МАТЭМАТЫКА

УДК 512.542

***Т.А. Артюшеня*[1]*, А.А. Трофимук*[2]**

[1]*ассистент каф. высшей математики*
Брестского государственного технического университета
[2]*канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии*
и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: modelmath@brsu.brest.by

РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ СО СВОБОДНЫМИ ОТ N-х СТЕПЕНЕЙ ИНДЕКСАМИ P-СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В СВОИХ НОРМАЛЬНЫХ ЗАМЫКАНИЯХ

Рассматриваются конечные группы. Пусть $k_p(G)=\max\limits_{H\ \mathrm{P}-sn\ G}\left\{j \mid p^j \,\|\, \left|H^G:H\right|\right\}$ *и* $k(G)=\max\limits_p k_p(G)$, *где* P-sn G *– обозначение* P*-субнормальной подгруппы в группе* G. *Для разрешимой группы* G *установлена зависимость производной длины и нильпотентной длины от значений* $k(G)$. *Уточнены данные оценки инвариантов для малых значений* $k(G)$. *В частности, для разрешимой группы* G *с* $k(G)\le 2$ *нильпотентная длина не превышает 4, а p-длина не превышает 1 для всех p>3, 2-длина не выше 2, 3-длина не выше 2.*

Введение

А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева и В.Н. Тютянов в [1] предложили следующее определение: пусть Р – множество простых чисел. Подгруппа H группы G называется P-субнормальной в G, если либо $H=G$, либо существует цепь подгрупп $H=H_0\subset H_1\subset\ldots\subset H_{n-1}\subset H_n=G$ такая, что $|H_{i+1}:H_i|$ – простое число для любого $i=0,1,\ldots,n-1$. Обозначается H – P-sn G.

Возникает задача изучения групп, у которых каждая подгруппа из заданной системы подгрупп является P-субнормальной.

Так, в работе [2] Л.С. Казарин описал неабелевы композиционные факторы конечных групп, у которых единичная подгруппа является P-субнормальной в группе G. Группы, у которых P-субнормальны все максимальные подгруппы, являются сверхразрешимыми. Группы с P-субнормальными 2-максимальными подгруппами, силовскими подгруппами, примарными циклическими подгруппами, подгруппами Шмидта исследованы в работах [3–6].

Мы продолжим исследование в данном направлении. Для формулировки основного результата введем следующую функцию: пусть p – простое число. Для натурального числа n запись $p^j \,\|\, n$ означает, что p^j делит n, но p^{j+1} не делит n. Для группы G и простого числа p мы полагаем:

$$k_p(G)=\max_{H\ \mathrm{P}-sn\ G}\left\{j \mid p^j \,\|\, \left|H^G:H\right|\right\};$$
$$k(G)=\max_p k_p(G).$$

Теорема 1.

Пусть G – разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если $k_p(G)=0$, то $l_p(G)\le 1$; если $k_p(G)=1$, то $l_p(G)\le 2$; если $k_p(G)\ge 2$, то $l_p(G)\le k_p(G)$.

2. Производная длина группы $G/\Phi(G)$ и нильпотентная длина группы G не превышает $4+k(G)$.

Очевидно, что теорема 1 дает неточные оценки нильпотентной и p-длины при малых значениях $k(G)$. Эти оценки уточняются в теореме 2 и следствии 2.

Если $k(G)=0$, то, по лемме 4, группа G является сверхразрешимой группой. Поэтому коммутант группы G нильпотентен, и нильпотентная длина группы G не выше 2, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 2.

Теорема 2.

Пусть G – разрешимая группа и $k(G)\le 2$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $n(G)\le 4$;

2) $d(G/\Phi(G))\le 6$;

3) $l_p(G)\le 1$, если $p>3$, и $l_2(G)\le 2$, $l_3(G)\le 2$.

Напомним, что группа G называется A_4-свободной, если она не содержит секций, изоморфных знакопеременной группе A_4.

Следствие 1.

Если G – разрешима, A_4-свободная группа и $k(G)\le 2$, то $d(G/\Phi(G))\le 5$.

Следствие 2.

Если G – разрешимая группа и $k(G)\le 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $n(G)\le 4$;

2) $d(G/\Phi(G))\le 5$.

Следствие 3.

Если G – разрешимая, A_4-свободная группа и $k(G)\le 1$, то $d(G/\Phi(G))\le 3$ и $n(G)\le 3$.

Пример.

При помощи компьютерной системы GAP построена группа $G=[E_{3^2}]GL(2,3)$ порядка 432 с единичной подгруппой Фраттини. Здесь E_{3^2} – элементарная абелева группа порядка 3^2. Легко проверить, что $k(G)\le 1$. Кроме того G имеет производную длину, равную 5, нильпотентную длину, равную 4, 2- и 3-длину, равную 2. Таким образом, оценки инвариантов, полученные в Следствии 2, являются точными.

1. Вспомогательные результаты

Напомним некоторые понятия, используемые в данной работе.

Через $\pi(G)$ обозначается множество всех различных простых делителей порядка группы G; $N\cdot\lhd G$ – N минимальная нормальная подгруппа группы G, $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа группы G для некоторого простого числа p; G_p – силовская p-подгруппа группы G; $G_{p'}$ – дополнение к силовской p-подгруппе в группе G; т.е. холлова p'-подгруппа группы G; $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G; $n(G)$ – нильпотентная длина группы G; $d(G)$ – производная длина группы G, $l_p(G)$ – p-длина группы G.

Лемма 1.

Если $H \le G$ и $N \lhd G$, тогда $(HN/N)^{G/N} = H^G N/N$ и $\left|H^G : H\right| = \left|(HN/N)^{G/N} : HN/N\right|\left|H^G \cap N : H \cap N\right|$. Более того, если $N \le H$, тогда $\left|H^G : H\right| = \left|(H/N)^{G/N} : (H/N)\right|$.

Лемма 2 ([1, лемма 2.1]).

Пусть H – подгруппа группы G, $N \lhd G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если H Р-sn G, то $(H \cap N)$ Р-sn N и HN/N Р-sn G/N.
2. Если $N \subseteq H$ и H/N Р-sn G/N, то H Р-sn G.
3. Если HN_i Р-sn G, $N_i \lhd G$, $i = 1,2$, то $(HN_1 \cap HN_2)$ Р-sn G.
4. Если H Р-sn K и K Р-sn G, то H Р-sn G.
5. Если H Р-sn G, то H^x Р-sn G для любого $x \in G$.

Лемма 3.

Пусть G группа и $N \lhd G$. Тогда для каждого $p \in \pi(G)$ выполняются следующие условия:

1) $k_p(G/N) \le k_p(G)$ и $k(G/N) \le k(G)$;

2) $k_p(N) \le k_p(G)$ и $k(N) \le k(G)$;

3) если K Р-sn G, то $k_p(K) \le k_p(G)$ и $k(K) \le k(G)$.

Доказательство.

1. Пусть H/N Р-sn G/N, для которой $p^{k_p(G/N)} \,||\, \left|(H/N)^{G/N} : (H/N)\right|$. Тогда, по лемме 2 (п. 2), H Р-sn G. По лемме 1, $\left|(H/N)^{G/N} : H/N\right| = \left|H^G : H\right|$, следовательно, $p^{k_p(G/N)} \,||\, \left|H^G : H\right|$. Так как $p^{k_p(G/N)}$ делит $\left|(H/N)^{G/N} : H/N\right|$, то $p^{k_p(G)}$ делится на $p^{k_p(G/N)}$. Следовательно, $k_p(G/N) \le k_p(G)$ и $k(G/N) \le k(G)$.

2. Пусть K Р-sn N, для которой $p^{k_p(N)} \,||\, \left|K^N : K\right|$. В виду того, что $N \lhd G$, то N Р-sn G. По лемме 2 (п. 4), K Р-sn G. Так как $\left|K^G : K\right| = \left|K^G : K^N\right|\left|K^N : K\right|$ и $p^{k_p(N)}$ делит $\left|K^N : K\right|$, то $p^{k_p(N)}$ делит $\left|K^G : K\right|$. Следовательно, $p^{k_p(G)}$ делится на $p^{k_p(N)}$. Таким образом, $k_p(N) \le k_p(G)$ и $k(N) \le k(G)$.

3. Пусть H Р-sn K, для которой $p^{k_p(K)} \,||\, \left|H^K : H\right|$. По лемме 2 (п. 4), H Р-sn G. Так как $\left|H^G : H\right| = \left|H^G : H^K\right|\left|H^K : H\right|$, то $p^{k_p(K)}$ делит $\left|H^G : H\right|$. По определению $k_p(G)$ будет следовать, что $p^{k_p(G)}$ делится на $p^{k_p(K)}$. Поэтому $k_p(G) \ge k_p(K)$. Очевидно, что $k(K) \le k(G)$.

Лемма доказана.

Лемма 4.

Если $N \cdot \lhd G$ и $|N| = p^n$, тогда $n \le 1 + k_p(G)$.

Доказательство.

Пусть $K-$ подгруппа простого порядка группы N. Так как N p-группа, то $N-$ нильпотентная группа. По теореме 3.13 п. 5 [7], всякая подгруппа из N будет субнормальной, а следовательно, P-субнормальной в N.

Таким образом, K P-*sn* N. Так как $N \lhd G$, то N P-*sn* G. По лемме 2 (п. 4), K P-*sn* G и $K^G = N$. Тогда $p^{1+k_p(G)}$ не делит $|K^G : K| = p^{n-1}$; таким образом, $n - 1 < 1 + k_p(G)$. Отсюда следует, что $n \le 1 + k_p(G)$.

Лемма доказана.

Лемма 5 ([7, лемма 4.21, теорема 4.24]).

1. $\Phi(G) \le F(G)$; если G разрешима и $G \ne 1$, то $\Phi(G) \ne F(G)$.

2. $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$.

3. Если $N \cdot \lhd G$, то $F(G) \le G_G(N)$; если, кроме того, N абелева, то $N \le Z(F(G))$.

4. Фактор-группа $F(G)/\Phi(G)$ есть прямое произведение абелевых минимальных нормальных подгрупп группы $G/\Phi(G)$.

5. В разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга есть прямое произведение минимальных нормальных подгрупп.

Лемма 6 ([8, лемма 12]).

Пусть $H-$ неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n, p)$. Тогда:

1) если $n = 2$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$;

2) если $n = 3$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^5$;

3) если $n \in \{2,3\}$, $p > 3$ и $O_p(H) = 1$, то $H - p'$-группа.

Лемма 7 ([8, лемма 7]).

Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^k$, когда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$.

Лемма 8 ([7, теорема 2.8]).

Пусть $G-$ группа и $H-$ ее подгруппа. Тогда фактор-группа $N_G(H)/C_G(G)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов Aut H.

Лемма 9 ([9, теорема VI.6.4]).

Пусть $G-$ p-разрешимая группа такая, что $l_p(G/K) \le k$ для всех неединичных нормальных подгрупп K группы G, но $l_p(G) > k$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$;

2) в группе G максимальная p-нильпотентная нормальная подгруппа $F_p(G)$ является элементарной абелевой p-группой;

3) $F_p(G) -$ единственная минимальная подгруппа группы G, имеющая добавление, т.е. $G = [F_p(G)]M$;

4) $C_G(F_p(G)) = F_p(G)$.

Лемма 10 ([9, теорема VI.6.4]).

Пусть G p-разрешимая группа. Тогда:

1) если N – нормальная подгруппа группы G, то $l_p(G/N) \le l_\rho(G)$;

2) если H – подгруппа группы G, то $l_p(H) \le l_\rho(G)$;

3) если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы группы G, то $l_p(N_1 \cdot N_2) = Max\{l_p(N_1), l_p(N_2)\}$; в частности, $l_p(N_1 \times N_2) = Max\{l_p(N_1), l_p(N_2)\}$;

4) если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы группы G, то $l_p(G/(N_1 \cap N_2)) = Max\{l_p(G/N_1), l_p(G/N_2)\}$;

5) $l_p(G/\Phi(G)) = l_p(G)$.

Лемма 11 ([8, лемма 13]).

1. Если $H-$ разрешимая A_4-свободная подгруппа группы $GL(2,p)$, то H метабелева. Если $H-$ разрешимая A_4-свободная неприводимая подгруппа группы $GL(3,p)$, то $H \in \mathfrak{A}^4$.

2. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1.

1. Пусть $K/N \cdot \lhd G/N$ такая, что $|K/N| = p^{r_p(G)}$. По лемме 4, $r_p(G) \le 1 + k_p(G/N) \le 1 + k_p(G)$. Если $k_p(G) = 0$, то $r_p(G) \le 1$ и G p-сверхразрешима. Поэтому $l_p(G) \le 1$. Если $k_p(G) = 1$, то $r_p(G) \le 2$ и, по теореме 4 [8], $l_p(G) \le 2$. Если $k_p(G) \ge 2$, то $r_p(G) \le 2$ или $r_p(G) \ge 3$. В первом случае, по теореме 4 [8], $l_p(G) \le 2$, а во втором, по следствию 1 [8], $l_p(G) \le r_p(G) - 1$. Таким образом, $l_p(G) \le k_p(G)$.

2. Покажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{3+k(G)}$. По лемме 3 п. 1, условие теоремы наследуют все фактор-группы. Тогда по индукции в группе G подгруппа Фраттини единичная и существует минимальная нормальная подгруппа N, совпадающая с подгруппой Фиттинга.

Пусть $|N| = p^\alpha$. Тогда фактор-группа G/N изоморфна неприводимой подгруппе группы $GL(\alpha, p)$. Тогда, по определению функции $\rho(n)$, фактор-группа $G/N \in \mathfrak{A}^{\rho(\alpha)}$. Так как $\rho(n) \le n+2$, то $G/N \in \mathfrak{A}^{\alpha+2}$. По лемме 4, $\alpha \le 1 + k_p(G)$. Тогда $G/N \in \mathfrak{A}^{k_p(G)+3}$.

В общем случае $G/N \in \mathfrak{A}^{k(G)+3}$ и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{3+k(G)}$. По лемме 7, $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^{4+k(G)}$. Тогда $d(G/\Phi(G)) \le 4 + k(G)$. Так как $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{3+k(G)}$, то $n(G) \le 4 + k(G)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.

1–2. Индукцией по порядку группы G покажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathfrak{A}^5 \cap \mathfrak{N}^4$.

По лемме 3 п. 1, условие теоремы наследуются всеми фактор-группами группы G.

Пусть $\Phi(G) \ne 1$, тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Ввиду того, что $\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией, $G \in \mathfrak{F}$. В дальнейшем считаем, что $\Phi(G) = 1$.

Покажем, что в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Предположим противное. Пусть $N_1 \cdot\triangleleft G$ и $N_2 \cdot\triangleleft G$, тогда $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$. По лемме 2.33 [7], $G/(N_1 \cap N_2)$ изоморфна подгруппе прямого произведения $G/N_1 \times G/N_2$. Так как N_1 и N_2 – минимальные нормальные подгруппы, то $N_1 \cap N_2 = 1$. Таким образом, G изоморфна подгруппе группы $G/N_1 \times G/N_2$. Так как $\mathfrak{F}$ – формация, то $\mathfrak{F}$ замкнуто относительно подпрямых произведений. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$. Значит, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N.

По лемме 5 п. 5, подгруппа Фиттинга совпадает с подгруппой N, т.е. $F(G) = N$. По следствию [7, с. 86], N является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого p. Пусть $|F(G)| = |N| = p^n$. По лемме 4, $n \le 1 + k_p(G)$. Так как по условию $k_p(G) \le 2$, то $n \le 3$.

Так как $N-$ абелева группа, то, по п. 3 леммы 5, $F(G) = C_G F(G)$. Так как $F(G) \triangleleft G$, то $N_G(F(G)) = G$. Поэтому $G/F(G)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов Aut $F(G)$ по лемме 8.

Если $n = 1$, то $G/F(G)$ циклическая группа порядка $p-1$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{F}$.

Если $n = 2$, то, по лемме 6 (п. 1), $G/F(G) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$. Значит, $G \in \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4 \subseteq \mathfrak{F}$.

Если $n = 3$, то, по лемме 6 (п. 2), $G/F(G) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^5$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$.

Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то $n(G) \le 4$. Т.к. $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^5$, то, по лемме 7, $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^6$. Значит, $d(G/\Phi(G)) \le 6$.

3. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$ и всякая метанильпотентная группа имеет p-длину, не превосходящую 1, то $l_p(G) \le 2$ для любого простого $p \in \pi(G)$.

Предположим, что $G-$ группа наименьшего порядка, для которой условие $l_p(G) \le 1$ для $p > 3$ не выполняется. Так как условие теоремы наследуют все фактор группы, то, по лемме 9, можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$, а, по лемме 10, подгруппа Фиттинга $F = F(G)-$ единственная минимальная нормальная p-подгруппа и $|F| \le p^3$ по лемме 4.

Если $|F| \le p$, то G/F изоморфна подгруппе циклической группы автоморфизмов Aut F группы F, порядок которой равен $p-1$. Отсюда, силовская $p-$подгруппа группы G совпадает с подгруппой Фиттинга. Значит, $l_p(G) \le 1$. Противоречие.

Если $|F| = p^2$ или $|F| = p^3$, то Aut $F = GL(2,p)$ или Aut $F = GL(3,p)$ и $G/F-$ неприводимая подгруппа группы $GL(n,p)$, $n = \{2,3\}$ и $O_p(G/F) = 1$. Тогда, по лемме 6, $G/F - p'$-группа. Отсюда следует, что $l_p(G) \le 1$ для $p > 3$. Противоречие с предположением.

Теорема доказана.

Доказательство следствия 1.

Индукцией по порядку группы G покажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Повторяя большую часть доказательства теоремы 2, получим, что $|F| \le p^3$.

Если $n = 1$, то $G/F(G) \in \mathfrak{A}$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$.

Если $n = 2$, то, по лемме 11 (п. 1), $G/F(G)$ изоморфна A_4-свободной подгруппе группы $GL(2, p)$ и $G/F(G) \in \mathfrak{A}^2$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2 \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$.

Если $n = 3$, то, по лемме 11 (п. 2), $G/F(G)$ изоморфна A_4-свободной подгруппе группы $GL(3, p)$ и $G/F(G) \in \mathfrak{A}^4$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$.

Так как $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$, то, по лемме 7, $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^5$. Поэтому $d(G/\Phi(G)) \le 5$.

Доказательство следствия 2.

Индукцией по порядку группы G покажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4 \cap \mathfrak{N}^4$. Повторяя большую часть доказательства теоремы 2, получим, что $|F(G)| = |N| = p^n$. По лемме 4, $n \le 1 + k_p(G)$. Так как по условию $k_p(G) \le 1$, то $n \le 2$.

Если $n = 1$, то $G/F(G)$ циклическая группа порядка $p - 1$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4 \cap \mathfrak{N}^4$.

Если $n = 2$, то, по лемме 6 (п. 1), $G/F(G) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$. Значит, $G \in \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$.

Отсюда следует, что нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Доказательство следствия 3.

Индукцией по порядку группы G покажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$. Повторяя большую часть доказательства следствия 1, получим, что $|F(G)| = |N| = p^n$. По лемме 4, $n \le 1 + k_p(G)$. Так как по условию $k_p(G) \le 1$, то $n \le 2$.

Если $n = 1$, то $G/F(G)$ циклическая группа порядка $p - 1$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$.

Если $n = 2$, то, по лемме 11 (п. 1), $G/F(G) \in \mathfrak{A}^2$. Значит, $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$.

Отсюда следует, что нильпотентная длина группы G не превышает 3, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев, А. Ф. О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // ПФМТ. – 2010. – № 2 (3). – С. 21–27.
2. Казарин, Л. С. О группах с факторизацией / Л. С. Казарин // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 256, № 1. – С. 26–29.
3. Kniagina, V. N. Finite groups with P-subnormal 2-maximal subgroups / V. N. Kniagina, V. S. Monakhov // arxiv.org e-Print archive, arxiv.org/pdf/1105.3663.pdf, 18 May 2011.

4. Kniagina, V. N. Finite groups with P-subnormal primary cyclic subgroups / V. N. Kniagina, V. S. Monakhov // arxiv.org e-Print archive, arxiv.org/pdf/1110.4720, 18 Nov. 2011.

5. Vasilyev, A. F. On the finite groups of supersoluble type / A. F. Vasilyev, T. I. Vasilyeva, V. N. Tyutyanov // Sib. Math. J. – 2010. – T. 51, № 6. – C. 1004–1012.

6. Kniahina, V. N. On supersolvability of finite groups with P-subnormal subgroups / V. N. Kniagina, V. S. Monakhov // International Journal of Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.

7. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.

8. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. матем. журн. – Т. 52, № 5. – 2011. – С. 1123–1137.

9. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York. – 1967.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 23.02.2017

Artiushenia T.A., Trofimuk A.A. **Solvable Group with N-Free Degrees of Indexes of** P **-Subnormal Subgroups in its Normal Closures**

We consider only finite groups. Let $k_p(G) = \max\limits_{H\ \mathrm{P}-sn\ G} \{j \mid p^j \,\|\, |H^G : H|\}$ *and* $k(G) = \max\limits_{p} k_p(G)$, *where* P*-sn* G *is the designation of* P*-subnormal subgroups in the group* G*. For solvable group* G*, the dependence of the derived length and the nilpotent length of values of* $k(G)$ *is obtained. The estimations of this invariants for small values of* $k(G)$ *are refined. In particular, the nilpotent length of group* G *with* $k(G) \le 2$ *does not exceed 4 and the p-length is at most 1 for all p> 3, 2-length is at most 2, 3-length is at most 2.*