,437 = 0.$$

Решая это уравнение, найдем частоты свободных колебаний рассматриваемой системы перекрестных балок:

$$\lambda_1 = 1,4403, \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 1,2\sqrt{\frac{EJ}{m}};$$

$$\lambda_2 = 333,06, \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = 18,25\sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

### 7.3. Вынужденные колебания

Рассмотрим вынужденные установившиеся колебания под действием вибрационных нагрузок, изменяющихся с одной частотой  $\theta$  и имеющих одну начальную фазу колебаний. В этом случае матрица внешних нагрузок может быть представлена в виде

$$\{P(t)\} = \{P\} \sin(\theta t - \varepsilon), \quad (7.14)$$

где  $\{P\}$  – матрица амплитудных значений вибрационных нагрузок, в которой записываются значения этих нагрузок, если они действуют в соответствующих направлениях возможных перемещений, либо нули, если их нет.

Подставляя (7.14) в уравнение (7.6), будем иметь

$$[[K] - [M] \cdot \theta^2] \cdot \{\Delta\} \sin(\theta t - \varepsilon) = \{P\} \sin(\theta t - \varepsilon),$$

или, приравнивая множители при синусоидах с одинаковыми аргументами, получим уравнение динамического равновесия для амплитудных значений внешних гармонических нагрузок в виде

$$[[K] - [M] \cdot \theta^2] \cdot \{\Delta\} = \{P\}. \quad (7.15)$$

Обозначив  $[K_m] = [K] - [M] \cdot \theta^2$ , последнее уравнение представим в виде

$$[K_m] \cdot \{\Delta\} = \{P\}, \quad (7.15')$$

который совпадает с обычной формой записи разрешающих уравнений метода конечных элементов.

Решая уравнения (7.15), найдем амплитудные перемещения узлов системы с учетом динамического действия нагрузки. После этого можем определить усилия в конечных элементах (и соответственно в целом в системе), используя уже известные зависимости

$$\{r'_s\} = [K'_s] \cdot [T_{cs}] \cdot \{\Delta_s\}. \quad (7.16)$$

Например, при действии на систему на рис. 7.2 в узле 3 вибрационной нагрузки  $P \sin \theta t$  (рис. 7.3) с частотой  $\theta = 0,3 \sqrt{EJ/m}$ , которая составляет около 0,73 от основной частоты свободных колебаний системы  $\omega_1$  (7.13), уравнение динамического равновесия (7.15') после вычеркивания строк и столбцов, соответствующих нулевым перемещениям (по направлениям опорных связей), и с учетом (7.12) получим в виде:

$$EJ \cdot \begin{bmatrix} \frac{8}{9} - 0,3^2 & 0 & -\frac{4}{9} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{9} & \frac{2}{3} & 0,8194 - 0,3^2 & -0,0833 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -0,0833 & 2,8333 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (7.17)$$

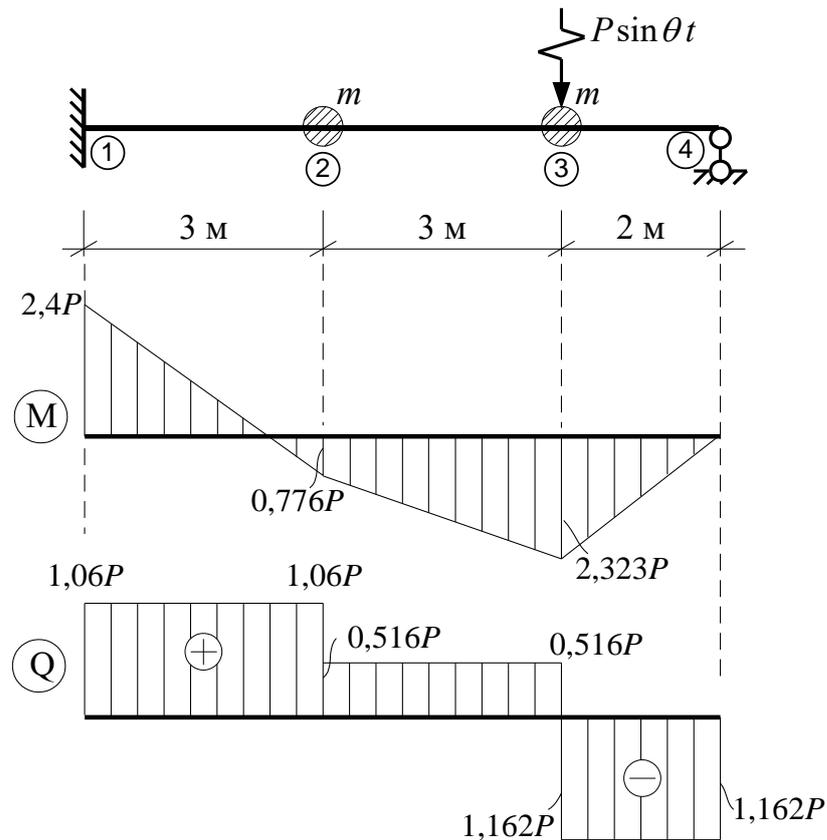


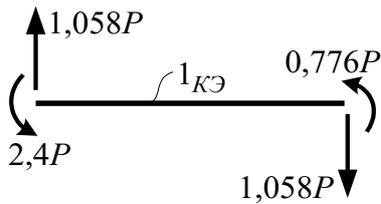
Рис. 7.3

Решение этой системы уравнений дает значения перемещений узлов системы:

$$\Delta_3 = -\frac{6,0348P}{EJ}; \quad \Delta_4 = \frac{2,4354P}{EJ}; \quad \Delta_5 = -\frac{7,5267P}{EJ}; \quad \Delta_6 = -\frac{2,2144P}{EJ},$$

используя которые, по формуле (7.16) получим усилия во всех КЭ балки. Вычисление этих усилий для 1-го КЭ имеет вид:

$$\{r_1'\} = [K_1'] \cdot \{\Delta_1\} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{9} & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \frac{P}{EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6,0348 \\ 2,4354 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,058P \\ -2,4P \\ -1,058P \\ -0,776P \end{Bmatrix}.$$



Для остальных КЭ расчет усилий выполняется аналогично. Окончательные эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для рассматриваемой системы с учетом динамического действия нагрузки показаны на рис. 7.3.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы / Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1983. – 488 с.
2. Борисевич А.А. Общие уравнения строительной механики и оптимальное проектирование конструкций. – Мн.: Дизайн ПРО, 1998. – 144с.
3. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы /Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 428с.
4. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1986. – 608 с.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 544 с.
6. Игнатюк В.И., Богомолов Д.В. О формировании разрешающих уравнений МКЭ в расчетах плоских стержневых систем с учетом упругой податливости узловых соединений // Вестник БГТУ. – 2003. – №1(19): Строительство и архитектура. – С. 70 – 74.
7. Игнатюк В.И., Бондарук Н.С. Автоматизированная система расчета напряженно-деформированного состояния пространственных стержневых сооружений на базе МКЭ // Вестник БГТУ. – 2001. – №1(7): Строительство и архитектура. – С. 22 – 26.
8. Игнатюк В.И., Бондарук Н.С. Расчет на ПЭВМ пространственных стержневых систем на базе МКЭ (Программа “ORION”) // Актуальные проблемы расчета зданий, конструкций и их частей: теория и практика: Материалы международной научно-технической конференции, Минск, 21-22 марта 2002г. – Мн.: УП ”Технопринт”, 2002. – С. 81 – 87.
9. Игнатюк В.И., Гойшик И.М. Об автоматизации расчета усилий в плоских стержневых системах на современных ПЭВМ на базе МКЭ // Проблемы и перспективы современных строительных конструкций и технологий: Труды XXV научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава, аспирантов и студентов / БПИ. – Брест, 1998. – С. 99 – 102.
10. Ильин В.П., Карпов В.В., Масленников А.М. Численные методы решения задач строительной механики: Справочное пособие. – Мн.: Вышэйшая школа, 1990. – 349 с.
11. Караманский Т.Д. Численные методы строительной механики /Пер. с болг. – М.: Стройиздат, 1981. – 434 с.

12. Киселев В.А. Строительная механика. Общий курс. – М.: Стройиздат, 1986. – 520 с.
13. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Издательство АСВ, 1996. – 542 с.
14. Масленников А.М. Расчет строительных конструкций численными методами: Учебное пособие. – Л.: ЛГУ, 1987. – 224 с.
15. Металлические конструкции. Специальные конструкции и сооружения. – М.: Высшая школа, 1999. – 544 с.
16. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 342 с.
17. Расчет плоских стержневых систем методом конечных элементов с использованием ЭВМ: Методические указания по строительной механике для студентов строительных специальностей / В.И. Игнатюк; Брестский политехнический институт. – Брест, 1990. – 42с.
18. Ржаницин А.Р. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.
19. Розин Л.А. Стержневые системы как системы конечных элементов. – Л.,1976.
20. Розин Л.А. Константинов И.А. Смелов В.А. Расчет статически неопределимых стержневых систем: Учебное пособие. – Л.: ЛГУ, 1987. – 80 с.
21. Справочник по строительной механике корабля: В 3-х т. / Г.В. Бойцов, О.М. Палий, В.А. Постнов, В.С. Чувиковский. – Л.: Судостроение, 1982. – Т.2: Пластины. Теория упругости, пластичности и ползучести. Численные методы. – 464 с.
22. Строительная механика / Под ред. А.В. Даркова. – М.: Высш. школа, 1976. – 600 с.
23. Строительная механика летательных аппаратов: Учебник / И.Ф. Образцов, Л.А. Булычев, В.В. Васильев и др.; Под ред. И.Ф. Образцова. – М.: Машиностроение, 1986. – 536 с.
24. Трущев А.Г. Пространственные металлические конструкции: Учеб. пособие для вузов. – М.: Стройиздат, 1983. – 216 с.
25. Усюкин В.И. Строительная механика конструкций космической техники. – М.: Машиностроение, 1988. – 392 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....	3
<b>1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ И ПОДХОДЫ В МКЭ</b> .....	5
1.1. Основные положения и принципы .....	5
1.2. Основные этапы расчета .....	8
1.3. Расчетная дискретная модель системы .....	10
1.4. Аппроксимация перемещений .....	13
<b>2. РАСЧЕТ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ</b> .....	17
2.1. Расчетная дискретная модель .....	17
2.2. Напряженно-деформированное состояние плоского стержневого конечного элемента .....	19
2.3. Соотношение между усилиями и перемещениями конечного элемента. Матрица жесткости КЭ .....	23
2.4. Разрешающие уравнения МКЭ .....	27
2.5. Преобразование координат .....	36
2.6. Формирование матрицы жесткости системы .....	42
2.7. Усилия и перемещения конечного элемента .....	47
2.8. Общая схема (порядок) расчета МКЭ .....	49
2.9. Пример расчета .....	50
2.10. Особенности расчета МКЭ балок .....	56
2.11. Особенности расчета МКЭ плоских ферм .....	61
2.12. Расчет МКЭ рам без учета продольных деформаций .....	66
2.13. Учет упругой податливости присоединения конечных элементов к узлам .....	72
2.14. Программа “SIRIUS” .....	83
<b>3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РАСЧЕТУ СИСТЕМ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК</b> .....	87
3.1. Общие замечания .....	87
3.2. Особенности использования МКЭ для СПБ .....	87
3.3. Преобразование координат .....	92
3.4. Примеры расчета систем перекрестных балок .....	96

<b>4. РАСЧЕТ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ</b>	
<b>ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФЕРМЕННЫХ СТРУКТУР</b> .....	107
4.1. Особенности применения МКЭ .....	107
4.2. Примеры расчета .....	113
<b>5. ОСНОВЫ РАСЧЕТА ПРОИЗВОЛЬНЫХ</b>	
<b>ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ</b> .....	122
5.1. Особенности теории расчета .....	122
5.2. Пример расчета пространственной стержневой системы .....	140
<b>6. ПРОГРАММА “ORION”</b> .....	149
<b>7. ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ</b> .....	159
7.1. Уравнение динамического равновесия .....	159
7.2. Свободные колебания .....	161
7.3. Вынужденные колебания .....	165
<b>ЛИТЕРАТУРА</b> .....	168