УДК 517.925

Е.В. Грицук[1], Е.В. Кузьмина[2]
[1]канд. физ.-мат. наук,
доц. каф. математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]магистрант физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: gricuk_e@tut.by

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ИЕРАРХИИ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ НА СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ

Проводится исследование уравнений обобщенной иерархии дифференциальных уравнений Риккати методом резонансов. Получена структура уравнений иерархии, найден порядок подвижного полюса решения, указан явный вид резонансного многочлена и определены его корни. Для первых пяти уравнений найдены ряды Лорана с необходимым числом произвольных параметров.

Введение

В последние годы повысился интерес к исследованию дифференциальных уравнений на свойство Пенлеве, так как выяснилось, что свойство Пенлеве имеет тесную связь с нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния. В разделе нелинейной математической физики, связанным со свойством Пенлеве для дифференциальных уравнений, получены важные и интересные результаты при решении многих нелинейных задач в области гидродинамики, физики плазмы, нелинейной оптики и физики твердого тела. Поэтому особый интерес представляют методы, позволяющие строить дифференциальные уравнения высших порядков, обладающих свойством Пенлеве.

Одним из способов построения таких уравнений является воздействие специальными операторами на уравнения Пенлеве-типа в надежде получить уравнения того же свойства. Из-за специфики применяемых операторов получаемые уравнения сохраняют некоторые свойства стартовых уравнений, однако требуют исследований на свойство Пенлеве. Рассмотрим одну из последовательностей таких уравнений – обобщенную иерархию уравнения Риккати.

Структура уравнений обобщенной иерархии уравнения Риккати

Обобщенная иерархия уравнения Риккати может быть записана в виде

$$D_R^n w = 0, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{1}$$

где оператор D_R имеет вид

$$D_R = \frac{d}{dz} + \gamma w, \gamma \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

При $n = 1$

$$w' + \gamma w^2 = 0, \tag{3}$$

при $n = 2$

$$w'' + \gamma^2 w^3 + 3\gamma w w' = 0, \tag{4}$$

при $n = 3$

$$w''' + \gamma^3 w^4 + 6\gamma^2 w^2 w' + 4\gamma w w'' + 3\gamma w'^2 = 0, \tag{5}$$

при $n = 4$

$$w^{(4)} + \gamma^4 w^5 + 10\gamma^3 w^3 w' + 10\gamma^2 w^2 w'' + 15\gamma^2 w w'^2 + 5\gamma w w''' + 10\gamma w' w'' = 0. \tag{6}$$

Относительно вида уравнения (1) можно сформулировать и доказать теорему.

Теорема 1. *Уравнение* (1)*, при* $n \geq 2$*, имеет вид*

$$w^{(n)} + \gamma^n w^{n+1} + P_n\left(w, w', ..., w^{(n-1)}\right) = 0, \tag{7}$$

где P_n *– полином от* $w, w', ..., w^{(n-1)}$ *степени n, вида*

$$P_n\left(w, w', ..., w^{(n-1)}\right) = \sum_{\langle k \rangle = n+1, k_0 \leq n-1} a_{k_0 k_1 ... k_{n-1}} w^{k_0} \left(w'\right)^{k_1} ... \left(w^{(n-1)}\right)^{k_{n-1}}, \tag{8}$$

$a_{k_0 k_1 ... k_{n-1}}$ *– константы, k – мультииндекс* $k = \left(k_0, k_1, ..., k_{n-1}\right)$ *с нормой*

$$\langle k \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \left(p+1\right) k_p \,. \tag{9}$$

Доказательство. Осуществим доказательство теоремы методом математической индукции по n-порядку дифференциального уравнения (1). Для случая $n = 2$ первые два слагаемые в уравнении (4) совпадают с первыми двумя слагаемыми в формуле (7), а третье слагаемое представляет собой полином $P_2 = 3\gamma w w'$. В силу формулы (9) норма мультииндекса k монома, входящего в P_2, равна $1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3$, т.е. $n + 1$. Значит, первый пункт метода математической индукции выполняется. Предположим, что формула (7) верна при $n = m > 1$, докажем ее истинность при $n = m + 1$. При $n = m + 1$ из (1) и (7) получим

$$\begin{aligned} D_R^{m+1} w &= \left(\frac{d}{dz} + \gamma w\right)\left(w^{(m)} + \gamma^m w^{m+1} + P_m\left(w, w', ..., w^{(m-1)}\right)\right) = \\ &= w^{(m+1)} + \gamma^{m+1} w^{m+2} + \gamma w w^{(m)} + \left(m+1\right)\gamma^m w^m w' + \gamma w P_m + P_m{}'. \end{aligned} \tag{10}$$

Первые два слагаемые из формулы (10) соответствуют первым двум слагаемым формулы (7) для $n = m + 1$. Остается показать, что оставшиеся слагаемые удовлетворяют заявленным ограничениям (8) на полином P_{m+1}. Так, норма мультииндекса третьего слагаемого, согласно формулы (9), равна $1 \cdot 1 + \left(m+1\right) \cdot 1 = \left(m+1\right) + 1$, т.е. третье слагаемое удовлетворяет ограничениям на мономы, входящие в полином P_{m+1}. Четвертое слагаемое имеет норму $1 \cdot m + \left(1+1\right) \cdot 1 = m + 2 = \left(m+1\right) + 1$, а значит также подходит.

Слагаемое $\gamma w P_m$ имеет мономы с нормой мультииндекса, равной $1 \cdot \left(k_0 + 1\right) + 2 \cdot k_1 + ... + m \cdot k_m = 1 + 1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + ... + m \cdot k_m = 1 + \langle k \rangle = \left(m+1\right) + 1$, т.е. удовлетворяет требованию индукции. Докажем, что слагаемые полинома $P_m{}'$ также удовлетворяют требованию индукции. Мономы полинома $P_m{}'$ двух различных типов:

$$k_j a_{k_0 k_1 \dots k_{m-1}} w^{k_0} \left(w'\right)^{k_1} \dots \left(w^{(j)}\right)^{k_j - 1} \left(w^{(j+1)}\right)^{k_{j+1}+1} \dots \left(w^{(m-1)}\right)^{k_{m-1}}, j = 0,1,\dots,m-2, \qquad (11)$$

$$k_{m-1} a_{k_0 k_1 \dots k_{m-1}} \left(w\right)^{k_0} \left(w'\right)^{k_1} \dots \left(w^{(m-1)}\right)^{k_{m-1}-1} w^{(m)}. \qquad (12)$$

Вычислим норму мультииндекса монома из формулы (11). Она равна

$$1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + \dots + \left(j+1\right) \cdot \left(k_j - 1\right) + \left(j+2\right) \cdot \left(k_{j+1} + 1\right) + \dots + m \cdot k_{m-1} =$$
$$= 1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + \dots + \left(j+1\right) \cdot k_j + \left(j+2\right) \cdot k_{j+1} + \dots + m \cdot k_{m-1} + 1 = \left\langle k \right\rangle + 1 = \left(m+1\right) + 1.$$

Остается найти норму мультииндекса монома из формулы (12). Имеем

$$1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + \dots + m \cdot \left(k_{m-1} - 1\right) + \left(m+1\right) \cdot 1 = \left\langle k \right\rangle + 1 = \left(m+1\right) + 1.$$

Таким образом, структура полинома P_{m+1} подтверждается. Для завершения доказательства требуется установить ограничение на k_0.

Из условия $\left\langle k \right\rangle = m+2$, теперь обозначается через k мультииндекс из полинома P_{m+1}, получаем $k_0 = m+2-2 \cdot k_1 - \dots - \left(m+1\right) \cdot k_m$, так как целые $k_j \ge 0$, то максимально возможное значение $k_0 = m+2$. Но моном с мультииндексом $k = \left(m+2,0,\dots,0\right)$ представляет собой второе слагаемое формулы (10), т.е. в полином P_{m+1} не входит. Значение $k_0 = m+1$ невозможно, так как не существует мультииндекса k, удовлетворяющего условию $\left\langle k \right\rangle = m+2$. Таким образом, максимальное значение $k_0 = m = \left(m+1\right) - 1$. Теорема доказана.

Лемма. *Если решение уравнения* (1) *имеет подвижный полюс, то только первого порядка.*

Доказательство. Для определения порядка q подвижного полюса в уравнении (7) произведем замену $w \sim c_0 \left(z - z_0\right)^{-q}$. Ведущими членами уравнения (7) являются $w^{(n)}$, слагаемые полинома (8) и, возможно, $\gamma^n w^{n+1}$. В первом случае $q + n = q \cdot k_0 + \left(q+1\right) \cdot k_1 + \dots + \left(q+n-1\right) \cdot k_{n-1}$ или $q + n = \left(q-1\right)\left(k_0 + k_1 + \dots + k_{2n-2}\right) + \left\langle k \right\rangle$. Так как $\left\langle k \right\rangle = n+1$, то $\left(q-1\right) \cdot \left(k_0 + k_1 + \dots + k_{2n-2} - 1\right) = 0$. Условие $k_0 + k_1 + \dots + k_{2n-2} = 1$ противоречит ограничению $\left\langle k \right\rangle = n+1$. Значит, $q = 1$. Во втором случае $q + n = q\left(n+1\right)$, откуда $q = 1$.

Покажем, что существует $c_0 \ne 0$. Подставим в формулу (1) $w \sim c_0 \left(z - z_0\right)^{-1}$. Пусть $D_R^n w \sim S_n\left(c_0\right)\left(z - z_0\right)^{-(n+1)}$. Тогда

$$D_R^{n+1} w = D_R\left(D_R^n w\right) \sim D_R\left(S_n\left(c_0\right)\left(z - z_0\right)^{-(n+1)}\right) = S_n\left(c_0\right)\left(-\left(n+1\right)\right)\left(z - z_0\right)^{-(n+2)} +$$
$$+ \gamma c_0 S_n\left(c_0\right)\left(z - z_0\right)^{-(n+2)} = S_n\left(c_0\right)\left(\gamma c_0 - n - 1\right)\left(z - z_0\right)^{-(n+2)}.$$

Значит, $S_n\left(c_0\right)$ удовлетворяет рекурсивному соотношению

$$S_{n+1}\left(c_0\right) = \left(\gamma c_0 - n - 1\right) S_n\left(c_0\right), S_1\left(c_0\right) = c_0\left(\gamma c_0 - 1\right). \qquad (13)$$

Из (13) находим условие на c_0:

$$\prod_{j=0}^{n}\left(c_0-\frac{j}{\gamma}\right)=0. \tag{14}$$

Очевидно, что в (14) есть $c_0 \neq 0$. Лемма доказана.

Исследование решений некоторых уравнений обобщенной иерархии Риккати в окрестности подвижного полюса

Получение уравнений обобщенной иерархии Риккати в случае $n \geq 5$ в силу формул (1) и (2) сводится к нахождению производной от полинома и не представляет технической сложности.

Получим рекуррентное соотношение на резонансный многочлен уравнений обобщенной иерархии Риккати. Для этого в формулу (1) подставим $w \sim c_0 t^{-1} + \beta t^{r-1}$, получим $D_R^n w \sim S_n(c_0)t^{-(n+1)} + \beta R_n(c_0,r)t^{r-n-1}$. Тогда

$$D_R^{n+1}w=\left(\frac{d}{dz}+\gamma w\right)D_R^n w \sim \left(\frac{d}{dz}+\frac{\gamma c_0}{t}+\frac{\gamma\beta}{t^{1-r}}\right)\left(S_n(c_0)t^{-(n+1)}+\beta R_n(c_0,r)t^{r-n-1}\right)=$$
$$=(\gamma c_0-n-1)S_n(c_0)t^{-(n+2)}+\beta\left(\gamma S_n(c_0)+(r-n-1+\gamma c_0)R_n(c_0,r)\right)t^{r-n-2}.$$

С другой стороны,

$$D_R^{n+1}w \sim S_{n+1}(c_0)t^{-(n+2)}+\beta R_{n+1}(c_0,r)t^{r-n-2}, \text{ т.е.}$$
$$R_{n+1}(c_0,r)=\gamma S_n(c_0)+(r-n-1+\gamma c_0)\cdot R_n(c_0,r). \tag{15}$$

Теорема 2. *Резонансный многочлен уравнений обобщенной иерархии Риккати имеет вид*

$$R_n(c_0,r)=\prod_{j=0}^{m-1}(r+j+1)\prod_{s=0}^{n-m-1}(r-s-1). \tag{16}$$

Доказательство. В зависимости от c_0 можно убедиться, например, с помощью пакета символьных вычислений Maple 9, что рекуррентному соотношению (15) удовлетворяет многочлен вида (16). Так как при фиксированном c_0 резонансный многочлен уравнения единственный, то указанный и есть искомый. Теорема доказана.

Таким образом, все резонансы, соответствующие паре (c_0,r), являются целыми и однократными. Количество положительных равно $n-m$.

Для определения номеров коэффициентов c_j, которые, возможно, являются произвольными параметрами в разложении

$$w=\sum_{j=0}^{\infty}c_j t^{j-1}, \text{ где } t=z-z_0,\, z_0\in\mathbb{C},$$

требуется получить корни многочлена (16).

Исследуем уравнение (4). В окрестности особой точки z_0 уравнение (4) имеет вид

$$w''+\gamma^2 w^3+3\gamma w w'=0.$$

В первом случае $c_0=1/\gamma$. По формуле (16) при $n=2$ получаем

$$R_2(c_0,r)=(r+1)(r-1).$$

Т.е. имеем один отрицательный резонанс $r_1=-1$ и один положительный $r_2=1$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (4), имеет вид:

$$w=\frac{1}{\gamma t}+c_1+c_2t+c_3t^2+c_4t^3+c_5t^4+..., \tag{17}$$

где $t=z-z_0$, $c_1=h_1$, $c_2=-\gamma h_1^2$, $c_3=\gamma^2h_1^3$, $c_4=-\gamma^3h_1^4$, $c_5=\gamma^4h_1^5$, коэффициенты c_j, $j>5$ однозначно определяются через произвольный параметр h_1. В силу теоремы 2 [4] ряд (17) является сходящимся.

Во втором случае $c_0=2/\gamma$. По формуле (16) при $n=2$ получаем

$$R_2(c_0,r)=(r+1)(r+2).$$

Т.е. имеем два отрицательных резонанса $r_1=-1$ и $r_2=-2$. Так как все резонансы отрицательны, то $c_j=0$, $j\ge 1$. Решение, удовлетворяющее уравнению (4), имеет вид:

$$w=\frac{2}{\gamma t}, \tag{18}$$

где $t=z-z_0$.

Исследуем уравнение (5). В окрестности особой точки z_0 уравнение (5) имеет вид

$$w'''+\gamma^3w^4+6\gamma^2w^2w'+4\gamma ww''+3\gamma w'^2=0.$$

В первом случае $c_0=1/\gamma$. По формуле (16) при $n=3$ получаем

$$R_3(c_0,r)=(r+1)(r-1)(r-2).$$

Т.е. имеем один отрицательный резонанс $r_1=-1$ и два положительных $r_2=1$, $r_3=2$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (5), имеет вид

$$w=\frac{1}{\gamma t}+c_1+c_2t+c_3t^2+c_4t^3+c_5t^4+..., \tag{19}$$

где $t=z-z_0$, $c_1=h_1$, $c_2=h_2$, $c_3=-\frac{3}{2}\gamma h_1h_2-\frac{1}{2}\gamma^2h_1^3$, $c_4=\frac{1}{2}\gamma^3h_1^4+\gamma^2h_1^2h_2-\frac{1}{2}\gamma h_2^2$, $c_5=-\frac{1}{4}\gamma^4h_1^5+\frac{5}{4}\gamma^2h_1h_2^2$, коэффициенты c_j, $j>5$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1 и h_2.

Во втором случае $c_0=2/\gamma$. По формуле (16) при $n=3$ получаем

$$R_3(c_0,r)=(r+1)(r+2)(r-1).$$

Т.е. имеем два отрицательных резонанса $r_1=-1$, $r_2=-2$ и один положительный $r_3=1$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (5), имеет вид

$$w=\frac{2}{\gamma t}+c_1+c_2t+c_3t^2+c_4t^3+c_5t^4+..., \tag{20}$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = -\gamma h_1^2$, $c_3 = \gamma^2 h_1^3$, $c_4 = -\gamma^3 h_1^4$, $c_5 = \gamma^4 h_1^5$, коэффициенты c_j, $j > 5$ однозначно определяются через произвольный параметр h_1.

В силу теоремы 2 [4] ряды (19) и (20) являются сходящимися.

В третьем случае $c_0 = 3/\gamma$. По формуле (16) при $n = 3$ получаем:

$$R_3(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r+3).$$

Т.е. имеем три отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$. Решение, удовлетворяющее уравнению (5), имеет вид

$$w = \frac{3}{\gamma t}, \tag{21}$$

где $t = z - z_0$.

Исследуем уравнение (6). В окрестности особой точки z_0 уравнение (6) имеет вид:

$$w^{(4)} + \gamma^4 w^5 + 10\gamma^3 w^3 w' + 10\gamma^2 w^2 w'' + 15\gamma^2 w w'^2 + 5\gamma w w''' + 10\gamma w' w'' = 0.$$

В первом случае $c_0 = 1/\gamma$. По формуле (16) при $n = 4$ получаем

$$R_4(c_0, r) = (r+1)(r-1)(r-2)(r-3).$$

Т.е. имеем один отрицательный резонанс $r_1 = -1$ и три положительных: $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $r_4 = 3$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (6), имеет вид:

$$w = \frac{1}{\gamma t} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 t^4 + c_6 t^5 + \ldots, \tag{22}$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = h_2$, $c_3 = h_3$, $c_4 = -\frac{1}{6}\gamma^3 h_1^4 - \gamma^2 h_1^2 h_2 - \frac{4}{3}\gamma h_1 h_3 - \frac{1}{2}\gamma h_2^2$,

$$c_5 = \frac{1}{6}\gamma^4 h_1^5 + \frac{5}{6}\gamma^3 h_1^3 h_2 + \frac{5}{6}\gamma^2 h_1^2 h_3 - \frac{5}{6}\gamma h_2 h_3,$$

$$c_6 = -\frac{1}{12}\gamma^5 h_1^6 - \frac{1}{4}\gamma^4 h_1^4 h_2 - \frac{1}{3}\gamma^3 h_1^3 h_3 + \frac{3}{4}\gamma^3 h_1^2 h_2^2 + \gamma^2 h_1 h_2 h_3 + \frac{1}{4}\gamma^2 h_2^3 - \frac{1}{3}\gamma h_3^2,$$

коэффициенты c_j, $j>6$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2, h_3.

Во втором случае $c_0 = 2/\gamma$. По формуле (16) при $n = 4$ получаем

$$R_4(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r-1)(r-2).$$

Т.е. имеем два отрицательных резонанса: $r_1 = -1$, $r_2 = -2$ – и два положительных: $r_3 = 1$, $r_4 = 2$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (6), имеет вид:

$$w = \frac{2}{\gamma t} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 t^4 + c_6 t^5 + \ldots, \tag{23}$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = h_2$, $c_3 = -\frac{1}{2}\gamma^2 h_1^3 - \frac{3}{2}\gamma h_1 h_2$, $c_4 = \frac{1}{2}\gamma^3 h_1^4 + \gamma^2 h_1^2 h_2 - \frac{1}{2}\gamma h_2^2$, $c_5 = -\frac{1}{4}\gamma^4 h_1^5 + \frac{5}{4}\gamma^2 h_1 h_2^2$ $c_6 = -\frac{3}{4}\gamma^4 h_1^4 h_2 - \frac{3}{2}\gamma^3 h_1^2 h_2^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 h_2^3$, коэффициенты c_j, $j>6$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2.

В третьем случае $c_0=3/\gamma$. По формуле (16) при $n=4$ получаем

$$R_4(c_0,r)=(r+1)(r+2)(r+3)(r-1).$$

Т.е. имеем три отрицательных резонанса: $r_1=-1$, $r_2=-2$, $r_3=-3$ – и один положительный $r_4=1$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (6), имеет вид:

$$w=\frac{3}{\gamma t}+c_1+c_2t+c_3t^2+c_4t^3+c_5t^4+c_6t^5+\ldots, \tag{24}$$

где $t=z-z_0$, $c_1=h_1$, $c_2=-\gamma h_1^2$, $c_3=\gamma^2h_1^3$, $c_4=-\gamma^3h_1^4$, $c_5=\gamma^4h_1^5$, $c_6=-\gamma^5h_1^6$, коэффициенты c_j, $j>6$ однозначно определяются через произвольный параметр h_1.

В четвертом случае $c_0=4/\gamma$. По формуле (16) при $n=4$ получаем

$$R_4(c_0,r)=(r+1)(r+2)(r+3)(r+4).$$

Т.е. имеем четыре отрицательных резонанса $r_1=-1$, $r_2=-2$, $r_3=-3$, $r_4=1$. Решение, удовлетворяющее уравнению (6), имеет вид

$$w=\frac{4}{\gamma t}. \tag{25}$$

где $t=z-z_0$.

В силу теоремы 2 [4] ряды (22) – (24) являются сходящимся.

Исследуем уравнение (1) при $n=5$. В окрестности особой точки z_0 оно имеет вид:

$$\begin{gathered}w^{(5)}+\gamma^5w^6+15\gamma^4w^4w'+20\gamma^3w^3w''+45\gamma^3w^2w'^2+15\gamma^2w^2w'''+60\gamma^2ww'w''+\\+6\gamma ww^{(4)}+15\gamma^2(w')^3+15\gamma w'w'''+10\gamma(w'')^2=0.\end{gathered} \tag{26}$$

В первом случае $c_0=1/\gamma$. По формуле (16) при $n=5$ получаем

$$R_5(c_0,r)=(r+1)(r-1)(r-2)(r-3)(r-4).$$

Т.е. имеем один отрицательный резонанс $r_1=-1$ и четыре положительных: $r_2=1$, $r_3=2$, $r_4=3$, $r_5=4$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (26), имеет вид

$$w=\frac{1}{\gamma t}+c_1+c_2t+c_3t^2+c_4t^3+c_5t^4+c_6t^5+c_7t^6+\ldots, \tag{27}$$

где $t=z-z_0$, $c_1=h_1$, $c_2=h_2$, $c_3=h_3$, $c_4=h_4$,

$$c_5=-\frac{1}{24}\gamma^4h_1^5-\frac{5}{12}\gamma^3h_1^3h_2-\frac{5}{6}\gamma^2h_1^2h_3-\frac{5}{8}\gamma^2h_1h_2^2-\frac{5}{4}\gamma h_1h_4-\frac{5}{6}\gamma h_2h_3,$$

$$c_6=\frac{1}{24}\gamma^5h_1^6+\frac{3}{8}\gamma^4h_1^4h_2+\frac{2}{3}\gamma^3h_1^3h_3+\frac{3}{8}\gamma^3h_1^2h_2^2+\frac{3}{4}\gamma^2h_1^2h_4-\frac{1}{8}\gamma^2h_2^3-\frac{3}{4}\gamma h_2h_4-\frac{1}{3}\gamma h_3^2,$$

$$c_7=-\frac{1}{48}\gamma^6h_1^7-\frac{7}{48}\gamma^5h_1^5h_2-\frac{7}{24}\gamma^4h_1^4h_3+\frac{7}{48}\gamma^4h_1^3h_2^2-\frac{7}{24}\gamma^3h_1^3h_4+\frac{7}{12}\gamma^3h_1^2h_2h_3+\frac{7}{16}\gamma^3h_1h_2^3+$$

$$+\frac{7}{8}\gamma^2 h_1 h_2 h_4 + \frac{7}{24}\gamma^2 h_2^2 h_3 - \frac{7}{12}\gamma h_3 h_4,$$

коэффициенты c_j, $j > 7$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2, h_3, h_4.

Во втором случае $c_0 = 2/\gamma$. По формуле (16) при $n = 5$ получаем

$$R_5(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r-1)(r-2)(r-3).$$

Т.е. имеем два отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$ и три положительных $r_3 = 1$, $r_4 = 2$, $r_5 = 3$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (26), имеет вид

$$w = \frac{2}{\gamma t} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 t^4 + c_6 t^5 + c_7 t^6 + \ldots, \tag{28}$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = h_2$, $c_3 = h_3$, $c_4 = -\frac{1}{6}\gamma^3 h_1^4 - \gamma^2 h_1^2 h_2 - \frac{4}{3}\gamma h_1 h_3 - \frac{1}{2}\gamma h_2^2$,

$$c_5 = \frac{1}{6}\gamma^4 h_1^5 + \frac{5}{6}\gamma^3 h_1^3 h_2 + \frac{5}{6}\gamma^2 h_1^2 h_3 - \frac{5}{6}\gamma h_3 h_2,$$

$$c_6 = -\frac{1}{12}\gamma^5 h_1^6 - \frac{1}{4}\gamma^4 h_1^4 h_2 - \frac{1}{3}\gamma^3 h_1^3 h_3 + \frac{3}{4}\gamma^3 h_1^2 h_2^2 + \gamma^2 h_1 h_2 h_3 + \frac{1}{4}\gamma^2 h_2^3 - \frac{1}{3}\gamma h_3^2$$

$$c_7 = \frac{1}{36}\gamma^6 h_1^7 + \frac{7}{36}\gamma^4 h_1^4 h_3 - \frac{7}{12}\gamma^4 h_1^3 h_2^2 + \frac{7}{9}\gamma^2 h_1 h_3^2 + \frac{7}{12}\gamma^2 h_2^2 h_3,$$

коэффициенты c_j, $j > 7$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2, h_3.

В третьем случае $c_0 = 3/\gamma$. По формуле (16) при $n = 5$ получаем

$$R_5(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r+3)(r-1)(r-2).$$

Т.е. имеем три отрицательных резонанса: $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$ – и два положительных: $r_4 = 1$, $r_5 = 2$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (26), имеет вид

$$w = \frac{3}{\gamma t} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 t^4 + c_6 t^5 + c_7 t^6 + \ldots, \tag{29}$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = h_2$, $c_3 = -\frac{1}{2}\gamma^2 h_1^3 - \frac{3}{2}\gamma h_1 h_2$, $c_4 = \frac{1}{2}\gamma^3 h_1^4 + \gamma^2 h_1^2 h_2 - \frac{1}{2}\gamma h_2^2$,

$$c_5 = -\frac{1}{4}\gamma^4 h_1^5 + \frac{5}{4}\gamma^2 h_1 h_2^2 \quad c_6 = -\frac{3}{4}\gamma^4 h_1^4 h_2 - \frac{3}{2}\gamma^3 h_1^2 h_2^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 h_2^3,$$

$$c_7 = \frac{1}{8}\gamma^6 h_1^7 + \frac{7}{8}\gamma^5 h_1^5 h_2 + \frac{7}{8}\gamma^4 h_1^3 h_2^2 - \frac{7}{8}\gamma^3 h_1 h_2^3,$$

коэффициенты c_j, $j > 7$ однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2.

В четвертом случае $c_0 = 4/\gamma$. По формуле (16) при $n = 5$ получаем

$$R_5(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r-1).$$

Т.е. имеем четыре отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$, $r_4 = -4$ и один положительный $r_5 = 1$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (26), имеет вид

$$w = \frac{4}{\gamma t} + c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 t^4 + c_6 t^5 + c_7 t^6 + \ldots, \tag{30}$$

где $t = z - z_0$, $c_1 = h_1$, $c_2 = -\gamma h_1^2$, $c_3 = \gamma^2 h_1^3$, $c_4 = -\gamma^3 h_1^4$, $c_5 = \gamma^4 h_1^5$, $c_6 = -\gamma^5 h_1^6$, $c_7 = \gamma^6 h_1^7$, коэффициенты c_j, $j > 7$ однозначно определяются через произвольный параметр h_1.

В силу теоремы 2 [4] ряды (27) – (30) являются сходящимся.

В пятом случае $c_0 = 5/\gamma$. По формуле (16) при $n = 5$ получаем

$$R_5(c_0, r) = (r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5).$$

Т.е. имеем пять отрицательных резонансов: $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$, $r_4 = -4$, $r_5 = -5$. Решение, удовлетворяющее уравнению (26), имеет вид

$$w = \frac{5}{\gamma t}. \tag{31}$$

где $t = z - z_0$.

Заключение

В работе доказывается, что порядок подвижного полюса решения каждого уравнения обобщенной иерархии Риккати равен единице; все резонансы уравнений обобщенной иерархии Риккати являются целыми и однократными: у первых пяти уравнений иерархии формальные ряды Лорана содержат нужное количество произвольных постоянных: все указанные ряды Лорана являются сходящимися.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. – 436 с.

2. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс. – Харьков : ГНТИУ, 1939. – 719 с.

3. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – М. : Мир, 1987. – 478 с.

4. Грицук, Е. В. К теории нелинейных дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве / Е. В. Грицук, В. И. Громак // Дифференц. уравнения. – 2010. – № 10. – С. 1371–1380.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 11.09.2017

Gritsuk E. V., Kuzmina E.V. **The Study of the Generalized Hierarchy of the Equation of Riccati on the Painleve Property**

The paper deals with the study of the generalized hierarchy of differential Riccati equations, the resonant method The resulting structure equations of the hierarchy, found order movable pole solutions, specified the explicit form of the resonance and the polynomial defined by its roots. For the first five equations was found the Laurent series with the desired number of arbitrary parameters.