$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots \supseteq G_{n-1} \supseteq G_n = 1,$$

факторы G_{i-1}/G_i которого являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами. Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^a(G)$. В работе [2] доказано, что производная длина π-холловой подгруппы π-разрешимой группы G не превышает $l_\pi^a(G)$. Ясно, что в случае, когда $\pi = \pi(G)$ значение $l_\pi^a(G)$ совпадает со значением производной длины разрешимой группы G. В работе [3] получены оценки производной p-длины конечной p-разрешимой группы в случаях, когда силовская p-подгруппа имеет порядок p, p^2, p^3, p^4, p^5.

Доказана следующая

Теорема. Пусть G – p-разрешимая группа, а G_p – ее силовская p-подгруппа. Тогда

1) если G_p имеет порядок p^6, то $l_p^a(G) \le 3$ для $p \ge 5$ и $l_p^a(G) \le 4$ для $p \in \{2,3\}$;

2) если G_p имеет порядок p^7, то $l_p^a(G) \le 4$ для всех p.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа. – 2006. – 207 с.
2. Грицук, Д.В. О производной π-длине π-разрешимой группы / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестник БГУ, Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
3. Грицук, Д.В. Производная π-длина π-разрешимой группы, силовские p-подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 / Д.В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2(19). – С. 54–58.

Е.В. ГРИЦУК, Е.В. КУЗЬМИНА
БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

СТРУКТУРА УРАВНЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ИЕРАРХИИ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Задача определения условий наличия свойства Пенлеве [1; 2] у обыкновенных дифференциальных уравнений порядка выше двух является актуальной в связи с гипотезой о возможности применения к задачам с уравнениями в частных производных метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [3] в случае их редукции к уравнениям Пенлеве типа. Поэтому возник способ построения дифференциальных уравнений высших порядков посредством воздействия специальных операторов на уравнения Пенлеве типа в надежде получить уравнения того же свойства. Одной из таких последовательностей уравнений является обобщенная иерархия уравнения Риккати.

Обобщенная иерархия уравнения Риккати может быть записана в виде

$$D_R^n w = 0, n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

где оператор D_R имеет вид

$$D_R = \frac{d}{dz} + \gamma w, \gamma \in \tag{2}$$

При $n = 1$

$$w' + \gamma w^2 = 0, \tag{3}$$

при $n = 2$

$$w'' + \gamma^2 w^3 + 3\gamma w w' = 0, \tag{4}$$

при $n = 3$

$$w''' + \gamma^3 w^4 + 6\gamma^2 w^2 w' + 4\gamma w w'' + 3\gamma w'^2 = 0, \tag{5}$$

при $n = 4$

$$w^{4} + \gamma^4 w^5 + 10\gamma^3 w^3 w' + 10\gamma^2 w^2 w'' + 15\gamma^2 w w'^2 + 5\gamma w w'' + 10\gamma w' w'' = 0. \tag{6}$$

Теорема. *Уравнение* (1), *при* $n \geq 2$, *имеет вид:*

$$w^{(n)} + \gamma^n w^{n+1} + P_n\left(w, w', \ldots, w^{(n-1)}\right) = 0, \tag{7}$$

где P_n *– полином от* $w, w', \ldots, w^{(n-1)}$ *степени* n, *вида*

$$P_n\left(w, w', \ldots, w^{(n-1)}\right) = \sum_{\langle k \rangle = n+1, k_0 \leq n-1} a_{k_0 k_1 \ldots k_{n-1}} w^{k_0} \left(w'\right)^{k_1} \ldots \left(w^{(n-1)}\right)^{k_{n-1}}, \tag{8}$$

$a_{k_0 k_1 \ldots k_{n-1}}$ *– константы,* k *– мультииндекс* $k = \left(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}\right)$ *с нормой*

$$\langle k \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} (p+1) k_p. \tag{9}$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 2$ первые два слагаемые в уравнении (4) совпадают с первыми двумя слагаемыми в формуле (7), а третье слагаемое представляет собой полином $P_2 = 3\gamma w w'$. В силу формулы (9) норма мультииндекса k монома входящего в P_2 равна $1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3$, т.е. $n+1$. Значит, первый пункт метода математической индукции выполняется. Предположим, что формула (7) верна при $n = m$, докажем её истинность при $n = m+1$. При $n = m+1$ из (1) и (7) имеем:

$$D_R^{m+1} w = \left(\frac{d}{dz} + \gamma w\right)\left(w^{(m)} + \gamma^m w^{m+1} + P_m\left(w, w', \ldots, w^{(m-1)}\right)\right) = \tag{10}$$

$$= w^{(m+1)} + \gamma^{m+1} w^{m+2} + \gamma w w^{(m)} + (m+1)\gamma^m w^m w' + \gamma w P_m + P_m'.$$

Первые два слагаемые из формулы (10) соответствуют первым двум слагаемым формулы (7) для $n = m+1$. Остаётся показать, что оставшиеся слагаемые удовлетворяют заявленным ограничениям (8) на полином P_{m+1}. Так, норма мультииндекса третьего слагаемого, согласно формуле (9), равна $1 \cdot 1 + (m+1) \cdot 1 = (m+1) + 1$, то есть третье слагаемое удовлетворяет ограничениям на мономы, входящие в полином P_{m+1}. Четвёртое слагаемое имеет норму $1 \cdot m + (1+1) \cdot 1 = m + 2 = (m+1) + 1$, а значит также подходит.

Слагаемое $\gamma w P_m$ имеет мономы с нормой мультииндекса, равной $1 \cdot (k_0 + 1) + 2 \cdot k_1 + \ldots + m \cdot k_m = 1 + 1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + \ldots + m \cdot k_m = 1 + \langle k \rangle = (m+1) + 1$, то есть удовлетворяет требованию индукции. Докажем, что слагаемые полинома P_m' также удовлетворяют требованию. Мономы полинома P_m' двух типов:

$$k_j a_{k_0 k_1 \ldots k_{m-1}} w^{k_0} \left(w'\right)^{k_1} \ldots \left(w^{(j)}\right)^{k_j - 1} \left(w^{(j+1)}\right)^{k_{j+1}+1} \ldots \left(w^{(m-1)}\right)^{k_{m-1}}, \; j = 0, \ldots, m-2, \tag{11}$$

$$k_{m-1} a_{k_0 k_1 \ldots k_{m-1}} (w)^{k_0} \left(w'\right)^{k_1} \ldots \left(w^{(m-1)}\right)^{k_{m-1}-1} w^{(m)}. \tag{12}$$

Вычислим норму мультииндекса монома из формулы (11). Она равна

$$1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + \ldots + (j+1) \cdot \left(k_j - 1\right) + (j+2) \cdot \left(k_{j+1} + 1\right) + \ldots + m \cdot k_{m-1} =$$

$$= 1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + \ldots + (j+1) \cdot k_j + \ldots + m \cdot k_{m-1} + 1 = \langle k \rangle + 1 = (m+1) + 1.$$

Остаётся найти норму мультииндекса монома из формулы (12). Имеем

$$1 \cdot k_0 + 2 \cdot k_1 + \ldots + m \cdot \left(k_{m-1} - 1\right) + (m+1) \cdot 1 = \langle k \rangle + 1 = (m+1) + 1.$$

Таким образом, структура полинома P_{m+1} подтверждается. Для завершения доказательства требуется установить ограничение на k_0. Из условия $\langle k \rangle = m+2$, теперь обозначается через k мультииндекс из полинома P_{m+1}, получаем $k_0 = m + 2 - 2 \cdot k_1 - \ldots - (m+1) \cdot k_m$, так как целые $k_j \geq 0$, то максимально возможное значение $k_0 = m+2$. Но моном с мультииндексом $k = (m+2, 0, \ldots, 0)$ представляет собой второе слагаемое формулы (10), то есть в полином P_{m+1} не входит. Значение

$k_0=m+1$ невозможно, так как не существует мультииндекса k, удовлетворяющего условию $\langle k\rangle=m+2$. Таким образом, максимальное значение $k_0=m=(m+1)-1$. Теорема доказана.

Лемма. *Если решение уравнения* (1) *имеет подвижный полюс, то только первого порядка*.

Доказательство. Для определения порядка q подвижного полюса в уравнении (7) произведём замену $w=c_0(z-z_0)^{-q}$. Ведущими членами уравнения (7) являются w^n, слагаемые полинома (8) и, возможно, $\gamma^n w^{n+1}$. В первом случае $q+n=q\cdot k_0+(q+1)\cdot k_1+\ldots+(q+n-1)\cdot k_{n-1}$ или $q+n=(q-1)(k_0+k_1+\ldots+k_{2n-2})+\langle k\rangle$. Так как $\langle k\rangle=n+1$, то $(q-1)\cdot(k_0+k_1+\ldots+k_{2n-2}-1)=0$. Условие $k_0+k_1+\ldots+k_{2n-2}=1$ противоречит ограничению $\langle k\rangle=n+1$. Значит, $q=1$. Во втором случае $q+n=q(n+1)$. Откуда $q=1$.

Покажем, что существует $c_0\neq 0$. Подставим в формулу (1) $w=c_0(z-z_0)^{-1}$. Пусть $D_R^n w=S_n(c_0)(z-z_0)^{-(n+1)}$. Тогда

$$D_R^{n+1}w=D_R(D_R^n w)=D_R\left(S_n(c_0)(z-z_0)^{-(n+1)}\right)=S_n(c_0)(-(n+1))(z-z_0)^{-(n+2)}+$$

$$+\gamma c_0 S_n(c_0)(z-z_0)^{-(n+2)}=S_n(c_0)(\gamma c_0-n-1)(z-z_0)^{-(n+2)}.$$

Значит, $S_n(c_0)$ удовлетворяет рекурсивному соотношению

$$S_{n+1}(c_0)=(\gamma c_0-n-1)S_n(c_0),\ S_1(c_0)=c_0(\gamma c_0-1). \tag{13}$$

Из (13) находим условие на c_0:

$$\prod_{j=0}^{n}\left(c_0-\frac{j}{\gamma}\right)=0. \tag{14}$$

Очевидно, что в (14) есть $c_0\neq 0$. Лемма доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Голубев, В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В.В. Голубев. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1950. – 436 с.
2. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков: ГНТИУ, 1939. – 719 с.
3. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – М.: Мир, 1987. – 478 с.

М.А. ГУНДИНА
БНТУ (г. Минск, Беларусь)

СТРУКТУРА ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ

Асимптотическое разложения различных величин широко используются при получении как строгих решений важных теоретических и прикладных проблем математики, механики и т. д., так и получении асимптотических и численных оценок и приближенных решений.

Применение такого рода разложений зачастую являются единственным возможным способом получения важных сведений о поведении решения тех или иных задач[1].

Рассмотрим задачу об оценке напряженно-деформированного состояния в окрестности конца прямолинейной трещины нормального отрыва при условии плоской деформации в рамках теории пластичности. В этом случае метод асимптотических разложений позволяет отыскать первые члены рядов разложений напряжений и деформаций.

Тогда уравнения задачи в полярной системе координат в приращениях имеют вид [2]:

$$\delta\sigma_{rr,r}+(\delta\sigma_{rr}-\delta\sigma_{\varphi\varphi})/r+\delta\sigma_{r\varphi,\varphi}/r=0,\ \delta\sigma_{r\varphi,r}+2\delta\sigma_{r\varphi}/r+\delta\sigma_{\varphi\varphi,\varphi}/r=0, \tag{1}$$

$$\delta\varepsilon_{rr}=\delta u_{r,r},\ \delta\varepsilon_{\varphi\varphi}=\delta u_{\varphi,\varphi}/r+\delta u_r/r,\ \delta\varepsilon_{r\varphi}=\frac{1}{2}(\delta u_{\varphi,r}+\delta u_{r,\varphi}/r-\delta u_\varphi/r) \tag{2}$$