МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Задания для аудиторных, домашних и индивидуальных занятий по курсу «Математика» для студентов специальности **1-69 01 01 «Архитектура»**

Брест 2015

УДК 517.9
ББК 22.11

В соответствии действующей программой по высшей математике для студентов специальности 1-69 01 01 «Архитектура» подобраны задания к аудиторным, домашним занятиям, к аттестационной работе, перечислены экзаменационные вопросы и основные задачи семестра.

Составители: Дворниченко А.В., старший преподаватель,
Золотухина Л.С., старший преподаватель,
Лебедь С.Ф., доцент, к.ф.-м.н.,
Юхимук М.М., старший преподаватель.

Рецензент: Санюкевич А.В., доцент кафедры высшей математики учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н.

1. Элементы линейной алгебры.

1.1 Матрица. Действия над матрицами

Определение. Матрица – прямоугольная таблица элементов, расположенных в m строках и n столбцах.

Обозначается: $A_{m\times n}=\left[a_{ij}\right]$, где a_{ij} – элемент матрицы $A_{m\times n}$, стоящий в i-й строке и j-м столбце.

Определение. Если $m=n$, то матрица $A_{n\times n}$ называется квадратной.

Определение. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, а элементы главной диагонали равны единице, называется единичной и обозначается E.

$$E_{2\times 2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ E_{3\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Действия над матрицами:

1) Сумма матриц.

Если A и B – матрицы размерности $m\times n$, то сумма этих матриц есть матрица размерностью $m\times n$: $A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$.

Пример 1. Даны матрицы $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 3 & -4\end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix}5 & -2 & 6\\ -2 & 3 & 5\end{bmatrix}$,

тогда $A+B=\begin{bmatrix}2+5 & -2+(-2) & 3+6\\ 1+(-2) & 3+3 & -4+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -4 & 9\\ -1 & 6 & 1\end{bmatrix}$.

2) Умножение матрицы на действительное число.

Дана матрица $A_{m\times n}=\left[a_{ij}\right]$ и действительное число c, тогда $cA=\left[ca_{ij}\right]$.

Пример 2.

Дана матрица $A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 3 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 4\end{bmatrix}$ и число $c=-2$,

тогда $-2A=-2\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 3 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\cdot 2 & -2\cdot(-3) & -2\cdot 1\\ -2\cdot 3 & -2\cdot 1 & -2\cdot(-2)\\ -2\cdot 1 & -2\cdot(-1) & -2\cdot 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 6 & -2\\ -6 & -2 & 4\\ -2 & 2 & -8\end{bmatrix}$.

3) Произведение двух матриц**.**

Под произведением матриц $A_{m\times n}=\left[a_{ij}\right]$ и $B_{k\times p}=\left[b_{ij}\right]$ понимают такую матрицу $AB=C_{m\times p}=\left[c_{ij}\right]$, каждый элемент который находиться по правилу:

$$c_{ij}=\begin{bmatrix}a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots & a_{in}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ b_{3j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{bmatrix}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+a_{i3}\cdot b_{3j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}.$$

Замечание 1. Произведение $A_{m\times n}\cdot B_{k\times p}=C_{m\times p}$ возможно, если $n=k$, т.е. матрицы согласоны.

Замечание 2. В общем случае $AB\neq BA$.

Пример 3. Найти произведение матриц $A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 4 & -1\end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$.

Решение:

Так как A имеет размерность 2×3 и B имеет размерность 3×2, то матрицы согласованы и существует произведение AB размерностью 2×2.

$$AB=\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 4 & -1\end{bmatrix}_{2\times 3}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix}_{3\times 2}=\begin{bmatrix}2\cdot 1+(-3)\cdot 4+0\cdot 3 & 2\cdot 0+(-3)\cdot(-2)+0\cdot 5\\ 1\cdot 1+4\cdot 4+(-1)\cdot 3 & 1\cdot 0+4\cdot(-2)+(-1)\times 5\end{bmatrix}_{2\times 2}=\begin{bmatrix}-10 & 6\\ 14 & -13\end{bmatrix}.$$

Также существует произведение

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix}_{3\times 2}\cdot\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 4 & -1\end{bmatrix}_{2\times 3}=\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\\ 6 & -20 & 6\\ 11 & 11 & -2\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Аудиторные задания.

1.Найти: а) $3A+B$; б) $2A-3B$.

1) $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$.

2) $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 2\\ 2 & 5 & -3\end{bmatrix}$.

2. Найти AB и BA, если это возможно.

1) $A=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 4\end{bmatrix}$.

2) $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\\ -3 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -4\end{bmatrix}$.

3) $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

4) $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & -2\end{bmatrix}$.

5) $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$.

6) $A=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & -2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}$.

3. Составить систему уравнений, эквивалентную матричному уравнению:

1) $\begin{bmatrix}3 & -8\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\ 1\end{bmatrix}$,

2) $\begin{bmatrix}1 & -3 & -2\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & -4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$.

Домашнее задание.

1. Найти: а) $A-B$; б) $2A+7B$.

1) $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 3 & 4\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 8\\ 2 & -2\\ -4 & 3\end{bmatrix}$,

2) $A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ -4 & 3 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$.

2. Найти AB и BA, если это возможно.

1) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 2) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$.

3) $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1.2. Определители. Минор. Алгебраическое дополнение. Обратная матрица

Для каждой квадратной матрицы A вводиться число ΔA ($\det A$ или $|A|$), называемое определителем матрицы.

Определитель. $A_{2\times 2}=\left[a_{ij}\right]$ находиться по правилу:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

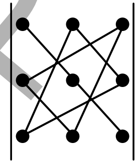
Пример 1. Дана матрица $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. Найти $|A|$.

Решение: $$|A|=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=5(-3)-2(3)=-15-6=-21.$$

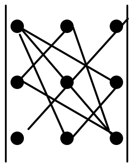
Определитель $A_{3\times 3}=\left[a_{ij}\right]$ находится по правилу «треугольника» (или Саррюса)

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}$$

Схематически правило треугольника можно изобразить следующим образом:

,

"+"



"–"

<u>Определение.</u> Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A n-го порядка называется определитель порядка $(n-1)$, полученный из ого

даннвычеркиванием i-й строки и j-го столбца матрицы A, т.е. строки и столбца в которых стоит этот элемент.

Пример 2.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -7 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}.$$ Найти миноры M_{23}, M_{31}

Решение:

Вычеркиваем 2-ю строку и 3-й столбец в ΔA, получаем

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -7 \\ 8 & -7 & 6 \end{vmatrix}, \text{тогда } M_{23}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -7 \end{vmatrix}=2(-7)-8(-1)=-14+8=-6.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -7 \\ 8 & -7 & 6 \end{vmatrix}, \text{тогда } M_{31}=\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}=(-1)(-7)-3(5)=7-15=-8.$$

<u>Определение</u>. Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы A называется число: $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Пример 3. Дана матрица $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$, найти A_{12}.

Решение:

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}=-(-30-12)=42.$$

<u>Теорема.</u> Определитель матрицы n-го порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца (дальше будем говорить “ряд”) на их алгебраические дополнения.

Сумма произведений элементов ряда на их алгебраические дополнения называется разложением определителя по данному ряду. Например, разложение по 2-й строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24}.$$

Пример 4. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

а) разложив по 2-й строке; б) разложив по 3-му столбцу; в) по определению.

Решение:

а) $|A| = 4A_{21} + (-2)A_{22} + 3A_{23} = 4(-M_{21}) + (-2)M_{22} + 3(-M_{23}) = -4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} +$

$+(-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4(9) + (-2)(9) + (-3)(-9) = -36 - 18 + 27 = -27$.

б)

$|A| = (-1)A_{13} + 3A_{23} + 4A_{33} = (-1)M_{13} + (-3M_{23}) + 4M_{33} = = (-1)\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} +$

$4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-10) + (-3)(-9) + 4(-16) = = 10 + 27 - 64 = -27$.

в) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2(-2)(4) + 4(-3)(-1) + 3(3)(1) - (-1)(-2)(1) - (-3)(3)(2) - 4(3)(4) =$

$= -16 + 12 + 9 - 2 + 18 - 48 = -27.$

<u>Определение.</u> Если матрица A невырождена, т.е. $\Delta A \neq 0$, то существует матрица, обратная данной, которая вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Пример 5. Найти обратную матрицу к матрице $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$.

Решение:

Найдем $\det A=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=6+0-4-0-8-2=-8\neq 0 \Rightarrow$ А – невырожденная.

Найдем алгебраические дополнения A_{ij}:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix}=6-8=-2$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(-2-4)=6,$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2-3=-5,$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-(-2-0)=2,$

$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2-0=2,$

$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(2+1)=-3,$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-4-0=-4,$

$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix}=-(4-0)=-4,$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=3-1=2.$

тогда $A^{-1}=\dfrac{1}{-8}\begin{bmatrix}-2 & 2 & -4\\ 6 & 2 & -4\\ -5 & -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$.

Аудиторные задания.

1. Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{vmatrix}$, 2. $\begin{vmatrix}2 & 9\\ -6 & 2\end{vmatrix}$, 3. $\begin{vmatrix}5 & 0\\ 2 & -3\end{vmatrix}$, 4. $\begin{vmatrix}0 & -8\\ 3 & 4\end{vmatrix}$, 5. $\begin{vmatrix}4 & 6\\ 2 & 3\end{vmatrix}$, 6. $\begin{vmatrix}-3 & 6\\ 4 & -8\end{vmatrix}$.

2. Дан определитель $\begin{vmatrix}5 & -2 & -3\\ 2 & 4 & -1\\ 4 & -5 & 6\end{vmatrix}$.

Найти: 1. M_{32}, A_{32}; 2. M_{21}, A_{21}; 3. M_{23}, A_{23}; 4. M_{33}, A_{33}.

3. Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, 2. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 3. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, 4. $\begin{vmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, 5. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -7 \\ 5 & -6 & 0 \end{vmatrix}$,

6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 6 \end{vmatrix}$, 7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$, 8. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -7 & 2 \\ 6 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

Домашнее задание

1. Дан определитель $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix}$.

Найти: 1. M_{22}, A_{22}; 2. M_{13}, A_{13}; 3. M_{31}, A_{31}; 4. M_{23}, A_{23}.

2. Вычислить определители, используя правило треугольника и теорему о разложении определителя по строке или столбцу.

1. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & -2 & 5 \end{vmatrix}$, 2. $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 7 & -8 & 2 \end{vmatrix}$, 3. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 6 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, 4. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$,

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 6 & 5 & 9 & 8 \\ 2 & 4 & 12 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & -1 \end{vmatrix}$, 6. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 12 \\ 1 & -1 & 0 & 8 \end{vmatrix}$.

1.3. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Рассмотрим данный вопрос на примере.

Решить СЛАУ $\begin{cases} 2x-6y+z=4, \\ x+7y-2z, \\ 3x-5y-z=1. \end{cases}$

а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса; в) матричным методом.

Решение:

а) Формулы Крамера имеют вид $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$; $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$; $z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$, где Δ – главный определитель системы; Δ_x, Δ_y, Δ_z - вспомогательные определители, полученные из Δ заменой соответствующего столбца столбцом свободных членов.

Найдем главный определитель системы, составленный из коэффициентов при переменных

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & 7 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -145+36-21+20-6=20.$$

Вычислим вспомогательные определители, заменяя столбец коэффициентов при соответствующих переменных столбцом свободных членов.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -3 & 7 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -28-15+12-7+40+18=20,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6+1-24+9+4+4=0,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 1 & 7 & -3 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 14+20+54-84+6+30=40.$$

$$x=\frac{20}{20}=1;\quad y=\frac{0}{20}=0;\quad z=\frac{40}{20}=2.$$

Ответ: (1;0;2).

б) метод Гаусса.

При помощи элементарных преобразований сведем систему к треугольному или трапециевидному виду.

Для удобства преобразований составим расширенную матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & -2 & -3 \\ 3 & -5 & -1 & 1 \end{array}\right)$.

Поменяв местами 1-ю и 2-ю строки матрицы, затем умножив первую строку на (-2) и сложив со 2-й, затем умножив 1-ю строку на (-3) и сложив с 3-й строкой, получим $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -2 & -3 \\ 0 & -20 & 5 & 10 \\ 0 & -26 & 5 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & -26 & 5 & 10 \end{array}\right)$.

Умножим 2-ю строку на 6 и сложим с 3-ей. Третью строку умножим на 2 и складываем со второй:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

Получим систему эквивалентную исходной, из которой решение усматривается непосредственно.

$$\begin{cases} x + 7y - 2z = -3, \\ \quad 2y + z = 2, \\ \qquad z = 2. \end{cases}$$

Отсюда, $2y = 2 - z, \quad y = 0$

$x = -3 + 2z - 7y, \quad x = 1$.

Ответ: (1;0;2).

в) матричный метод.

Введем следующие матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & 7 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда система может быть записана в виде матричного уравнения $A \cdot X = B$, решение которого имеет вид $X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} - обратная матрица. Т.к. $\det A \neq 0$, то $\exists A^{-1}$. По определению $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{*}$, где A^{*} - присоединенная матрица.

A^* получаем, транспонировав матрицу, составленную из алгебраических дополнений матрицы *A*.

$A_{11} = +\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3$; $\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -1$; $\quad A_{31} = +\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 5$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5$; $\quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5$; $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5$

$A_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -16$; $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -28$; $\quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 20$

$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -5 & -5 & 5 \\ -16 & -28 & 20 \end{pmatrix}$. Тогда $A^{-1} = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -5 & -5 & 5 \\ -16 & -28 & 20 \end{pmatrix}$,

$$X = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -5 & -5 & 5 \\ -16 & -28 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для удобства вычислений найдем сначала произведение A^*B, а затем полученную матрицу столбец умножим на $\dfrac{1}{20}$.

$$X = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 3\cdot 4 & + & (-1)\cdot(-3) & + & 5\cdot 1 \\ (-5)\cdot 4 & + & (-5)\cdot(-3) & + & 5\cdot 1 \\ (-16)\cdot 4 & + & (-28)\cdot(-3) & + & 20\cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (1;0;2).

Аудиторные задания.

Решить СЛАУ а) методом Крамера, б) методом Гаусса, в) матричным методом.

1. $\begin{cases} x + 2y - 2z = -2, \\ 5x + 9y - 4z = -3, \\ 3x + 4y - 5z = -3. \end{cases}$ $\quad$ 2. $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 13, \\ 3x - 4y - 3z = 1, \\ 3x + y - z = 2. \end{cases}$ $\quad$ 3. $\begin{cases} x + 2y - 2z = 3 \\ 5x + 8y - 6z = 14 \\ 3x + 4y - 2z = 8 \end{cases}$

Домашнее задание.

Решить СЛАУ а) методом Крамера, б) методом Гаусса, матричным методом.

1. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1, \\ 2x + 3y - z = 1, \\ x - y + 2z = 3. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x + 5y + 2z = -1, \\ x + 2y - 3z = 5, \\ 5x + 12y + z = 10. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x - 5y + 2z = 4, \\ x - 3y + 2z = 4, \\ 5x - 11y + 6z = 12. \end{cases}$

2. <u>Элементы векторной алгебры.</u>

2.1 Действия над векторами

<u>Определение</u>. Вектором $\overrightarrow{AB}$ называется направленный отрезок. Точка A - начало вектора, точка B - конец вектора.

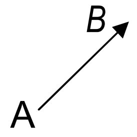


рис. 2.1

Векторы обозначают или $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$, или $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \ldots$

Если $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$, то $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)}$$

Если $\vec{a} = (x;y;z)$, то длина вектора

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Пример 1. Найти длину $\overrightarrow{PQ}$, если $P(4;1)$ и $Q(7;-3)$.

Решение:

$\overrightarrow{PQ} = (7-4; -3-1) = (3;-4)$. Тогда $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Если $\vec{a} = (x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b} = (x_b; y_b; z_b)$, то суммой называется вектор

$$\boxed{\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (x_a + x_b; y_a + y_b; z_a + z_b)}$$

.

Пример 2. Найти сумму векторов $\vec{a} = (2;3)$ и $\vec{b} = (4;1)$.

Решение: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (2+4; 3+1) = (6;4)$.

Если $\vec{a} = (x;y;z)$ и $\lambda \in R$, то произведением вектора на число называется вектор

$$\boxed{\lambda\vec{a} = (\lambda x; \lambda y; \lambda z).}$$

Пример 3. Найти $3\vec{a}$, если $\vec{a} = (-1;0;2)$.

Решение: $3\vec{a} = 3(-1;0;2) = (-3;0;6)$.

Замечание. Векторы коллинеарны и одинаково направлены, $\vec{a} \uparrow\uparrow \lambda\vec{a}$, если $\lambda > 0$; векторы коллинеарны и противоположно направлены, $\vec{a} \uparrow\downarrow \lambda\vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Утверждение. Пусть векторы $\vec{i} = (1;0;0)$, $\vec{j} = (0;1;0)$ и $\vec{k} = (0;0;1)$ образуют ортонормированный базис $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. Если вектор имеет координаты $\vec{a} = (x;y;z)$, тогда разложение $\vec{a}$ в базисе $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Аудиторные задания

1. Найти $|\vec{a}|$, если

а) $\vec{a} = (4;0)$, б) $\vec{a} = (-5;12)$, в) $\vec{a} = (5;12)$, г) $\vec{a} = (-8;-6;5)$.

2. Найти длину вектора $\overline{AB}$, если:

а) $A = (2;1)$, $B = (1;4)$; *б)* $A = (1;-3;7)$, $B = (-2;4;-3)$.

3. Найти $6\vec{a} - 5\vec{b}$, если:

а) $\vec{a} = (4;3)$, $\vec{b} = (2;0)$; *б)* $\vec{a} = (3;4)$, $\vec{b} = (5;1)$; *в)* $\vec{a} = (1;1;0)$, $\vec{b} = (0;-2;4)$.

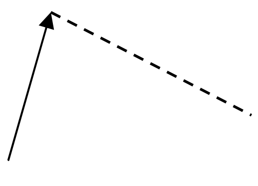
4. Найти расстояние между точками:

а) $(1,4,2)$ и $(2,1,5)$; *б)* $(-3,2,1)$ и $(4,0,-2)$.

5. Найти $|\vec{a} + \vec{b}|$, если:

а) $\vec{a} = (3;-2;1)$, $\vec{b} = (-4;3;2)$; б) $\vec{a} = (3;-2;1)$, $\vec{b} = (-4;3;2)$.

2.2. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов



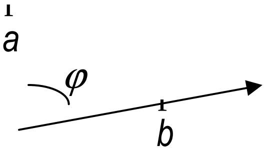


рис. 2.2

<u>Определение.</u> Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые. *Скалярным* произведением двух векторов называется число, равное

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi}$$

где φ - угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 2).

Свойства скалярного произведения векторов.

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.
3. $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Если $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ и $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, то в координатной форме скалярное произведение вычисляется по формуле:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}$$

Пример 3. Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}=3\vec{i}+7\vec{j}$ и $\vec{b}=9\vec{i}-4\vec{j}$?

Решение: Найдем скалярное произведение векторов: $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot9+7\cdot(-4)=27-28=-1\neq0$. Значит, вектора не перпендикулярны.

Пример 4. Найти угол φ между векторами $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$.

Решение: По определению $\vec{a}\cdot\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi=\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cos\varphi=\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{84}.$$

Т.к. $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot1+(-1)\cdot1+3\cdot2=7$, то $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{7}{\sqrt{84}}=\dfrac{\sqrt{21}}{6}\approx0.764$.

Значит $\varphi=\arccos\dfrac{\sqrt{21}}{6}$, или $\varphi=40,2^0$.

<u>Определение</u>. Пусть $\vec{a}=x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k}$ и $\vec{b}=x_b\vec{i}+y_b\vec{j}+z_b\vec{k}$. *Векторным* произведением двух векторов называется вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) длина этого вектора равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec a$ и $\vec b$: $\left|\vec a\times\vec b\right|=\left|\vec a\right|\left|\vec b\right|\sin\varphi$, где $\varphi=\left(\widehat{\vec a;\vec b}\right)$.

(геометрический смысл векторного произведения);

2) $\vec c\perp\alpha,\left\{\vec a,\vec b\right\}\subset\alpha$, т.е. $\vec c\perp\vec a$, $\vec c\perp\vec b$;

3) $\vec c$ направлен таким образом, что кратчайший поворот от первого из перемножаемых векторов ко второму осуществляется против часовой стрелке, если смотреть с конца вектора $\vec c$.

<u>Утверждение.</u> В координатной форме векторное произведение вычисляется по формуле:

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\x_a&y_a&z_a\\x_b&y_b&z_b\end{vmatrix}=\vec i\begin{vmatrix}y_a&z_a\\y_b&z_b\end{vmatrix}-\vec j\begin{vmatrix}x_a&z_a\\x_b&z_b\end{vmatrix}+\vec k\begin{vmatrix}x_a&y_a\\x_b&y_b\end{vmatrix}.$$

Пример 5. Найти $\vec a\times\vec b$, если $\vec a=2\vec i-\vec j+3\vec k$ и $\vec b=3\vec i+4\vec j+\vec k$.

Решение:

По определению,

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\2&-1&3\\3&4&1\end{vmatrix}=\vec i\begin{vmatrix}-1&3\\4&z_b\end{vmatrix}-\vec j\begin{vmatrix}2&3\\3&1\end{vmatrix}+\vec k\begin{vmatrix}2&-1\\3&4\end{vmatrix}=-13\vec i+7\vec j+11\vec k.$$

Свойства векторного произведения векторов

1. $\vec a\times\vec b$ перпендикулярен $\vec a$ и $\vec b$.
2. $\vec a\times\vec b=-\vec b\times\vec a$.
3. $\vec a\parallel\vec b\Leftrightarrow\vec a\times\vec b=\vec 0$.
4. $\vec a\times\left(\vec b+\vec c\right)=\vec a\times\vec b+\vec a\times\vec c$.
5. $\left(\alpha\vec a\right)\times\vec b=\alpha\left(\vec a\times\vec b\right)=\vec a\times\left(\alpha\vec b\right)$.

Пример 6. Даны вершины параллелограмма $A(0;0), B(2;4), C(5;1); D(7;5)$. Найти его площадь.

Решение:

Параллелограмм построен на векторах:

$\vec a=\overrightarrow{AB}=(2-0;4-0)=(2;4)=2\vec i+4\vec j+0\vec k$;

$\vec b=\overrightarrow{AC}=(5-0;5-0)=(5;1)=5\vec i+\vec j+0\vec k$.

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 2 & 4 & 0\\ 5 & 1 & 0\end{vmatrix}=0\vec i-0\vec j+\vec k\begin{vmatrix}2 & 4\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-18\vec k,$$

тогда $S_{ABCD}=\left|\vec a\times\vec b\right|=\sqrt{0^2+0^2+(-18)^2}=18$ (кв. ед. изм).

<u>Определение</u>. *Смешанным* произведением трех векторов $\vec a,\vec b,\vec c$ называется число, равное векторному произведению двух векторов, скалярно умноженному на третий вектор.

Если $\vec a=x_a\vec i+y_a\vec j+z_a\vec k;\ \vec b=x_b\vec i+y_b\vec j+z_b\vec k;\ \vec c=x_c\vec i+y_c\vec j+z_c\vec k$, то смешанное произведение трех векторов вычисляется по формуле:

$$\vec a\vec b\vec c=\begin{vmatrix}x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\\ x_c & y_c & z_c\end{vmatrix}.$$

Свойства смешанного произведения векторов.

1. $\vec a\vec b\vec c=\vec b\vec c\vec a=\vec c\vec a\vec b$.
2. $\vec a(\vec b+\vec d)\vec c=\vec a\vec b\vec c+\vec a\vec d\vec c$.
3. $\vec a(\lambda\vec b)\vec c=\vec a\vec b(\lambda\vec c)=\lambda(\vec a\vec b\vec c)$.
4. Если $\vec a\vec b\vec c=0$, то векторы компланарны.

<u>Геометрический смысл смешанного произведения</u>. Смешанное произведение трех некомпланарных векторов численно равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «+», если тройка векторов правая, и со знаком «-», если тройка левая.

$$V=\pm\begin{vmatrix}x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\\ x_c & y_c & z_c\end{vmatrix}.$$

Пример 7. Установить, компланарны ли векторы $\vec a=(3;-2;1)$, $\vec b=(7;8;-1)$, $\vec c=(-6;4;-2)$.

Решение: Найдем смешанное произведение этих векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 7 & 8 & -1\\ -6 & 4 & -2\end{vmatrix}=-48+28-12+48+12-28=0,$$ значит, векторы компланарны.

Аудиторные задания.

Найти скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если:

1. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\frac{\pi}{4}$.
2. $|\vec{a}|=2$, $|\vec{a}|=2$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\frac{3\pi}{4}$.
3. $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=\frac{1}{2}$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\frac{\pi}{2}$.
4. $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$.
5. $\vec{a}=\overrightarrow{PQ}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{PR}$, где $P(1,0,2), Q(1,1,-1), R(2,3,5)$.

Установить, параллельны или перпендикулярны вектора.

6. $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.
7. $\vec{a}=\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$.
8. $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{j}+3\vec{k}$.
9. $\vec{a}=\vec{j}$ и $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$.

Найти $\vec{a}\times\vec{b}$:

10. $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$
11. $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}$; $\vec{b}=\vec{j}+4\vec{k}$
12. Найти площадь параллелограмма ABCD, если $A(0;0;0)$, $B(1;5;4)$, $C(2;-1;3)$.
13. Найти площадь треугольника ABC, если $A(1;2;-1)$, $B(2;1;4)$, $C(3;5;2)$.
14. Найти площадь треугольника, если $A(0;0)$, $B(3;5)$, $C(2;-1)$.
15. Установить компланарность векторов $\vec{a}=(13;0;1)$; $\vec{b}=(-2;-4;5)$; $\vec{c}=(0;-1;1)$.

Домашнее задание

Найти скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

1. $|\vec a|=6$, $|\vec b|=8$, угол между $\vec a$ и $\vec b$ равен $\frac{\pi}{4}$.
2. $\vec a=4\vec i-3\vec j+9\vec k$ и $\vec b=\vec i-7\vec j$.
3. $\vec a=\overrightarrow{PQ}$ и $\vec b=\overrightarrow{PR}$, где $P(3,-5,2), Q(2,1,-1), R(1,3,5)$.

Установить параллельны или перпендикулярны вектора.

4. $\vec a=7\vec i+3\vec j-4\vec k$ и $\vec b=\vec i+\vec j+\vec k$.
5. $\vec a=\vec i+2\vec j+3\vec k$ и $\vec b=-\vec i-2\vec j+3\vec k$.

Найти $\vec a\times\vec b$:

6. $\vec a=2\vec i-3\vec j+\vec k$; $\vec b=3\vec i-\vec j+2\vec k$
7. $\vec a=6\vec i-\vec j$; $\vec b=\vec j+5\vec k$
8. Найти площадь треугольника *ABC*, если $A(1;2;-1)$, $B(2;1;4)$, $C(3;5;2)$.
9. Найти площадь треугольника, если $A(0;0)$, $B(3;5)$, $C(2;-1)$.
10. Установить компланарность векторов $\vec a=(-1;3;7)$; $\vec b=(0;-5;1)$; $\vec c=(3;-1;0)$.

3. Элементы аналитической геометрии

3.1. Прямая на плоскости

На плоскости любая линия рассматривается как множество точек, обладающих общим для всех точек свойством.

Виды уравнения прямой на плоскости

1. Общее уравнение прямой.

$$Ax+By+C=0, \qquad (1)$$

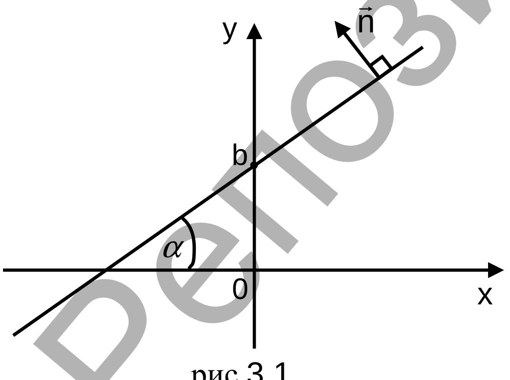


рис.3.1.

где A,B,C константы, причем $A^2+B^2\neq 0$, $\vec n=(A;B)$ - вектор нормали к данной прямой.

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

$$y=kx+b, \qquad (2)$$

где $k=tg\alpha$ - угловой коэффициент прямой; α - угол наклона прямой к оси абсцисс (см. рис. 3.1).

3. Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$.

$$y-y_0=k\left(x-x_0\right), \quad (3)$$

4. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}, \quad (4)$$

где $M_1\left(x_1;y_1\right)$ и $M_2\left(x_2;y_2\right)$ заданые точки.

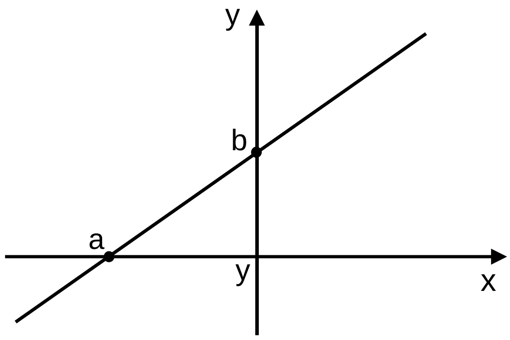


рис. 3.2

5. Уравнение прямой в отрезках.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (5)$$

$a\neq 0, b\neq 0$.

6. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0\left(x_0;y_0\right)$ и заданный вектор нормали $\vec{n}=\left(A;B\right)$.

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0 \qquad (6)$$

Пример 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(2;1)$ с угловым коэффициентом $k=\frac{1}{2}$.

Решение: Воспользуемся уравнением (3): $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$. По условию, $x_0=2$, $y_0=1$ и $k=\frac{1}{2}$. Тогда $y-1=\frac{1}{2}\left(x-2\right)\Rightarrow\Rightarrow y-1=\frac{1}{2}x-2\Rightarrow y=\frac{1}{2}x-1$.

Пример 2. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $(-5;-3)$ и $(6;1)$.

Решение: Воспользуемся уравнением (4): $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

По условию, $x_1=-5, y_1=-3, x_2=6, y_2=1$. Тогда $\frac{y-(-3)}{1-(-3)}=\frac{x-(-5)}{6-(-5)}\Rightarrow\frac{y+3}{4}=\frac{x+5}{11}\Rightarrow 11\left(y+3\right)=4\left(x+5\right)\Rightarrow 11y+33=4x+20$
$\Rightarrow 4x-11y-13=0$.

3.2. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Две прямые на плоскости пересекаюся или не пересекаются, т. е. параллельны.

Пусть прямые заданы уравнениями:

$$l_1:\ y = k_1x + b_1, \qquad l_2:\ y = k_2x + b_2.$$

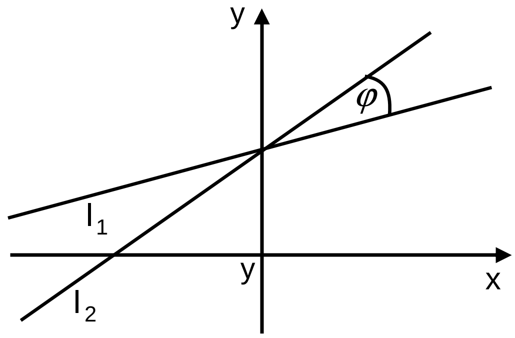


рис. 3.3

1. угол между пересекающимися прямыми l_1 и l_2 равен:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

2. Частный случай пересечения прямых: $l_1 \perp l_2$, тогда

$$k_1k_2 = -1.$$

3. Прямые не пересекаются, т.е. $l_1 \| l_2$, тогда

$$k_1 = k_2.$$

Расстояние от точки $P_0(x_0;y_0)$ до прямой l, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d(P_0;l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример 3. Найти уравнение прямой l_2, проходящей через точку $M(6;8)$ и параллельной прямой $l_1: 3x - 5y - 11 = 0$.

Решение: Выразим из уравнения прямой $3x - 5y - 11 = 0$ переменную y, получим $y = \frac{3}{5}x - \frac{11}{5}$. Угловой коэффициет прямой $k_1 = \frac{3}{5}$. Тогда,

$$k_2 = \frac{3}{5}\ y - 8 = \frac{3}{5}(x - 6) \Rightarrow 5y - 40 = 3x - 18 \Rightarrow 3x - 5y + 22 = 0.$$

Пример 4. Найти расстояние от точки $P(3;7)$ до прямой $2x - 4y + 5 = 0$.

Решение:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2\cdot 3 - 4\cdot 7 + 5|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{|-17|}{\sqrt{20}} = \frac{17}{\sqrt{20}}.$$

Аудиторные задания.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(-2;3)$ с заданным угловым коэффициентом.

а) $k = 6$; б) $k = -3$.

2. Составить уравнение прямой с заданной точкой и заданным вектором нормали: $M(2;3)$, $\vec{n} = (4;5)$

3. Найти расстояние от точки $M\left(\frac{3}{2};\frac{2}{3}\right)$ до прямой $2x - y + 5 = 0$.

4. Даны вершины треугольника ABC. A(3;2), B(-4;1), C(5;-1).
Записать: а) уравнение стороны AB;
б) уравнение высоты CH;
в) уравнение медианы BM;
г) расстояние от точки A до прямой BC;
д) уравнение прямой AL, параллельной стороне BC;
е) площадь треугольника ABC.

Домашнее задание.

Даны вершины треугольника ABC. A(-6;2), B(5;0), C(3;-1).
Записать: а) уравнение стороны BC;
б) уравнение высоты AH;
в) уравнение медианы BM;
г) расстояние от точки A до прямой BC;
д) уравнение прямой BL, параллельной стороне AC;
е) площадь треугольника ABC.

4. Введение в математический анализ.

4.1. Предел функции

Определение. Если любому элементу $x \in D$ по определенному правилу ставиться в соответствие элемент $y \in E$, то говорят, что на D задана функция $y = f(x)$.

Функция задается аналитически, графически, таблично и описательно.

Частное значение функции $f(x)$ в точке $x = a$ записывают так : $f(a)$.
Например, если $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$, то $f(0) = 2$, $f(2) = 8 - 6 + 2 = 4$.

Основные элементарные функции :

1) показательная функция $y = a^x, a > 0, a \neq 1$
2) степенная функция $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$
3) логарифмическая функция $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$
4) тригонометрические функции $y = \sin x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$
5) обратные тригонометрические функции

$$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = arctgx, y = arcctgx.$$

Определение. Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операции й (сложения, вычитания, умножения, деления) и операций взятия функции от функции, называется элементарной функцией.

В данном курсе рассматриваются элементарные функции.

Например, $y=\sin^2 5x$, $y=\sqrt{x-3}\log_{10}7x$.

Определение. Число L называется пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к a, если для значений аргумента близких к $x=a$, значение функции $f(x)$ сколь угодно мало отличается от L.

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \forall (x_n)\ ((x_n\to a,\ x_n\in D(f), x_n\neq a)\Rightarrow f(x_n)\to L).$$

Теоремы о пределах.

Пусть для $y=f(x)$ и $y=g(x)$ $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\exists\lim\limits_{x\to a} g(x)$,

тогда

1. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to a} kf(x)=k\lim\limits_{x\to a} f(x)$, где $k\in R$.
4. $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\lim\limits_{x\to a} g(x)$.
5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$.
6. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)>0$.

Пример 1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-1}{x^4+1}$

Решение: Подставляя в функцию предельное значение переменной x, получим неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для раскрытия неопределенности такого вида в числителе и знаменателе дроби вынесем за скобки старшую степень всего выражения:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5(1-\frac{1}{x^5})}{x^5(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^5}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^5}}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^5}}=\frac{1-0}{0+0}=\frac{1}{0}=\infty.$$

б) $\lim\limits_{x\to 30}\frac{900-x^2}{\sqrt[3]{x-3}-3}$.

Решение: Для вычисления данного предела необходимо раскрыть неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Чтобы раскрыть неопределенность такого вида, разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to 30}\frac{(30-x)(30+x)\left(\left(\sqrt[3]{x-3}\right)^2+3\sqrt[3]{x-3}+9\right)}{\left(\sqrt[3]{x-3}-3\right)\left(\left(\sqrt[3]{x-3}\right)^2+3\sqrt[3]{x-3}+9\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 30}\frac{(30-x)(30+x)\left(\left(\sqrt[3]{x-3}\right)^2+3\sqrt[3]{x-3}+9\right)}{x-30}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(30+x)\left(\left(\sqrt[3]{x-3}\right)^2+3\sqrt[3]{x-3}+9\right)=-60\cdot(9+9+9)=-1620.$$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$

Решение: Подставляя в функцию предельное значение переменной x, получим неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)(x-\frac{5}{2})}{(x-2)(x+5)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-5}{x+5}=-\frac{1}{7}.$$

Аудиторные задания.

Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$; 3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7-x^2+1}{2x^7+x^3+300}$; 6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^9+6x+3}{x^{10}-x-1}$; 7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$; 8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+x^2+1}{3x^2+4}$;

9. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$; 10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$; 11 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-7x+6}$; 12. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$;

13. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; 14. $\lim\limits_{x\to 13}\dfrac{x^2-169}{\sqrt{x+3}-4}$; 15. $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{x^2-121}{\sqrt{x-2}-3}$; 16. $\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{x-12}{\sqrt{x+2}-\sqrt{14}}$.

Домашнее задание.

Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+5x\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-100x+3}{5x^4+7x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4-100x+3}{5x^4+7x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{500x^3-x^2-5}{x^4+x}$;

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x^5+4x}{x\ \ +x+5}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+8}{x+2}$;

8) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$; 9) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{x-16}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x}-\sqrt{4x^2+x}\right)$;

11) $\lim\limits_{x\to-9}\dfrac{x^2+11x+18}{x^2+4x-45}$; 12) $\lim\limits_{x\to-10}\dfrac{x^3+1000}{x^2+8x-20}$;

13) $\lim\limits_{x\to 15}\dfrac{x-15}{x^2-14x-15}$; 14) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+5x+6}{3x+x^2}$;

15) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2+6x-72}{2x^2-7x-30}$; 16) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-8x+7}{x^2-5x-14}$.

4.2. Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1.$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=e,\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=(1^{\infty})=e.$$

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{h\to 0}\left(1+2h\right)^{1/h}$.

Решение:

$$\lim_{h\to 0}\left(1+2h\right)^{1/h}=\lim_{h\to 0}\left(1+2h\right)^{2/2h}=\lim_{h\to 0}\left(\left(1+2h\right)^{1/2h}\right)^{2}=(1^{\infty})=\left(\lim_{h\to 0}\left(1+2h\right)^{1/2h}\right)^{2}=e^{2}.$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x-5}\right)^{2x+3}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x-5}\right)^{2x+3}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(3x-5)+4}{3x-5}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x-5}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{3x-5}\right)^{\frac{3x-5}{4}}\right)^{\frac{4}{3x-5}\cdot(2x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{8x+12}{3x-5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x+12}{3x-5}}=e^{\frac{8}{3}}.$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{7x}=7\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=7\cdot 1=7.$$

4.3. Бесконечно малые функции

<u>Определение</u>. Функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой функцией в точке $x=x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

Эти функции обозначаются $\alpha(x),\ \beta(x),\ \gamma(x)$

<u>Определение</u>. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными $\alpha(x)\sim\beta(x)$. в точке $x=x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

<u>**Теорема.**</u> Пусть $\alpha(x)\sim\alpha_1(x),\ \beta(x)\sim\beta_1(x)$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций.

$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$
$tg\alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$
$arctg\alpha(x) \sim \alpha(x)$
$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
$\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{1}{n}\alpha(x)$

Пример 4. Найти пределы, используя эквивалентность функции.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\arcsin^2 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-4x)}{e^{7x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+7x^3}-1}{arctg^2 2x}$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\arcsin^2 5x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left[\sin^2 3x \sim (3x)^2 = 9x^2, \arcsin^2 5x \sim (5x)^2 = 25x^2\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{9x^2}{25x^2} = \frac{9}{25}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-4x)}{e^{7x}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left[\ln(1-4x) = \ln(1+(-4x)) \sim -4x, e^{7x}-1 \sim 7x\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-4x}{7x} = -\frac{4}{7}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+7x^3}-1}{arctg^2 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left[\sqrt{1+7x^3}-1 \sim 7x^3, arctg^2 2x \sim (2x)^2 = 4x^2\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{7x^3}{4x^2} = \frac{7}{4}\lim\limits_{x\to 0} x = 0.$

Аудиторные задания.

1. Вычислить пределы:

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{4-0.5x}$; 2). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{9x+7}{9x+8}\right)^{18x-1}$; 3). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{2x+5}$.

2. Вычислить пределы, используя эквивалентность функций:

1). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 2x}{\arcsin^2 3x^2}$; 2). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{tg^2 9x}$; 3). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{arctg 5x}$;

4). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{e^{4x}-1}$; 5). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x^3)}{e^x-1}$; 6). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2 3x}{e^{7x^2}-1}$;

7). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{arctg^2 x}$; 8). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-8x^4}-1}{tg^2 2x^2}$; 9). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{arctg^2 2x}$;

10). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+4x^2}-1}{tg^2 x}$; 11). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+7x^3}-1}{\ln(1-6x^3)}$; 12). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x}{arctg 5x^2}$.

Домашнеезадание.

Вычислить пределы:

1). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3 2x}{\arcsin^2 3x^2}$; 2). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{arctg 5x}$; 3). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{e^{4x}-1}$; 4). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{arctg^2 5x}$;

5). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^2 3x}{e^{7x^2}-1}$; 6). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+4x^3)}{e^x-1}$; 7). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+7x^3}-1}{\ln(1-6x^3)}$; 8). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x}{tg^2 9x}$;

9). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x-5}\right)^{4x+3}$; 10). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{0.5x-1}$; 11). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{5-9x}$; 12). $\lim\limits_{x\to0}\left(1-4x\right)^{\frac{5}{7x}}$.

5. <u>Дифференциальное исчисление функции одной переменной</u>

<u>Определение</u>. Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

Геометрический смысл производной: $f'(x_0)=tg\alpha=k$.

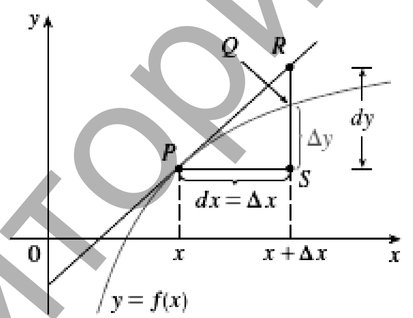


рис. 5.1

5.1. Правила дифференцирования

1. $(c)'=0$	2. $(c\cdot f)'=c\cdot f'$
3. $(f\pm g)'=f'\pm g'$	4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\cdot g-g'\cdot f}{g^2}$
5. $(f\cdot g)'=f'\cdot g+g'\cdot f$	6. $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

5.2.Таблица производных

1. $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$	

2. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$	8. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
3. $\left(e^x\right)' = e^x$	9. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	10. $(arc\sin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $(\cos x)' = -\sin x$	12. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
7. $(\sin x)' = \cos x$	13. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Найти производную функций:

Пример 1.

$$y = x^7 \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{6}{x} - \frac{\sqrt[5]{x^6}}{x^5} + 68.$$

Решение: Преобразуем функцию, используя свойства степеней.

$$y = x^{\frac{22}{3}} + 6x^{-1} - x^{\frac{-19}{5}} + 68$$

$$y' = (x^{\frac{22}{3}})' + 6(x^{-1})' - (x^{\frac{-19}{5}})' + 68' = \frac{22}{3} x^{\frac{19}{3}} - \frac{6}{x^2} + \frac{19}{5} x^{-\frac{24}{5}}.$$

Пример 2. $y = \dfrac{e^{\sqrt{x^2-3x-9}}}{\sin x^3}$.

Решение:

$$\left(\frac{e^{\sqrt{x^2-3x-9}}}{\sin x^3}\right)' = \frac{\left(e^{\sqrt{x^2-3x-9}}\right)'\cdot\left(\sin x^3\right)-\left(e^{\sqrt{x^2-3x-9}}\right)\cdot\left(\sin x^3\right)'}{\left(\sin x^3\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{\sqrt{x^2-3x-9}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-3x-9}}\cdot(2x-3)\cdot\sin x^3 - e^{\sqrt{x^2-3x-9}}\cdot\cos x^3\cdot 3x^2}{\left(\sin x^3\right)^2}.$$

Аудиторные задание.

Найти производные функций.

1. $y = 3x^3 + 4x^2 - x - 2;$
2. $y = x - \ln 2 + e^x;$
3. $y = \sin\sqrt{3} + 3\cos 6x;$
4. $y = \dfrac{tgx - 3ctgx}{\sqrt{2}};$
5. $y = \dfrac{1}{4\sqrt{5}}\ln 7x;$
6. $y = arctg\,4x + 3\pi;$
7. $y = \dfrac{(2x^2-1)}{3x^3};$
8. $y = e^{2x}\cdot\sin x;$
9. $y = \dfrac{\cos^2 3x}{3\sin 6x};$
10. $y = x^5\cdot\cos x;$
11. $y = \left(3x^2 - 6x + 8\right)^{21};$
12. $y = \sin\sqrt{x};$
13. $y = \dfrac{x^4 - 8x^2}{2(x^2-4)};$
14. $y = \dfrac{2x-1}{4}\cdot\sqrt{2+x-x^2};$
15. $y = \dfrac{\sin^2 4x}{4\cos 8x};$
16. $y = \dfrac{1}{2}arctg\,\dfrac{e^x}{2};$
17. $y = e^{-2x}\cdot\arcsin(e^{2x});$
18. $y = \sin^6 7x;$
19. $y = \dfrac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2+4x}};$
20. $y = \ln\left(1 + 2^x\right);$
21. $y = \dfrac{\cos^2 4x}{\sin 8x};$
22. $y = arctg\,\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x};$
23. $y = \ln\left(3x^2 - 7x - 8\right);$
24. $y = \arcsin e^x;$

Найти значение производной в точке x_0.

25. $y = 3x^3 + 4x^2 - x - 2$ в $x_0 = 2;$

26. $y = \dfrac{1}{2x+1}$ в $x_0 = 3.$

Домашнее задание.

Найти производные функций:

1. $y=\frac{(x^8+1)}{12x^{12}}$;

2. $y=2\sqrt{e^x+1}$;

3. $y=\frac{\sin^2 2x}{2\cos 4x}$;

4. $y=\frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$;

5. $y=\frac{1}{2}tg^3 x-\cos 4x$;

6. $y=\ln(6x^2-x)$;

7. $y=\frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$;

8. $y=\frac{2}{3}\sqrt{(tg\,e^x)}$;

9. $y=\frac{\cos^2 2x}{4\sin 4x}$;

10. $y=\sqrt{\frac{2}{3}}arctg(3x-1)$;

11. $y=-\frac{1}{2}\ln tg\frac{x}{2}$;

12. $y=x\cdot\arcsin 7x$;

13. $y=\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{120x^5}$;

14. $y=\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)$;

15. $y=\ln(3x^5-7x)^2$;

16. $y=\frac{\sin^2 7x}{7\cos 14x}$;

17. $y=\ln\frac{x-1}{x+1}-arctg\,x$;

18. $y=(ctg\,3x)\cdot 2e^x$;

19. $y=\frac{\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$;

20. $y=x\cdot e^{tg\,x}$;

21. $y=\frac{\cos^2 8x}{16\sin 16x}$.

Найти значение производной в точке x_0

22. $y=\sqrt{x}\cdot(x+2)$ в $x_0=4$.

6. Интегральное исчисление функции одной переменной.

6.1. Неопределенный интеграл. Правила интегрирования. Таблица интегралов

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на данном промежутке (a,b), если $F'(x)=f(x)$ на этом промежутке.

Если у данной функции существует первообразная, то эта первообразная не является единственной. Две различные первообразные от одной и той же функции отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Определение . *Неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на некотором промежутке (a,b) называется множество всех первообразных этой функции на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$, т. е.

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$ где C - произвольная постоянная.

Нахождение неопределенного интеграла от функции f(x) называется *интегрированием* данной функции. Эта операция является обратной *дифференцированию*.

Основные правила (теоремы) интегрирования.

1. $\int af(x)dx = a\int f\left(x\right)dx, a = const.$

2. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

3. Результат интегрирования формально не изменится при замене переменной интегрирования на любую дифференцируемую функцию от нее, то есть если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ и $u = u(x)$ - дифференцируемая функция, то $\int f(u)du = F(u) + C.$

Таблица простейших неопределенных интегралов.

1	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$	2.	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$
3.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.	4	$\int e^x dx = e^x + C$.
5.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$.	6.	$\int \cos x dx = \sin x + C.$
7.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$	8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$
9	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$	10.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \lvert \frac{x-a}{x+a} \rvert + C$
11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$	12.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \rvert .$

Для нахождения неопределенного интеграла используется три основных метода: непосредственное интегрирование, метод замены переменной, интегрирование по частям.

6.2 Непосредственное интегрирование. Замена переменной

Непостедственное интегрирование включает в себя нахождение неопределенного интеграла с помощью основных правил (теорем) и таблицы интегралов.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл: $\int(4x^3-2\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{x^3}+1)$

Решение:

$$\int(4x^3-2\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{x^3}+1)=\left[\begin{array}{l}\text{по правилам 1,2 и}\\ \text{табличному интегралу 1}\end{array}\right]=4\int x^3dx-2\int x^{\frac{2}{3}}dx+$$

$$+2\int x^{-3}dx+\int dx=4\cdot\frac{x^4}{4}-2\cdot\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+2\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+x+C=x^4-\frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{1}{x^2}+x+C.$$

Из третьего основного правила интегрирования вытекает, что все интегральные формулы 1 – 12 остаются справедливыми, если в них вместо переменной *x* подставить некоторую дифференцируемую функцию от *x.* При этом для сведения рассматриваемого интеграла к табличному интегралу иногда достаточно представить дифференциал dx по одной из формул (операция «поднесение под знак дифференциала):

$$1.dx=d(x+a),\qquad 2.dx=\frac{1}{a}d(ax),\qquad 3.dx=\frac{1}{a}d(ax+b).$$

Примеры 2-5. Найти неопределенные интегралы.
Решение:

$$2.\int\frac{dx}{\sqrt{16x^2+9}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(4x)^2+3^2}}=\frac{1}{4}\int\frac{d(4x)}{\sqrt{(4x)^2+3^2}}=\frac{1}{4}\ln|4x+\sqrt{16x^2+9}|+C.$$

$$3.\int\frac{dx}{(2x-1)^5}=\int(2x-1)^{-5}dx=\frac{1}{2}\int(2x-1)^{-5}d(2x-1)=\frac{1}{-8}(2x-1)^{-4}+C=$$

$$=-\frac{1}{8(2x-1)^4}+C.$$

$$4.\int\frac{dx}{\sin^2 6x}=\frac{1}{6}\int\frac{d(6x)}{\sin^2 6x}=-\frac{1}{6}ctg6x+C.$$

$$5.\int\frac{dx}{x^2+2x+3}=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

В следующих примерах также применена операция внесения функции под знак дифференциала. Используем определение дифференциала функции $\varphi'(x)dx=d(\varphi(x)).$

В частности,

$$xdx = \frac{1}{2}(x^2)'dx = \frac{1}{2}d(x^2), \qquad \frac{dx}{x} = (\ln x)'dx = d(\ln x),$$

$$\sin x dx = -(\cos x)'dx = -d(\cos x), \qquad e^x dx = (e^x)'dx = d(e^x),$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = (tgx)'dx = d(tgx), \qquad \frac{dx}{1+x^2} = (arctgx)'dx = d(arctgx),$$

и т.д.

Примеры 6-9. Найти неопределенные интегралы.

Решение:

$$6. \int x^2\sqrt{4+x^3}dx = \frac{1}{3}\int (4+x^3)^{\frac{1}{2}}(4+x^3)'dx = \frac{1}{3}\int (4+x^3)^{\frac{1}{2}}d(4+x^3) = \frac{2}{9}(4+x^3)^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{(4+x^3)^3} + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \int \frac{(\ln(x+1))'dx}{\ln(x+1)} = \int \frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \ln|\ln(x+1)| + C\ .$$

$$8. \int \frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{(\arcsin x)'dx}{\arcsin x} = \int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x} = \ln|\arcsin x| + C.$$

$$9. \int \cos(x^4+x)(4x^3+1)dx = \int \cos(x^4+x)d(x^4+x) = \sin(x^4+x) + C.$$

Метод замены переменной основан на использовании формулы

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

где $x = \varphi(t), \varphi(t)$ *и* $\varphi'(t)$ *непрерывны, и* $dx = \varphi'(t)dt.$

Примеры 10-11. Найти неопределенные интегралы:

$$10. \int \sin(7x-5)dx = \begin{vmatrix} 7x-5=t \\ dt = d(7x-5) = 7dx \end{vmatrix} = \int \sin t \cdot \frac{1}{7}dt = \frac{1}{7}\cos t + C =$$

$$= \frac{1}{7}\sin(7x-5) + C.$$

$$11.\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx=\left|\begin{matrix}\sqrt{x-1}=t,\ x=t^2+1\\ dx=2tdt\end{matrix}\right|=\int\frac{t}{t^2+1}2tdt=2\int\frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt=$$

$$=2\int(1-\frac{1}{t^2+1})dt=2\int dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}=2t-2arctgt+C=2\sqrt{x-1}-2arctg\sqrt{x-1}+C.$$

Аудиторные задания.

Найти неопределенные интегралы.

$1.\int\left(2\sqrt{x^5}-\frac{8}{x^3}+\frac{4x}{\sqrt{x^3}}\right)dx,$ $2.\int\left(\frac{3}{\sqrt{5x^2+4}}-\frac{1}{3x^2-4}\right)dx,$ $3.\int\left(\frac{6}{(2+4x)^{13}}-5(3x+1)^{15}\right)dx,$

$4.\int(2\sin(1-6x)+4e^{3+5x})dx,$ $5.\int\sqrt[4]{\sin x}\cos xdx,$ $6.\int\sqrt{1+\ln x}\frac{dx}{x},$ $7.\int\frac{dx}{\sin^2(1-3x)},$

$8.\int\frac{dx}{2x^2+6x+4},$ $9.\int\frac{x^3dx}{\sqrt{5+x^4}},$ $10.\int\frac{tg^4x}{\cos^2x}dx,$ $11.\int\frac{2x-5}{\sqrt{1-x^2}}dx,$ $12.\int\frac{e^{3x}}{e^{6x}+25}dx.$

Домашнее задание.

$1.\int\left(2\sqrt{x^5}-\frac{5}{x^4}+\frac{7x}{\sqrt{x^3}}\right)dx,$

$2.\int\left(\frac{3}{\sqrt{2x^2+4}}-\frac{1}{3x^2+4}\right)dx,$

$3.\int\left(\frac{2}{(8+3x)^{15}}-(8x+7)^{20}\right)dx,$

$4.\int(2\sin(4-5x)+8e^{3+5x})dx,$

$5.\int\sqrt{\sin x}\cos xdx,$

$6.\int\frac{dx}{x^2+4x+6},$

$7.\int\frac{dx}{ños^2(3+7x)},$

$8.\int\left(4\sqrt{x^3}-\frac{5}{x^3}-\frac{2x^2}{\sqrt{x^3}}\right)dx,$

$9.\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}-\frac{1}{3x^2+1}\right)dx,$

$10.\int\left(\frac{7}{(2+8x)^{13}}+(4-5x)^{10}\right)dx,$

$11.\int(3\sin(4-6x)+5e^{7x+8})dx,$

$12.\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{\sin^5x}},$

$13.\int\sqrt{1+\ln(x+4)}\frac{dx}{x+4},$

$14.\int\frac{dx}{\sin^2(7-4x)}.$

6.3. Интегрирование по частям

Этот метод интегрирования основан на использовании формулы

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x), \; или \int udv = uv - \int vdu,$$

где *u=u(x) и v=v(x)*-непрерывно дифференцируемые функции.

Применение формулы целесообразно, когда под знаком интеграла имеется произведение функций разных классов. В качестве *u=u(x)* обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве *dv* – оставшаяся часть подинтегрального выражения, содержащая *dx.* В некоторых случаях формулу интегрирования по частям приходится применять несколько раз.

*Примеры 12-13***.** Найти неопределенные интегралы:

$$12. \int (3x+7)\cos 5xdx = \left| \begin{array}{l} u = 3x+7, \qquad du = 3dx \\ dv = \cos 5xdx, v = \int \cos 5xdx = -\frac{1}{5}\sin 5x \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{5}(3x+7)\sin 5x - \int (-\frac{1}{5}\sin 5x)3dx = -\frac{1}{5}(3x+7)\sin 5x + \frac{3}{25}cos 5x + C.$$

$$13. \int arctg 3xdx = \left| \begin{array}{l} u = arctg 5x, du = \dfrac{5dx}{1+25x^2} \\ dv = dx, \qquad v = x \end{array} \right| = xarctg 5x - \int x \cdot \frac{5dx}{1+25x^2} =$$

$$= xarctg 5x - \frac{1}{10}\int \frac{d(1+25x^2)}{1+25x^2} = xarctg 5x - \ln(1+25x^2) + C.$$

Аудиторные задания.

Найти неопределенные интегралы:

$1.\int (1-3x)\ln(4x)dx,$ $2.\int (2x+3)\cos 5xdx,$ $3.\int (1-x^2)\sin xdx,$ $4.\int (5x^2+1)e^{-x}dx.$

$5.\int xarctgxdx,$ $6.\int \arcsin 7xdx,$ $7.\int (1-x)e^{6x}dx,$ $8.\int \arccos 2xdx.$

Домашнее задание.

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int (3-x)\sin 4xdx.$ 2. $\int (x-4)\cos 5xdx.$ 3. $\int x\ln(2x)dx.$

4. $\int (1-x)cos 2xdx.$ 5. $\int (3-x^2)\sin xdx.$ 6. $\int (x+3)\ln xdx.$

7. $\int (x-2)e^{12x-7}dx.$ 8. $\int x\arccos 2xdx.$ 9. $\int \arcsin 8xdx.$

10. $\int arctg\, 4xdx$ 11. $\int (x+6)\cos xdx.$ 12. $\int xarcctg 3xdx.$

6.4. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление площадей плоских фигур

Пусть функция определена на отрезке $[a,b]$. Разобьем произвольным образом этот отрезок на n частичных отрезков $[x_{i-1}, \quad x_i]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$ На каждом из отрезков выберем произвольную точку $\xi_i : x_{i-1} \le \xi_i \le x_i, i = \overline{1,n}$ и составим так называемую *интегральную сумму* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \text{ где } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

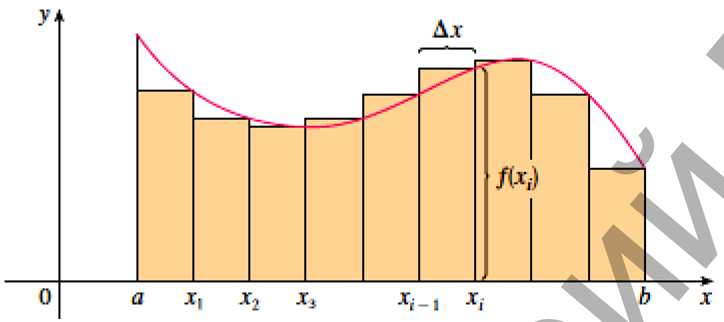


рис. 6.1

<u>Определение.</u> *Определенным интегралом* функции $f(x)$ в пределах от $x = a$ до $x = b$ называется предел интегральной суммы

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \quad u \quad \max \Delta x_i \to 0.$$

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то этот предел всегда существует независимо от разбиения отрезка на частичные отрезки длиной Δx_i и выбора на них точек ξ_i.

Таким образом, функция, непрерывная на отрезке, *интегрируема* на нем.

Основные свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$

2. $\int_a^a f(x)dx = 0,$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$

4. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx,$

5. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \ c = const.$

6. Если $f(x)\ge 0$ $\left(f(x)\le 0\right)$ на отрезке $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\ge 0$ $\left(\int\limits_a^b f(x)dx\le 0\right)$.

7. Если $f(x)\ge \varphi(x)$ $x\in[a,b]$ $a<b,$ то $\int\limits_a^b f(x)dx\ge\int\limits_a^b \varphi(x)dx.$

Геометрический смысл определенного интеграла. Если $f(x)\ge 0$ $\forall x\in[a,b],$ то определенный интеграл вычисляет *площадь криволинейной трапеции*, ограниченной линиями $y=f(x),\ y=g(x),\ x=a,\ x=b.$ И эта площадь равна $S=\int\limits_a^b (f(x)-g(x))dx.$

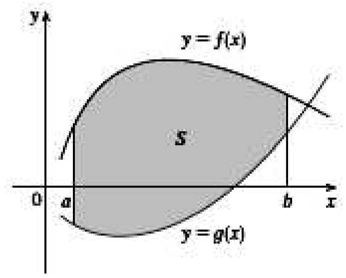


рис 6.2

Правила вычисления определенного интеграла.

1. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ - какая - либо первообразная функции $f(x)$ на этом отрезке, то справедлива формула

$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$ - **формула Ньютона – Лейбница.**

2. *Замена переменной в определенном интеграле.* Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, функция $x=\varphi(t)$ дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем для любого $t\in[\alpha,\beta]$: $\varphi(t)\in[a,b],\ \varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b,$ то

3.

$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ **- формула замены переменной.**

4. *Интегрирование по частям в определенном интеграле.* Пусть функции $u=u(x), v=v(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, тогда справедлива формула

$$\int\limits_a^b u(x)dv(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int\limits_a^b v(x)du(x).$$

Примеры 1-3. Вычислить определенные интегралы.

$$1.\int\limits_1^8 (\sqrt[3]{x}-1)dx=\int\limits_1^8 (x^{\frac{1}{3}}-1)dx=(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x)\Big|_1^8=(\frac{3}{4}\cdot 2^4-8)-(\frac{3}{4}-1)=$$

$$=12-8-0.75+1=4,25.$$

$$2.\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx=\left|\begin{array}{ll} x=\sin t, & dx=\cos t dt \\ x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, t=\dfrac{\pi}{4}, & x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, t=\dfrac{\pi}{3}\end{array}\right|=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 t dt}{\sin^2 t}=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=$$

$$=(-ctgt-t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-(ctg\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3})+(ctg\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})=-(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{3})+(1+\frac{\pi}{4})=$$

$$=1-\frac{\pi}{12}-\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0,161.$$

$$3.\int\limits_e^{e^2} x\ln x dx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln x, & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=xdx, & v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right|=(\frac{x^2}{2}\ln x)\Big|_e^{e^2}-\int\limits_e^{e^2}\frac{x^2dx}{2x}=\frac{e^4}{2}\cdot 2-\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_e^{e^2}=$$

$$=e^4-\frac{e^2}{2}-\frac{e^4}{4}+\frac{e^2}{4}=\frac{1}{4}(3e^4-e^2)\approx 39,10.$$

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x,\ y=2x-x^2$.

Решение:

Найдем пределы интегрирования: $x=2x-x^2,\ x-x^2=0,\ x=0$ *или* $x=1$.

Построим графики данных функций, где $y=x$ - прямая, проходящая через точки $(0;0)$ и $(1;1)$, а $y=2x-x^2=-x^2+2x$ - парабола "ветви" которой опущены вниз $y=-\left(x^2-2x+1-1\right)=-\left(x-1\right)^2+1$.

Выделив полный квадрат, определим координаты вершины параболы: $(1;1)$.

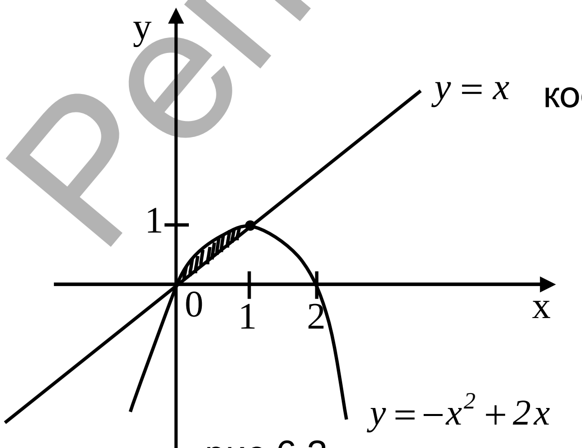


рис.6.3.

Составим определенный интеграл для вычисления площади полученной фигуры:

$$\int_0^1 \left(\left(-x^2+2x\right)-x\right)dx=\int_0^1 \left(-x^2+x\right)dx=-\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 xdx=-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1+\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1=$$

$$=-\frac{1}{3}-0+\frac{1}{2}-0=\frac{1}{6}$$ (кв. ед.).

Аудиторные задания

1. Вычислить определенные интегралы:

1). $\int_1^2\left(2x^2+\frac{2}{x^4}\right)dx,$ 2). $\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx,$ 3). $\int_0^1 e^{3x}dx,$ 4). $\int_3^8 x\sqrt{x+1}dx,$

5). $\int_0^{\pi} x\sin xdx,$ 6). $\int_2^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+4}.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

1. $y=4-x^2,\ y=0;$ 2. $xy=6,\ x+y-7=0.$

Домашнее задание

1. Вычислить определенные интегралы:

1. $\int_1^2(3x^2-\frac{5}{x^6})dx,$ 2. $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}},$ 3. $\int_0^{16}\frac{dx}{\sqrt{x+9}},$

4. $\int_4^9(4\sqrt{x}+6x^2)dx,$ 5. $\int_0^{\pi}(x+1)\cos xdx,$ 6. $\int_0^{\pi}(x+2)\sin\frac{x}{2}dx,$

7. $\int_0^1 3x^2(1+\frac{1}{6x^5})dx,$ 8. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x},$ 9. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}.$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1). $y=x^2,\ y=2-x^2;$ 2). $y^2=1-x,\ x=-3;$ 3. $y=3-2x-x^2, y=0;$ 4. $y=6x-x^2, y=0.$

Аттестационная работа

Задание 1. Вычислить определитель***:***

Вариант-1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 & -1 \\ 6 & 7 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Вариант-2

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 6 \\ 7 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

Вариант-3

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \\ -1 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

Вариант-4

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 & -2 \\ 5 & 6 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

Вариант-5

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -6 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Вариант-6

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

Вариант-7

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \\ -2 & 6 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Вариант-8

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Вариант-9

$$\begin{vmatrix} 8 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

Вариант-10

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Вариант-11

$$\begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 7 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

Вариант-12

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 5 \\ -2 & 11 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \\ -4 & 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

Вариант-13

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & -6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 12 \\ -2 & 1 & 8 & -3 \end{vmatrix}$$

Вариант-14

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 13 \\ -8 & 7 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Вариант-15

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ -10 & 8 & 7 & 0 \\ 6 & -2 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

Вариант-16

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 4 & 10 \\ 0 & 7 & -9 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Вариант-17

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 6 & 10 \\ 5 & 1 & 0 & -2 \\ 9 & -7 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

Вариант-18

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 7 \\ 5 & -1 & 4 & 9 \\ -1 & 6 & 11 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Вариант-19

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 7 & 0 & -1 \\ 9 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Вариант-20

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

Вариант-21

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

Вариант-22

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 18 & -4 \end{vmatrix}$$

Вариант-23

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Вариант-24

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 8 & 3 & -2 \\ 3 & -9 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

Вариант-25

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 4 & 10 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Вариант-26

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 9 \\ -1 & 1 & 6 & -2 \\ 4 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Вариант-27

$$\begin{vmatrix} -10 & 0 & 8 & 3 \\ 4 & 5 & -6 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Вариант-28

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 9 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Вариант-29

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 7 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 9 \\ 12 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Вариант-30

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -7 & 8 \\ 7 & 10 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Решить систему уравнения: а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса; в) матричным методом.

Вариант-1

$$\begin{cases} x+2y+3x=5, \\ 2x-y-z=1, \\ x+3y+4z=6. \end{cases}$$

Вариант-2

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ 2x-3z=5, \\ 6x-5z=1. \end{cases}$$

Вариант-3

$$\begin{cases} 3x+2y+z=5, \\ 2x+3y+z=1, \\ 2x+y+3z=1. \end{cases}$$

Вариант-4

$$\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$$

Вариант-5

$$\begin{cases} x-2y+3z=6, \\ 2x+3y-4z=20, \\ 3x-2y-5z=6. \end{cases}$$

Вариант-6

$$\begin{cases} 4x-3y+2z=9, \\ 2x+5y-3z=4, \\ 5x+6y-2z=18. \end{cases}$$

Вариант-7

$$\begin{cases} 2x-y-z=4, \\ 3x+4y-2z=11, \\ 3x-2y+4z=11. \end{cases}$$

Вариант-8

$$\begin{cases} x+y+2z=-1, \\ 2x-y+2z=-4, \\ 4x+y+4z=-2. \end{cases}$$

Вариант-9

$$\begin{cases} 3x+4y=2Z=8, \\ 2x-y-3z=-4, \\ x+5y+z=0. \end{cases}$$

Вариант-10

$$\begin{cases} x+y-z=1, \\ 8x+3y-6z=2, \\ 4x+y-3z=3. \end{cases}$$

Вариант-11

$$\begin{cases} x-4y-2z=-3, \\ 3x+y+z=5, \\ 3x-5y-6z=-9. \end{cases}$$

Вариант-12

$$\begin{cases} x+2y+4z=31, \\ 5x+y+2z=20, \\ 3x-y+z=9. \end{cases}$$

Вариант-13

$$\begin{cases} x+2y+z=8, \\ 3x+2y+z=10, \\ 4x+3y-2z=4. \end{cases}$$

Вариант-14

$$\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ x+2y+3z=14 \\ 4x+3y+2z=16 \end{cases}$$

Вариант-15

$$\begin{cases} x+3y-6z=12 \\ 3x+2y+5z=-10 \\ 2x+5y-3z=6 \end{cases}$$

Вариант-16

$$\begin{cases} 2x+3y-z=4, \\ x+y+3z=5, \\ 3x-4y+z=0. \end{cases}$$

Вариант-17

$$\begin{cases} x+y-z=6, \\ 2x+3y-4z=21, \\ 7x-y-3z=6. \end{cases}$$

Вариант-18

$$\begin{cases} 4x+2y-z=0, \\ x+2y+z=1, \\ y-z=-3. \end{cases}$$

Вариант-19

$$\begin{cases} 2x-y=-1, \\ x+2y-z=2, \\ y+z=-2. \end{cases}$$

Вариант-20

$$\begin{cases} 4x+2y-z=12, \\ x+2y+z=7, \\ y-z=-1. \end{cases}$$

Вариант-21

$$\begin{cases} 2x-y=0, \\ x+2y-z=-2, \\ y+z=-5. \end{cases}$$

Вариант-22

$$\begin{cases} 4x+2y-z=14, \\ x+2y+z=14, \\ y-z=7. \end{cases}$$

Вариант-23

$$\begin{cases} 2x-y=0, \\ x+2y-z=1, \\ y+z=0. \end{cases}$$

Вариант-24

$$\begin{cases} x-y+2z=11, \\ 5x+2y-z=-3, \\ 3x+y-4z=-15. \end{cases}$$

Вариант-25

$$\begin{cases} y+4z=11, \\ x-2y-6z=-14, \\ 2x+5y+3z=8. \end{cases}$$

Вариант-26

$$\begin{cases} x-y+z=0, \\ 9x-3y+z=12, \\ 5x+2z=-1. \end{cases}$$

Вариант-27

$$\begin{cases} 4x+2y-z=8, \\ x-y+z=-2, \\ 3x-5y+2z=-6. \end{cases}$$

Вариант-28

$$\begin{cases} 3x+5y+z=2, \\ x+2y-4z=0, \\ x-y+6z=6. \end{cases}$$

Вариант-29

$$\begin{cases} x+y-z=-5, \\ 3x+5y+6z=8, \\ 2x-y+z=5. \end{cases}$$

Вариант-30

$$\begin{cases} 2x-6y+z=4, \\ x+7y-2z=-3, \\ 3x-5y-z=1. \end{cases}$$

Задание 3. По координатам точек A,B,C для указанных векторов найти:

а) модуль вектора $\overline{a}$;

б) скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$;

в) векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$.

В-т	**A**	**B**	**C**		

1	(-4;6;7)	(2;5;3)	(-6;1;0)	$\vec{a}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$	$\vec{b}=\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$
2	(1;-2;3)	(0;-1;2)	(3;-4;5)	$\overline{a}=2\overline{AB}+4\overline{BC}$	$\overline{b}=3\overline{AC}-\overline{AB}$.
3	(0;-3;6)	(-2;-3;3)	(-9;-3;-6)	$\overline{a}=\overline{AB}+2\overline{BC}$	$\overline{b}=3\overline{AB}-\overline{AC}$
4	(3;3;-1)	(5;5;-2)	(4;-1;1)	$\overline{a}=5\overline{AB}+3\overline{BC}$	$\overline{b}=2\overline{AB}-\overline{AC}$
5	(-1;2;-3)	(3;4;-6)	(1;1;-1)	$\overline{a}=4\overline{AB}+3\overline{BC}$	$\overline{b}=\overline{AB}-2\overline{AC}$
6	(-4;-2;0)	(-1;-2;4)	(3;-2;1)	$\overline{a}=-2\overline{AB}+\overline{BC}$	$\overline{b}=3\overline{AB}-2\overline{AC}$.
7	(5;3;-1)	(5;2;0)	(6;4;-1)	$\overline{a}=\overline{AB}+\overline{BC}$	$\overline{b}=4\overline{AB}+\overline{BC}$
8	(-3;-7;-5)	(0;-1;-2)	(2;3;0)	$\overline{a}=4\overline{AB}-2\overline{BC}$	$\overline{b}=\overline{AB}+3\overline{AC}$
9	(2;-4;6)	(0;-2;4)	(6;-8;10)	$\overline{a}=6\overline{AB}-3\overline{BC}$	$\overline{b}=\overline{AB}+2\overline{AC}$
10	(0;1;-2)	(3;1;2)	(4;1;1)	$\overline{a}=3\overline{AB}+9\overline{BC}$	$\overline{b}=-\overline{AB}-3\overline{AC}$
11	(3;3;-1)	(1;5;-2)	(-4;1;1)	$\overline{a}=2\overline{AB}-\overline{BC}$	$\overline{b}=3\overline{AB}+6\overline{AC}$
12	(2;1;-1)	(6;-1;-4)	(4;2;1)	$\overline{a}=\overline{AB}-5\overline{BC}$	$\overline{b}=2\overline{AB}+3\overline{AC}$
13	(-1;-2;1)	(-4;-2;5)	(-8;2;2)	$\overline{a}=5\overline{AB}-2\overline{BC}$	$\overline{b}=\overline{AB}+\overline{AC}$
14	(6;2;-3)	(6;3;-2)	(7; 3; 0)	$\overline{a}=\overline{AB}-6\overline{BC}$	$\overline{b}=2\overline{AB}+4\overline{AC}$
15	(1;0;4)	(-3;-6;1)	(-5;-10;1)	$\overline{a}=2\overline{AB}+5\overline{AC}$	$\overline{b}=\overline{AB}-\overline{AC}$
16	(2;-8;-1)	(4;-6; 0)	(-2;-5;-1)	$\overline{a}=2\overline{AB}-\overline{AC}$	$\overline{b}=\overline{BC}+3\overline{AB}$.
17	(3;-6;9)	(0;-3;6)	(9;-12;-5)	$\overline{a}=3\overline{AB}-2\overline{AC}$	$\overline{b}=\overline{BC}+\overline{AB}$
18	(0;2;-4)	(8;2;2)	(6;2;4)	$\overline{a}=\overline{AB}+2\overline{AC}$	$\overline{b}=\overline{AC}-2\overline{BC}$
19	(3;3;-1)	(5;1;-2)	(4;1;1)	$\overline{a}=5\overline{AB}-4\overline{BC}$	$\overline{b}=\overline{AC}+\overline{AB}$
20	(-4; 3; 0)	(0;1;3)	(-2;4;-2)	$\overline{a}=\overline{AB}+2\overline{AC}$	$\overline{b}=\overline{AC}-3\overline{BC}$
21	(1;-1; 0)	(-2;-1;4)	(8;-1;-1)	$\overline{a}=-\overline{AB}+2\overline{BC}$	$\overline{b}=2\overline{AC}+2\overline{BC}$
22	(7;0;2)	(7;1;3)	(8;-1;2)	$\overline{a}=5\overline{AB}-3\overline{AC}$	$\overline{b}=\overline{BC}+\overline{AC}$
23	(2;3;2)	(1;-3;-1)	(-3;-7;-3)	$\overline{a}=2\overline{AB}-3\overline{BC}$;	$\overline{b}=\overline{AC}+\overline{BC}$
24	(2;2;7)	(0;1;6)	(-2;5;7)	$\overline{a}=\overline{AB}-3\overline{BC}$;	$\overline{b}=\overline{AC}+2\overline{AB}$.
25	(-1;2;-3)	(0;1;-2)	(-3;4;-5)	$\overline{a}=\overline{AB}-6\overline{BC}$	$\overline{b}=2\overline{AC}+\overline{AB}$.
26	(3;-3;1)	(5;1;-2)	(4;1;-3)	$\overline{a}=\overline{AB}+2\overline{AC}$	$\overline{b}=4\overline{AC}-\overline{BC}$
27	(-2;1;1)	(2;3;-2)	(0;0;3)	$\overline{a}=\overline{AB}+2\overline{BC}$	$\overline{b}=2\overline{AC}-\overline{AB}$
28	(1;4;-1)	(-2;4;-5)	(8;4;0)	$\overline{a}=\overline{AC}+2\overline{BC}$	$\overline{b}=\overline{AB}-3\overline{BC}$
29	(2;-3;0)	(1;1;-4)	(3;-2; 0)	$\overline{a}=\overline{AB}+\overline{AC}$	$\overline{b}=\overline{BC}-2\overline{AC}$
30	(2;0;-3)	(1;4;5)	(-7;-2;11)	$\vec{a}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$	$\overline{b}=\overline{AC}+\overline{AB}$

Задание 4. Установить компланарны ли вектора:

В-т	Векторы
1	$\vec{a}=$(2;3;-1); $\vec{b}=$(1;-1;3); $\vec{c}=$(-3;3;-9)
2	$\vec{a}=$(2;3;1); $\vec{b}=$(-1;0;-1); $\vec{c}=$(2;2;2)
3	$\vec{a}=$(3;2;1); $\vec{b}=$(2;3;4); $\vec{c}=$(3;1;-1)

4	$\vec{a}=1;5;2);$ $\vec{b}=(-1;1;-1);$ $\vec{c}=(1;6;1)$
5	$\vec{a}=(1;-1;-3);$ $\vec{b}=(3;2;1);$ $\vec{c}=(2;344)$
6	$\vec{a}=(3;3;1);$ $\vec{b}=(1;-2;1);$ $\vec{c}=(1;1;1)$
7	$\vec{a}=(3;1;-1);$ $\vec{b}=(-2;-1;0);$ $\vec{c}=(5;2;-1)$
8	$\vec{a}=(4;3;1);$ $\vec{b}=(1;-2;1);$ $\vec{c}=(2;2;2)$
9	$\vec{a}=(4;3;1);$ $\vec{b}=(6;7;-4);$ $\vec{c}=(2;0;-1)$
10	$\vec{a}=(3;2;1);$ $\vec{b}=(1;-3;-7);$ $\vec{c}=(1;-2;3)$
11	$\vec{a}=(3;7;2);$ $\vec{b}=(-2;0;-1);$ $\vec{c}=(2;2;1)$
12	$\vec{a}=(1;-2;6);$ $\vec{b}=(1;0;1);$ $\vec{c}=(2;-6;17)$
13	$\vec{a}=(6;3;4);$ $\vec{b}=(-1;-2;-1);$ $\vec{c}=(2;1;2)$
14	$\vec{a}=(7;3;4);$ $\vec{b}=(-1;-2;-1);$ $\vec{c}=(4;2;4)$
15	$\vec{a}=(2;3;2);$ $\vec{b}=(4;7;5);$ $\vec{c}=(2;0;-1)$
16	$\vec{a}=(5;3;4);$ $\vec{b}=(-1;0;-1);$ $\vec{c}=(4;2;4)$
17	$\vec{a}=(3;10;5);$ $\vec{b}=(-2;-2;-3);$ $\vec{c}=(2;4;3)$
18	$\vec{a}=(-2;-4;-3);$ $\vec{b}=(4;3;1);$ $\vec{c}=(6;7;4)$
19	$\vec{a}=(3;1;-1);$ $\vec{b}=(1;0;-1);$ $\vec{c}=(8;3;-2)$
20	$\vec{a}=(4;2;2);$ $\vec{b}=(-3;-3;-3);$ $\vec{c}=(2;1;2)$
21	$\vec{a}=(4;1;2);$ $\vec{b}=(9;2;5);$ $\vec{c}=(1;1;-1)$
22	$\vec{a}=(5;3;4);$ $\vec{b}=(4;3;3);$ $\vec{c}=(9;5;8)$
23	$\vec{a}=(3;4;2);$ $\vec{b}=(1;1;0);$ $\vec{c}=(8;11;6)$
24	$\vec{a}=(4;-1;-6);$ $\vec{b}=(1;-3;-7);$ $\vec{c}=(2;-1;-4)$
25	$\vec{a}=(3;1;0);$ $\vec{b}=(-5;-4;-5);$ $\vec{c}=(4;2;4)$
26	$\vec{a}=(1;-1;4);$ $\vec{b}=(1;0;3);$ $\vec{c}=(1;-3;8)$
27	$\vec{a}=(6;3;4);$ $\vec{b}=(-1;-2;-1);$ $\vec{c}=(2;1;2)$
28	$\vec{a}=(4;1;-2);$ $\vec{b}=(-8;2;4);$ $\vec{c}=(6;2;0)$
29	$\vec{a}=(-3;3;3);$ $\vec{b}=(-4;7;6);$ $\vec{c}=(1;-1;-1)$
30	$\vec{a}=3;-2;1);$ $\vec{b}=(7;8;-1);$ $\vec{c}=(-6;4;-2)$

Задание 5. Даны вершины треугольника ABC.

Записать: а) уравнение стороны AC; б) уравнение высоты BH;

в) уравнение медианы CM;

г) расстояние от точки B до прямой AC;

д) уравнение прямой BK, параллельной стороне AC;

е) площадь треугольника ABC.

Вариант		Вариант	
1	A(2;5); B(1;-3); C(4;0)	***16***	A(1;4); B(3;-1); C(2;5)
2	A(4;7); B(-2;3); C(-6;0)	***17***	A(2;-8); B(4;0); C(-5;-1)
3	A(2;1); B(-1;0); C(3;2)	***18***	A(3;9); B(-1;4); C(0;-12)
4	A(-5;2); B(3;4); C(1;0)	***19***	A(0;-4); B(8;2); C(6;4)
5	A(1;5); B(-1;7); C(2;-3)	***20***	A(3;-1); B(5;-2); C(4;1)
6	A(1;-3); B(3;1); C(2;-6)	***21***	A(-4;0); B(1;3); C(-2;4)
7	A(-4;0); B(-1;4); C(3;1)	***22***	A(1;0); B(-2;4); C(8;-1)
8	A(7;-1); B(1;3); C(0;5)	***23***	A(7;2); B(1;3); C(0;-4)
9	A(-3;-5); B(0;2); C(3;-1)	***24***	A(3;-2); B(1;0); C(8;6)
10	A(2;6); B(0;-4); C(6;10)	***25***	A(2;7); B(0;6); C(-2;4)
11	A(0;-2); B(3;2); C(4;1)	***26***	A(-3;-1); B(0;2); C(4;-5)
12	A(3;2); B(-1;8); C(0;-5)	***27***	A(5;1); B(4;-2); C(1;-3)
13	A(2;-1); B(6;-4); C(4;1)	***28***	A(-2;1); B(-4;3); C(0;5)
14	A(-1;1); B(-4;5); C(-8;2)	***29***	A(4;-1); B(-2;5); C(8;0)
15	A(6;-3); B(-1;4); C(7;0)	***30***	A(3;5); B(-2;4); C(1;-1)

Задание 6. Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

Вариант	***Задания***
1	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-27}{2x^2+8x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10tg3x}{\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^2+x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-27}{x+1}\right)^{2x-1}$.

2	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+1}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{36x}$ в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{2-x}$.
3	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-15}{x^4+48x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ar\sin x8x}{5x}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+5x+6}{3x+x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+4}\right)^{6x-1}$.
4	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+x^3-3}{5x^4+x^2+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg3x}{2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{6x-8-x^2}{\sqrt[3]{2x}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+1}\right)^{5+4x}$.
5	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^3+4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^3-125}{5+4x-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{tg5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+5x}{2+5x}\right)^{5x-3}$.
6	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6+7x^2-x}{x^5+x^6-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x^2+6x-72}{2x^2-7x-30}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin 6x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-7+6x}{6x-1}\right)$.
7	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+x^2-x^3}{3x^2-x+11x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-8x+7}{x^2-5x-14}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 14x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x-2}{7x+3}\right)^{11+7x}$.
8	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+x+12}{5x^4-x-12}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{3x^4-27x+24}{x^2-64}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x}{arctg3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{8x-5}{8x+3}\right)^{4x-1}$.

9	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-3x-5}{12-x-x^2-7x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to -9}\dfrac{x^2+11x+18}{x^2+4x-45}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{\arcsin 6x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x+7}{9x+8}\right)^{18x-1}$.
10	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^9+x^8-15}{x^{10}-x^5+2}$; б) $\lim\limits_{x\to -10}\dfrac{x^3+1000}{x^2+8x-20}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{10x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-11}{10x+9}\right)^{5x-2}$.
11	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{17}+x^{18}}{x^{16}-8x^{18}}$; б) $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{x^2-121}{\sqrt{x-2}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 9x}{11x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x-9}\right)^{x-3}$.
12	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+x^2+x^5}{x^6-x^5+5x^7}$; б) $\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{x-12}{\sqrt{x+2}-\sqrt{14}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 2x}{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{2x+5}$.
13	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{7x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 13}\dfrac{x^2-169}{\sqrt{x+3}-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg13x}{26x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+11}{3x+8}\right)^{6x-7}$.
14	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-9}{2x^2+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 14}\dfrac{5-\sqrt{x+11}}{\sqrt{x-5}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7tg7x}{4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+7}{4x+11}\right)^{2x-3}$.
15	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x-5}{x^3+8x^2-125}$; б) $\lim\limits_{x\to 15}\dfrac{x-15}{x^2-14x-15}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3tg9x}{8\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+8}{5x+9}\right)^{10x}$.

16	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2-4x-2}{5x^2-41}$; б) $\lim\limits_{x\to-16}\dfrac{x^2+17x+16}{256-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{32x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-1}{6x-5}\right)^{12x+1}$.
17	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^3+x}{x^5-x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 17}\dfrac{-x^2-18x-17}{x^2+15x-34}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg7x}{\sin 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+7x}{-4+7x}\right)^{7x-2}$.
18	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6+x^5-15x}{x^3+x^2-11}$; б) $\lim\limits_{x\to 18}\dfrac{\sqrt{x+7}-5}{3-\sqrt{x-9}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5+8x}{7+8x}\right)^{(4x-3)}$.
19	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+15x+16}{19x^2-15x+38}$; б) $\lim\limits_{x\to -19}\dfrac{1-\sqrt{x+20}}{\sqrt[3]{x+n}+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{25x^2}{1-\cos^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x-17}{9x-16}\right)^{3x}$.
20	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^3+x+1}{x^4+x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 20}\dfrac{x^2-22x+40}{2x^2-30x-200}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{7x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-3}{10x-7}\right)^{5x+2}$.
21	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-16}{x^5-8x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 21}\dfrac{\sqrt{x-20}-1}{5-\sqrt{x+4}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10tg3x}{\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-21}{x-10}\right)^{x-2}$.
22	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+3x-x^2}{2x^8-8x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 22}\dfrac{3x-66}{x^2-19x-66}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{22x}{arctgx}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-8}{2x+5}\right)^{6-2x}$.

23	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+11}{6x^3-5x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to -23}\dfrac{x+23}{-2x^2-44x+46}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{15x}{tg5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+7}{3x+2}\right)^{5-3x}$.
24	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+13}{17x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 24}\dfrac{5-\sqrt{x+1}}{4-\sqrt{x-8}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{48x}{\arcsin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x+5}\right)^{8x+3}$.
25	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x-3x^2}{x^2-4x-21}$; б) $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{x^2-625}{\sqrt{2x-1}-7}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 26x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{5x-4}\right)^{5x}$.
26	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4x+1}{x^2+3x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 26}\dfrac{\sqrt{2x+12}-8}{78-3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin 5x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+11}{6x+13}\right)^{-6x}$.
27	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+7x^2+15}{x^4+2x+18}$; б) $\lim\limits_{x\to 27}\dfrac{\sqrt[3]{x}-3}{x^2-29x+54}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{27x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-8x+7x}{-9+7x}\right)^{1-7x}$.
28	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+x-13}{12x^3+6x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 28}\dfrac{28x-x^2}{\sqrt{x-3}-5}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2arctg8x}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+15}{8x+17}\right)^{2x-3}$.
29	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+10}{15x+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 29}\dfrac{x^2-27x-58}{-x+29}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{4x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x-7}{9x-5}\right)^{9x+1}$.

30	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-1}{x^4+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 30}\dfrac{900-x^2}{\sqrt[3]{x-3}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{10x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x+3}{10x+2}\right)$.

Задание 7. Найти производные следующих функций:

Вариант	а)	б)
1	$y=x^2-\dfrac{2}{x\sqrt[6]{x}}+17\sqrt[17]{x}$	$y=ctg^5x\cdot\arccos\left(e^{-x^2}\right)$
2	$y=\sqrt[5]{x}+\dfrac{4}{x\sqrt[3]{x}}-x^3$	$y=-\dfrac{x^2+x}{\arcsin^2 4x}$
3	$y=\dfrac{6}{x^5}-3x^3+2x\sqrt[7]{x}$	$y=e^{x^3-2x}\left(x^2-ctgx\right)$
4	$y=x\sqrt[3]{x}-\dfrac{7}{x\sqrt{x}}+3$	$y=\dfrac{ctg^2\left(3x^2+2x\right)}{\ln\sqrt[9]{8-x}}$
5	$y=6x^{12}-x\sqrt[5]{x^3}-\dfrac{4}{x^2}+x^6$	$y=\dfrac{e^{\arcsin^2 x}}{\sqrt{x^2+1}}$
6	$y=\dfrac{3}{x^4}-x^2\sqrt{x}-\dfrac{1}{4}x^3$	$y=\dfrac{8arctg4(x+1)}{\left(x^2-6x+5\right)^5}$
7	$y=3x^2-\dfrac{4}{x^2}+x\sqrt[4]{x^5}$	$y=\dfrac{arctg^3x^2}{\sqrt{x^2+4x}}$
8	$y=\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^4}}+\sqrt[8]{x}$	$y=\dfrac{\ln^3(3x-5)}{\sqrt{x^2-x-2}}$
9	$y=x^6-\dfrac{2}{x^3}+x^4\sqrt[3]{x}$	$y=\cos^5 4x\cdot e^{\sin^2 5x}$
10	$y=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{\sqrt{x}}+x\sqrt[6]{x}$	$y=ctg\left(x^3+x\right)\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3x-3}{2x+1}}$
11	$y=x^5+x^2\sqrt{x^3}-\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$	$y=arcctg(x-1)\cdot e^{\sin 15x}$

12	$y=\frac{6}{x^5}-3x^3+2x\sqrt[7]{x}$	$y=e^{tg^2x}\cdot\ln(\cos 7x)$
13	$y=8+\frac{1}{x^4}+x^9\sqrt[5]{x}$	$y=\sin(\ln 5x)\cdot\ln(\sin 5x)$
14	$y=x^4-\frac{3}{x^9}-x^5\sqrt{x}$	$y=arctg^3 14x\cdot e^{\left(x^2-3x+5\right)^3}$
15	$y=5x^3-\frac{1}{5x^3}+4x\sqrt{x^5}$	$y=\frac{\cos^3\left(e^{x^2}\right)}{arctg\left(x^3\right)}$
16	$y=x^6-\frac{6}{x^6}+3\sqrt[6]{x^7}$	$y=ctg\left(x+16x^3\right)\cdot\arccos(e^{x^3})$
17	$y=7x^7-\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x}}+\frac{8}{x^4}$	$y=\frac{\sqrt[3]{arctg^2 4x}}{\sin x^3+8}$
18	$y=4x^2-\frac{1}{x^5}+x^5\sqrt{x}$	$y=tg\left(x^2+\ln x\right)\cdot 2^{x^2-3}$
19	$y=x^2-\frac{8}{x}+x^3\sqrt[3]{x^7}$	$y=19^{\ln^2\left(1-x^3\right)}\cdot\sin^{10}(2x+1)$
20	$y=15-x^{11}-\frac{11}{x^{11}}+x\sqrt{x}$	$y=3\sin^3 x^2\cdot\cos^2(2x-1)$
21	$y=3\sqrt[3]{x^8}-\frac{2}{\sqrt{x}}+x^{-5}$	$y=-\ln\left(1+x^2\right)\cdot\sin^5(\cos 5x)$
22	$y=\frac{1}{x^4}-x^2+x\sqrt[3]{x^7}$	$y=\sin^3(\ln x)\cdot\sqrt{2x-x^{22}}$
23	$y=2x^3-\frac{1}{x^5}+\frac{x^2}{\sqrt{x^3}}$	$y=\frac{1}{23}\ln\frac{x^2-5x-7}{x^2+5x+7}$
24	$y=\frac{1}{2\sqrt{x^3}}-3x^6+6\sqrt{x^3}$	$y=(\sin 6x-24x)^3\cdot e^{\sqrt{x}}$
25	$y=2x^7-\frac{1}{x^5}+x^2\sqrt{x^3}$	$y=e^{-\cos\sqrt{x}}\cdot(ctg\,2x+3)^3$
26	$y=x\sqrt{x^3}-\frac{1}{6}x^{12}+\frac{1}{\sqrt{x}}$	$y=\frac{\ln^2\left(x^2+1\right)}{\sqrt{6x^3-2x}}$
27	$y=2\sqrt{x}-x^{-5}+4x^{\frac{1}{5}}\sqrt[3]{x^7}$	$y=\arcsin^2\left(x^3\right)\cdot\left(2^{x+1}+5\right)$
28	$y=\frac{1}{x^2}-2x\sqrt{x^5}+4x^3$	$y=e^{arctgx^2}\cdot\sin(\ln(2x+4))$

29	$y=4x^3-\frac{\sqrt[7]{x}}{x^2}+3-5x$	$y=\frac{tg^3x^2}{\ln\left(x^2-2\right)}$
30	$y=\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}-3x^6+5x\sqrt{x}$	$y=\cos\left(e^{x^3+1}\right)\cdot e^{\cos\left(x^3+1\right)}$

Задание 8. Найти неопределенный интеграл, результат проверить дифференцированием.

Вариант		**Вариант**	
1	$\int 5^x\left(1+\frac{5^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)dx$	**16**	$\int\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)dx$
2	$\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$	**17**	$\int\left(3x^3-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)dx$
3	$\int\frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^3}dx$	**18**	$\int\left(x^2+\sqrt{x}\right)^2dx$
4	$\int\frac{x^5+5x-85}{\sqrt[4]{x^5}}dx$	**19**	$\int\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$
5	$\int\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{x}dx$	**20**	$\int\left(x^3-\frac{54}{x}+1\right)dx$
6	$\int\left(3x^3-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{8}{x}\right)dx$	**21**	$\int\left(x^3-\frac{7}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$
7	$\int\left(\frac{3}{x^5}+4x^3-\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)dx$	**22**	$\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx$
8	$\int\frac{x^2+\sqrt{x^7}-3}{x^3}dx$	**23**	$\int\left(5\sqrt{x}+x^2+\frac{8}{\sqrt{x}}\right)dx$
9	$\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2x^2-7\right)dx$	**24**	$\int\left(x^3+3\sqrt{x}-1\right)dx$
10	$\int\left(8+\frac{x^4}{\sqrt[9]{x}}-x\right)dx$	**25**	$\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{4}{x^5}+\sqrt[3]{x}\right)dx$
11	$\int\left(\frac{2}{x^7}+4x^5+\sqrt[3]{x}\right)dx$	**26**	$\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x\sqrt{x}}+2\right)dx$

12	$\int\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x}+1\right)dx$	**27**	$\int\left(\frac{3}{x^2}+\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$
13	$\int\left(x^4+\frac{1}{x}-\cos 3x\right)dx$	**28**	$\int\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)^2 dx$
14	$\int\left(\frac{1}{3\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+1\right)dx$	**29**	$\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)^3 dx$
15	$\int\left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$	**30**	$\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt{x}\right)^2 dx$

Задание 9. Найти неопределенный интеграл, результат проверить дифференцированием.

Вариант		**Вариант**	
1	$\int\frac{dx}{\cos^2 3x}$	**16**	$\int\frac{dx}{x^2+9}$
2	$\int\frac{dx}{7x+1}$	**17**	$\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
3	$\int\frac{dx}{4-9x^2}$	**18**	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$
4	$\int\frac{dx}{\sin^2 5x}$	**19**	$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$
5	$\int\frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$	**20**	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$
6	$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{4x-7}}$	**21**	$\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-12}}$
7	$\int\frac{dx}{1+2x^2}$	**22**	$\int\frac{dx}{\sqrt{4-2x^2}}$
8	$\int\frac{dx}{4+x^2}$	**23**	$\int\frac{dx}{2x^2+3}$
9	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$	**24**	$\int\frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$
10	$\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$	**25**	$\int\frac{dx}{2x^2+5}$
11	$\int\frac{dx}{2x^2+8}$	**26**	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

12	$\int \frac{dx}{x^2+36}$	***27***	$\int \frac{dx}{3x^2-25}$
13	$\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$	***28***	$\int \frac{dx}{9x^2-4}$
14	$\int \frac{dx}{3x^2+1}$	***29***	$\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$
15	$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$	***30***	$\int \frac{dx}{3x^2-16}$

Задание 10. Найти неопределенный интеграл, результат проверить дифференцированием.

Вариант		***Вариант***	
1	$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$	***16***	$\int e^{-3x+1}$
2	$\int \frac{xdx}{\sin^2 x^2}$	***17***	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4-3x}}$
3	$\int \sin\left(9x-\frac{1}{2}\right)dx$	***18***	$\int \frac{dx}{1-10x}$
4	$\int \frac{dx}{\sin^2(4x+5)}$	***19***	$\int e^{5-4x}dx$
5	$\int \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{7}{4}\right)dx$	***20***	$\int \left(e^{\frac{x}{2}+1}+e^{-\frac{x}{2}-1}\right)dx$
6	$\int (2x-1)^3\,dx$	***21***	$\int (7x-3)^{10}\,dx$
7	$\int \cos\left(1-\frac{x}{3}\right)dx$	***22***	$\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x}}$
8	$\int \frac{dx}{5-2x}$	***23***	$\int \frac{dx}{3x-5}$
9	$\int \cos(4-5x)\,dx$	***24***	$\int \sin(3-2x)dx$
10	$\int \left(\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\right)^{10} dx$	***25***	$\int (5x-1)^7\,dx$
11	$\int (5x-1)^7\,dx$	***26***	$\int \sqrt{4x-1}dx$

12	$\int \sin\left(\frac{x}{6}+1\right)dx$	***27***	$\int (3-2x)^4\,dx$
13	$\int e^{3x+1}dx$	***28***	$\int \sqrt[3]{1+3x}\,dx$
14	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x}}$	***29***	$\int e^{-x^2+5}\cdot xdx$
15	$\int \sqrt[3]{5-6x}\,dx$	***30***	$\int (5-2x)^8\,dx$

Задание11. Найти неопределенный интеграл, результат проверить дифференцированием.

Вариант		***Вариант***	
1	$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$	***16***	$\int \frac{dx}{(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}$
2	$\int \sqrt[3]{1-6x^5}\,x^4dx$	***17***	$\int \frac{x^2dx}{\sin^2\left(2x^3-1\right)}$
3	$\int x\cdot 7^{x^2}dx$	***18***	$\int e^{-x^2}\cdot xdx$
4	$\int \frac{dx}{\cos^2 x\,(3tgx+1)}$	***19***	$\int x\sin\left(1-x^2\right)dx$
5	$\int \frac{x^2dx}{\cos^2 x^3}$	***20***	$\int \frac{xdx}{x^2-5}$
6	$\int x\sin x^2dx$	***21***	$\int e^{x^2+1}\cdot xdx$
7	$\int \frac{xdx}{2x^2+3}$	***22***	$\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+3}}$
8	$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}}$	***23***	$\int \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$
9	$\int \frac{arctgxdx}{1+x^2}$	***24***	$\int e^{x^3}x^2dx$
10	$\int \frac{x^2dx}{1+x^6}$	***25***	$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$
11	$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$	***26***	$\int \frac{\sin xdx}{1+3\cos x}$

12	$\int \frac{x^2dx}{\left(1-x^3\right)^2}$	***27***	$\int \sqrt{x^2+1}\cdot xdx$
13	$\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^4}}$	***28***	$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$
14	$\int \frac{x^2+\ln x}{x}dx$	***29***	$\int \frac{tg^3x}{\cos^2 x}dx$
15	$\int \frac{x^2dx}{\sqrt[2]{x^3+1}}$	***30***	$\int \frac{x^2+(\ln x)^2}{x}dx$

Задание 13. Найти неопределенные интегралы.

Вариант		**Вариант**	
1	$\int xarctg3xdx$	***16***	$\int (x+5)\sin 3xdx$
2	$\int (1-x)e^{3x-8}dx$	***17***	$\int (2-3x)\cos 5xdx$
3	$\int x^2\cdot \ln xdx$	***18***	$\int (3x-2)\sin 2xdx$
4	$\int (8-3x)\cos 5xdx$	***19***	$\int (5x+6)\cos 3xdx$
5	$\int \left(\sqrt{2}-8x\right)\sin 3xdx$	***20***	$\int (5x+3)\sin 5xdx$
6	$\int arctg6xdx$	***21***	$\int 9x\cdot \cos 3xdx$
7	$\int \left(x\sqrt{2}-3\right)\cos 2xdx$	***22***	$\int (5-2x)\cos 5xdx$
8	$\int (7x-10)\sin 4xdx$	***23***	$\int (3-2x)\ln xdx$
9	$\int (x+6)\cos 2xdx$	***24***	$\int (5x-2)e^{3x}dx$
10	$\int (7-3x)\sin 5xdx$	***25***	$\int (x+5)\cos 3xdx$
11	$\int \ln(5x-1)dx$	***26***	$\int (7-4x)\sin 4xdx$
12	$\int e^{2x}(1-6x)dx$	***27***	$\int (4x+3)e^{4x}dx$
13	$\int (4-16x)\sin 4xdx$	***28***	$\int (x-1)\ln xdx$
14	$\int (2-4x)\sin 3xdx$	***29***	$\int (4-3x)e^{2x}dx$
15	$\int \arcsin 3xdx$	***30***	$\int (x-4)\cos 3xdx$

Задание 14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

Вариант	
1	$y=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$; $y=0$
2	$y^2=2x$; $(x-2)^2+y^2=4$
3	$y=x^2-6x+9$; $\frac{x}{3}-\frac{y}{12}=1$
4	$y=x^2$; $xy=8$; $x=6$; $y=0$
5	$y=x^3$; $y=2$; $x=0$
6	$y=x^2$; $y=x$
7	$y=e^{2x}$; $y=e^{-2x}$; $y=2$
8	$y=x^3$; $y=2x$; $y=x$
9	$y=e^{2x}$; $y=e^{-2x}$; $x=\pm 1$; $y=0$
10	$y=-x^2+8$; $y=x^2$
11	$\sqrt{x}+y=4$; $x=0$; $y=0$
12	$y=x^2$; $y^2=8x$
13	$y=e^x$; $y=e^{-x}$; $x=-2$
14	$y=e^{2x}$; $y=e^{-x}$; $y=2$
15	$y=\frac{1}{1+x^2}$; $y=\frac{1}{2}x^2$
16	$y=2x-x^2$; $y=0$
17	$y=x^3-x$; $y=0$
18	$y=x^2$; $x-y+6=0$
19	$xy=6$; $x+y=7$
20	$y=x^2+1$; $y=\frac{1}{2}x^2$; $y=5$
21	$y=\ln x$; $x=e$; $y=0$
22	$y^2=4x$; $x^2=4y$
23	$y=e^x$; $y=e^{-x}$; $y=0$; $x=\pm 1$
24	$\sqrt{x}+y=2$; $x=0$; $y=0$
25	$y=x^2$; $xy=8$; $x=6$
26	$y=e^x$; $y=e^{-x}$; $x=2$
27	$y=\sin x$; $y=0$; $x=\frac{\pi}{2}$

28	$y=\cos x$; $y=0$; $x=\pm\dfrac{\pi}{4}$
29	$y=5x$; $y=0$; $x=3$; $x=10$
30	$y=2x-x^2$; $y=x$

Вопросы к экзамену по математике

для студентов специальности1-69 01 01 «Архитектура».

1. Определители 2-го и 3-го порядка. Свойства определителей.
2. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера. Решение систем линейных однородных алгебраических уравнений.
3. Действия над матрицами и их свойства.
4. Обратная матрица. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом.
5. Определение векторов. Действия над ними.
6. Скалярное произведение векторов.
7. Векторное произведение векторов.
8. Смешанное произведение векторов.
9. Виды уравнений прямой на плоскости.
10. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.
11. Предел функции. Свойства пределов.
12. Бесконечно малые функции и их свойства.
13. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел.
14. Сравнение бесконечномалых функций. Таблица эквивалентности.
15. Общее определение производной.
16. Геометрический смысл производной.
17. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.
18. Основные правила дифференцирования. Таблица производных.
19. Логарифмическое дифференцирование.
20. Производная сложной функции.
21. Производная неявной функции.
22. Дифференциал функции, свойства. Его геометрический смысл.
23. Правило Лопиталя.
24. Необходимое и достаточные условия локального экстремума функции одной переменной.
25. Асимптоты графика функции.
26. Исследование функции на выпуклость и вогнутость. Точки перегиба.
27. Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла.

28. Таблица интегралов.
29. Правила интегрирования.
30. Непосредственное интегрирование.
31. Интегрирование методом замены переменной.
32. Интегрирование по частям.
33. Интегрирование простейших рациональных дробей.
34. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций.
35. Основные свойства определенного интеграла.
36. Формула Ньютона – Лейбница.
37. Замена переменной в определенном интеграле.
38. Интегрирование по частям определенного интеграла.
39. Приложение определенного интеграла.

Перечень типовых экзаменационных задач по темам семестра.

1. Вычислить определитель с помощью правила треугольника: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить определитель, получив предварительно нули в i-ой строке (или j-ом столбце) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$, $i=3$; $j=1$.

3. Даны две матрицы А и В. Найти $(3A+B)$; $(-2B+A)$; AB; BA; A^{-1}; $A\cdot A^{-1}$; $A^{-1}\cdot A$.

$$A\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 8 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Даны матрицы *A*, *B*, *C*:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти те из произведений *AB*, *BA*, *BC*, *CB*, *AC*, *CA*, которые имеют смысл.

5. Решить СЛАУ: $\begin{cases} x_1+5x_2-6x_3=-15, \\ 3x_1+x_2+4x_3=13, \\ 2x_1-3x_2+x_3=9. \end{cases}$

а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

6. Даны $\overline{a}(1;-3;1)$, $\overline{b}(-2;-4;3)$. Найти $5\overline{a}\cdot\overline{b}$.

7. Даны $\overline{a}(7;-1;2)$ и $\overline{b}(1;-3;-2)$. Найти $\overline{a}\times\overline{b}$.

8. Дана $A(1;3;4)$, $B(-1;2;1)$, $C(-3;1;1)$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$.

9. Даны $A(2;1;-1)$, $B(6;-1;-4)$, $C(4;2;1)$. Найти косинус угла между $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

10. Прямая ℓ задана уравнением $x+5y-4=0$. Найти расстояние от точки $M(-1;0)$ до этой прямой.

11. Составить уравнение прямой, если она наклонена к оси Ох под углом 45° и проходит через точку $A(1;4)$.

12. Найти пределы указанных функций:

а) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x-171}{x^8-64x-173}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}{\sqrt{5}x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin7x-\sin x}{8x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg2x}{tg12x}$.

13. Найти производные следующих функций:

а) $y=\ln^2\left(\sin4x+x^4\right)$; б) $y=(\sin8x)^3$;

в) $y=\ln^3 5x\cdot cos^2x$; г) $y=4x-\dfrac{x^6}{\sqrt{x}}+x^3\cdot\sqrt[6]{x^5}-\dfrac{9}{x}+89.$

14. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int\left(4\sqrt{x^3}-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{3x^2}{\sqrt{x}}\right)dx$; д) $\int\cos x\sin x dx$;

б) $\int\left(\dfrac{3}{(5+8x)^{15}}+(4-5x)^{30}\right)dx$; ж) $\int\dfrac{\ln x dx}{x}$;

в) $\int\dfrac{dx}{5+3x}$; з) $\int\dfrac{dx}{x^2+4x-3}$;

г) $\int\cos5xdx$; и) $\int\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}dx$.

15**.** Вычислить неопределенные интегралы, используя формулу интегрирования по частям.

а) $\int x\sin xdx$; *б)* $\int x\cos 5xdx$; *в)* $\int xe^{4x}dx$;

г) $\int \ln 9xdx$; *д)* $\int x\ln xdx$; *е)* $\int \mathrm{arsin}\,3xdx$;

ж) $\int x\,arctg\,xdx$; *з)* $\int arctg\,2xdx$; *и)* $\int \arccos xdx$.

16**.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

а) $y=1$; $x=2$; $y=5x$; *б)* $y=x^2-2x$; $y=2x-x^2$.;

Литература

1. Высшая математика: Учебник. Т.2. / Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. и др. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 184 с.
2. Сборник задач по высшей математике. Часть 1. / Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 576 с.
3. Сухая Т.А., Бубнов В.Ф. Задачи по высшей математике: учеб. Пособие. Часть 1. – Мн.: Вышэйшая школа, 1993. – 416 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. – М.: Высш. шк., 1997. – 415 с.
5. Индивидуальные задания по высшей математике: Учебное пособие. В трех частях. Часть 1 / Под общей редакцией Рябушко А.П. – Мн., Выш. шк., 2000. – 303 с.
6. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1969. – 256 с.
7. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под редакцией Ефимова А.В., Демидовича Б.П. – М.: Наука, 1981. – 464 с.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Наука, 1985.
9. Жевняк Р.М., Карпук А.А.- Высшая математика, Мн. - ВШ, 1984, ч. 1-5.
10. Герасимович А.И., Рысюк Н.А.- Математический анализ. - Мн.: ВШ,- 1989, т. 1-2.

Содержание

Учебное издание

Составители:
Дворниченко Александр Валерьевич
Золотухина Лада Станиславовна
Лебедь Светлана Федоровна
Юхимук Михаил Михайлович

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Задания для аудиторных, домашних и индивидуальных занятий по курсу «Математика» для студентов специальности **1-69 01 01 «Архитектура»**

Ответственный за выпуск: Золотухина Л.С.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 17.02.2015 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Бумага «Снегурочка». Усл. п. л. 3,72. Уч. изд. л. 4,0. Тираж 75 экз.
Заказ № 189. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет».
224017, Брест, ул. Московская, 267.

Дворниченко А.В.,
Золотухина Л.С.,
Лебедь С.Ф.,
Юхимук М.М.

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Задания для аудиторных, домашних и индивидуальных занятий по курсу «Математика» для студентов специальности 1-69 01 01 «Архитектура»