СЕКЦИЯ 4. ИННОВАЦИОННЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРЕПОДАВАНИИ ДИСЦИПЛИН ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

А.И. ЖУК

О ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T=[0;a]\subset R$:

$$\dot{x}^i(t)=\sum_{j=1}^{q} f^{ij}(x(t))\dot{L}^j(t),\ i=\overline{1,p} \tag{1}$$

с начальным условием $x(0)=x_0$, где f^{ij} – липшицевы функции, $x(t)=[x^1(t),...,x^p(t)]$, а $L^j(t)$ – функции ограниченной вариации на отрезке T. Задаче (1) поставим в соответствие следующую конечно-разностную задачу с осреднением

$$\begin{gathered} x_n^i(t+h_n)-x_n^i(t)=\sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(x_n(t))[L_n^j(t+h_n)-L_n^j(t)],\quad i=\overline{1,p} \\ x_n(t)\big|_{[0;h_n)}=x_{n0}(t). \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $L^j{}_n(t)=(L^j*\rho_n)(t)=\int\limits_0^{1/n} L^j(t+s)\rho_n(s)ds,$ где $\rho_n(t)=np(nt),$ $\rho\in C^\infty(R),$ $\rho\geq 0,$ $su\rho\rho(\rho)\subseteq[0;1],$ $\int\limits_0^1\rho(s)ds=1,$ $f^{ij}{}_n=f^{ij}*\tilde{\rho}_n,$ $\tilde{\rho}_n(x_1,...,x_p)=n^p\tilde{\rho}(nx_1,...,nx_p),$ а $\tilde{\rho}\in C^\infty(R^p),$ $\tilde{\rho}\geq 0,$ $\int\limits_{[0;1]^p}\tilde{\rho}(x_1,...,x_p)dx_1...dx_p=1,$ $su\rho\rho(\tilde{\rho})\subset[0;1]^p.$ Аналогичное уравнение в одномерном случае было рассмотрено в [1].

Случай Ито. Для описания предельного поведения решения задачи (2) рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t)=x_0^i+\sum_{j=1}^{q}\int\limits_0^{t+} f^{ij}(x(s-))dL^j(s),\ i=\overline{1,p}. \tag{3}$$

Теорема 1. [2] Пусть f^{ij} удовлетворяют условию Липшица и ограничены, $L^j(t)$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при $n\to\infty$, $h_n\to 0$ так, что $1/n=o(h_n)$ для всех $t\in T$ решение $x_n(t)$ задачи Коши (2) сходится к решению системы уравнений (3), если для любого $t\in T$ выполняется $\left|x_{n0}(\tau_t)-x_0\right|\to 0.$

В случае Стратоновича для описания предельного поведения задачи (2) рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t)=x_0^i+\sum_{j=1}^{q}\int\limits_0^{t} f^{ij}(x(s))dL^{jc}(s)+\sum_{\mu_r\leq t} S^i(x(\mu_r-),\Delta L(\mu_r)), \tag{4}$$

где $S^i(x,u)=\varphi^i(1,x,u)-\varphi^i(0,x,u)$, а $\varphi^i(t,x,u)$ находится из уравнения $\varphi^i(t,x,u)=x^i+\sum_{j=1}^{q}u^j\int_0^t f^{ij}(\varphi(s,x,u))ds,\ i=\overline{1,p},$ $L^{jc}(t)$ – непрерывная, а $L^{jd}(t)$ – разрывная составляющие функции $L^j(t)$, μ_r – точки разрыва функции $L(t)$, $\Delta L(\mu_r)=L^d(\mu_r+)-L^d(\mu_r-)$ – величина скачка.

Теорема 2. [3] Пусть f^{ij} удовлетворяют условию Липшица и ограничены. $L^j(t)-$ непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при $n\to\infty$, $h_n\to 0$ так, что $h_n=o(1/n)$ решение $x_n(t)$ задачи Коши (2) сходится к решению системы уравнений (4) для всех $t\in T$, если $\left|x_{n0}(\tau_t)-x_0\right|\to 0$ для любого $t\in T$.

Смешанный случай. В качестве представителей рассмотрим следующие функции: $L^j{}_n(t)=(L^j*\rho^j{}_n)(t)=\int_0^{1/\gamma^j(n)}L^j(t+s)\rho^j{}_n(s)ds,$ где $\rho^j{}_n(t)=\gamma^j(n)p^j(\gamma^j(n)t),\quad \rho^j\ge 0,\ su\rho\rho(\rho^j)\subseteq[0;1],\ \int_0^1\rho^j(s)ds=1,$ а $f^{ij}{}_n=f^{ij}*\tilde{\rho}_n.$

Для описания предельного поведения решения задачи (2) рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t)=x_0^i+\sum_{j=1}^{q}\int_0^t f^{ij}(x(s))dL^{jc}(s)+\sum_{\mu_r\le t}S^i(x(\mu_r-),\Delta L(\mu_r)),\qquad(5)$$

где $S^i(x,u)=\varphi^i(1,x,u)-\varphi^i(0,x,u)$, а $\varphi^i(t,x,u)$ находится из уравнения $\varphi^i(t,x,u)=x^i+\sum_{j=1}^{b}u^j\int_0^t f^{ij}(\varphi(s-,x,u))dH(s-1)+\sum_{j=b+1}^{q}u^j\int_0^t f^{ij}(\varphi(s,x,u))ds,\quad i=\overline{1,p},\quad H(s)$ – функция Хэвисайда.

Теорема 3. Пусть f^{ij} удовлетворяют условию Липшица и ограничены, $L^j(t)-$ непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при $n\to\infty$, $h_n\to 0,\quad \gamma^j(n)\to\infty$ для $j=\overline{1,b}$ $\gamma^j(n)h_n\to\infty$ и для $j=\overline{b+1,q}$ $\gamma^j(n)h_n\to 0$, решение $x_n(t)$ задачи Коши (2) сходится к решению системы уравнений (5) в $L^1(T)$, если $\int\left|x_{n0}(\tau_t)-x_0\right|dt\to 0$.

1. Ковальчук, А.Н. Об аппроксимации дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами конечно-разностными уравнениями с осреднением / А.Н. Ковальчук, В.Г. Новохрост, О.Л. Яблонский // Известия вузов. Математиика. – 2005. – №3. – С. 23 – 31.

2. Жук, А.И. Неавтономные системы дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных функций / А.И. Жук, О.Л. Яблонский // Труды института математики. – 2011. – Т.19, № 2. – С. 43 – 51.

3. Жук, А.И. Системы дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных функций / А.И. Жук, О.Л. Яблонский // Известия НАН Беларуси. Сер. физ. мат. наук. – 2011. – №1. – С. 12 – 16.