нИженного и атмосферного давления.//Радиотехника и электроника, 1996г., том 41, №4, стр. 389-403.

2. V.G.Perevezev, V.I.Konov, V.G.Ralchenko, A.S.Pozharov, S.Metev, H.Btecht, G.Sepold. Parametric studies of diamond film deposition by dc arc-jet technique// Proceedings of 4th International Symposium on Diamond Films and Related Materials. Kharkov, Ukraine, September 20-22,1999, p. 110-113.

УДК 517.948.34

Пархимович И.В.

О ВЕЗДЕ РАЗРЕШИМЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим краевую задачу для линейного интегро-дифференциального (и.-д.) уравнения

$$T_1u: \begin{cases} Tu \equiv \dot u(x)+P(x)u(x)+\int\limits_0^{x^\alpha} K(x,s)\dot u(s)ds = f(x) \\ u(0)-\int\limits_0^1 M(x)\dot u(x)dx = 0 \end{cases} \tag{1}$$

в которой предполагается:

1. действительная n-вектор-функция $u(x)$ действительного переменного x принадлежит линеалу $D_2^n[0,1]$ абсолютно непрерывных n-вектор-функций, производная которой $\dot u(x)\in L_2^n[0,1]$; n-вектор-функция $f(x)\in L_2^n[0,1]$;
2. $P(x)$, $M(x)$, $K(x,s)$ n x n матрицы, элементы которых суммируем с квадратом соответственно в областях $[0,1]$, $[0,1]$ и $[0,1]$ x $[0,1]$;
3. постоянная $\alpha\in[0,1]$; при $\alpha = 1$ уравнение $Tu=f$ представляет и.-д. уравнение Вольтерра, а при $\alpha = 0$ - и.-д. уравнение Фредгольма.

Следовательно, уравнение $Tu=f$ (1) является обобщением этих известных видов и.-д. уравнений.

Для выяснения разрешимости краевой задачи (1) определим дефектное подпространство сужения оператора $D=\frac{d}{dx}$ на n-векторно-значную функцию u краевым условием задачи(1)

$$Su: \begin{cases} Du \equiv \dot u(x) \\ u(0)-\int\limits_0^1 M(x)\dot u(x)dx = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Уравнение $Su=f$ разрешимо при $\forall f(x)\in L_2^n[0,1]$. Действительно, полагая $u(x)=\int\limits_0^x f(t)dt + C$ и подставляя его в краевое условие, получим значение $u(x)=\int\limits_0^x f(t)d + \int\limits_0^1 M(t)f(t)dt$, удовлетворяющее уравнению $Su = f$ при $\forall f \in L_2^n[0,1]$.

Таким образом, имеет место

Лемма 1. Дефектное подпространство оператора $S(2)$ равно нулю, т.е. $Z_s^+ = 0$.

Пусть матрица $P(x)$ произвольная, удовлетворяющая условию 2. Если при тех же ограничениях матрицы $M(x)$ и $K(x,s)$ произвольны, то, очевидно, что краевая задача (1) не разрешима при $\forall f(x)\in L_2^n[0,1]$.

Однако если специальным образом выбрать $M(x)$ и $K(x,s)$ в некоторой части квадрата $0\le x,\ s\le 1$, то окажется, что краевая задача (1) станет разрешимой при $\forall f(x)\in L_2^n[0,1]$ и согласно терминологии [1] такое уравнение $T_1u=f$ называется везде разрешимым. Осуществлять этот специальный выбор матриц $M(x)$ и $K(x,s)$ будем с помощью s-сопряженного оператора T_{1s}^*, используя аналог формулы Лагранжа [2], получаемой интегрированием по частям при любых $u\in D_2^n[0,1]$, $\dot u\in L_2^n[0,1]$ и $\forall v\in L_2^n[0,1]$:

$$\int\limits_0^1 Tuvdx = \int\limits_0^1 \dot u v dx + \int\limits_0^1 Puvdx + \int\limits_0^1\int\limits_0^{x^\alpha} K(x,s)\dot u(s)dsv(x)dx =$$
$$= \int\limits_0^1 \dot u v dx + u(x)\int\limits_1^x P^T(s)v(s)ds\,\Big|_{x=0}^1 +$$
$$+\int\limits_0^1 \dot u(x)\int\limits_x^1 P^T(s)v(s)dsdx +$$
$$+\int\limits_0^1 \dot u(x)\int\limits_{x^{\frac{1}{\alpha}}}^1 K^T(s,x)v(s)dsdx = u(0)\int\limits_0^1 P^T(s)v(s)ds +$$
$$+\int\limits_0^1 \dot u(x)\left(v(x)+\int\limits_x^1 P^T(s)v(s)ds + \int\limits_{x^{\frac{1}{\alpha}}}^1 K^T(s,x)v(s)ds \right)dx.$$

Итак, аналог формулы Лагранжа для и.-д. оператора $T(1)$ имеет вид

Пархимович Игорь Владимирович. *Доцент каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская 267.

$$\int_0^1 (\dot u + Pu + \int_0^{x^\alpha} K(x,s)\dot u(s)ds)v(x)dx =$$

$$= u(0)\int_0^1 P^T(s)v(s)ds + \int_0^1 \dot u(x)\left(v(x) + \int_x^1 P^T(s)v(s)ds + \right.$$

$$\left. + \int_{x^{\frac{1}{\alpha}}}^1 K^T(s,x)v(s)ds\right)dx, \qquad (3)$$

причем $x^{\frac{1}{\alpha}} \overset{def}{=} 0$ при $\alpha=0$.

Из краевых условий задачи (1) находим $u(0)$ и подставляем в аналог формулы Лагранжа (3):

$$\int_0^1 (\dot u + Pu + \int_0^{x^\alpha} K(x,s)\dot u(s)ds)v(x)dx =$$

$$= \int_0^1 M(x)\dot u(x)dx \cdot \int_0^1 P^T(s)v(s)ds +$$

$$+ \int_0^1 \dot u(x)\left(v(x) + \int_x^1 P^T(s)v(s)ds + \right.$$

$$\left. + \int_{x^{\frac{1}{\alpha}}}^1 K^T(s,x)v(s)ds \right)dx$$

$$\int_0^1 \left(\dot u + Pu + \int_0^{x^\alpha} K(x,s)\dot u(s)ds \right) v(x)dx =$$

$$= \int_0^1 \dot u(x)(\int_0^1 M^T(x)P^T(s)ds + v(x) +$$

$$+ \int_x^1 P^T(s)v(s)ds + \int_{x^{\frac{1}{\alpha}}}^1 K^T(s,x)v(s)ds)dx$$

Это равенство справедливо при $\forall u \in D(T_1)$, $v \in L_2^n[0,1]$ и, следовательно, s-сопряженным оператором к оператору $T_1(1)$ является интегральный оператор

$$T_{1s}^* v = v(x) + \int_0^{x^{\frac{1}{\alpha}}} M^T(x)P^T(s)v(s)ds +$$

$$+ \int_{x^{\frac{1}{\alpha}}}^x (M^T(x)P^T(s) + K^T(s,x))v(s)ds + \qquad , \quad (4)$$

$$+ \int_x^1 (M^T(x)P^T(s) + P^T(s) + + K^T(s,x))v(s)ds$$

где $M^T(x)$, $P^T(s)$, $K^T(s,x)$ - транспонированные матрицы соответственно к матрицам $M(x)$, $P(s)$, $K(s,x)$.

В силу леммы 1 s-сопряженный оператор T_{1s}^* единственен и его можно записать в фредгольмовом виде

$$T_{1s}^* v = v(x) + \int_0^1 \tilde K(x,s)v(s)ds \qquad (4')$$

если положить

$$\tilde K(x,s) = \begin{cases} M^T(x)P^T(s), & если\, 0 \le s < x^{\frac{1}{\alpha}} \\ M^T(x)P^T(s) + K^T(s,x), & если\, x^{\frac{1}{\alpha}} \le s < x \\ M^T(x)P^T(s) + P^T(s) + K^T(s,x), & если\, x \le s. \end{cases}$$

Как известно[2], везде разрешимость краевой задачи (1)или иначе и.-д. оператора $T_1(1)$ определяется отсутствием нетривиальных нулей s-сопряженного оператора (4'). И в общем случае вопрос о наличии или отсутствии нетривиальных нулей оператора (4) представляет сложную задачу.

Однако, если интегральный оператор (4') является вольтерровым, т.е. $\tilde K(x,s) \equiv 0$ при $s < x(или\ s > x)$, то в этом случае хорошо известно, что интегральный оператор (4') не имеет других нулей, кроме тривиального и значит, соответствующая краевая задача (1) оказывается везде разрешимой.

Мы обобщим понятие вольтеррового интегрального оператора и рассмотрим интегральный оператор

$$Kv \equiv v(x) + \int_0^1 K(x,s)v(s)ds, \qquad (5)$$

где

$$K(x,s) \equiv 0,\ если\, 0 \le x < x_0,\ x \le s\ и\, при\, x_0 < x \le 1, x > s \qquad (6)$$

Тогда справедлива

Лемма 2. Если линейный интегральный оператор (5) обобщенный вольтерровский, т.е. ядро $K(x,s) - n \times n$ матрица обладает условием (6) и элементы которой с суммируемым квадратом в $[0,1] \times [0,1]$, а $v(x) - n -$ вектор-функция, компоненты которой с суммируемым квадратом, то он имеет лишь тривиальный нуль.

Возвратимся к рассмотрению s-сопряженного оператора $T_{1s}^*(4')$ и если ядро этого оператора обобщенное вольтеровское, то согласно лемме 2 этот оператор имеет лишь тривиальный нуль и значит исходная краевая задача (1) при этих дополнительных ограничениях на ядро $K(x,s)$ и на $M(x)$ разрешима при $\forall f(x) \in L_2^n[0,1]$, т.е. справедлива.

Теорема 1. Пусть в краевой задаче (1), в которой выполнены предположения 1-3, имеют место условия:

1. $M(x) \equiv 0,\ если\ x_0 \le x \le 1, 0 \le x_0 \le 1$;
2. Матрица $K(x,s)$,определенная в области $0 \le s \le x^\alpha,\ 0 \le x \le 1,$ имеет в некоторой ее части специальный вид:

а) $K(x,s) \equiv 0, \quad если \quad s^{\frac{1}{\alpha}} \le x \le s,$
$x_0 \le s \le 1 \quad (s^{\frac{1}{\alpha}} \overset{def}{=} 0, \quad если \quad \alpha = 0)$

б)
$K(x,s) = -P(x)(M(S) + E),\ если\ 0 \le s \le x_0, s < x$
(E - единичная матрица и $0 \le x_0 \le 1$)

Тогда краевая задача (1) разрешима при $\forall f(x)\in L_2^n[0,1]$.
Из теоремы следует

Теорема 2. Если в задаче Коши для линейного и.-д. уравнения

$$Tu \equiv \dot{u}(x)+P(x)u(x)+\int_0^{x^{\alpha}} K(x,s)\dot{u}(s)ds = f(x)$$

$$u\ (x_0)=0, \quad 0\le x_0\le 1$$

выполнены предположения 1-3 задачи (1) и $K(x,s)\equiv 0,$ *если* $s^{\frac{1}{\alpha}}\le x\le s,\ x_0\le s\le 1$ и если $s<x, \quad 0\le s\le x_0$, то задача Коши для и.-д. уравнения разрешима при $\forall f(x)\in L_2^n[0,1]$.

Полученные результаты применяются для установления одного признака управляемости [3].

Теорема3. Если линейной и.-д. оператор T_1, соответствующий краевой задаче 1, удовлетворяет теореме 1, а B-матрица $n\times r$ *и* $z\in L_2^r[0,1]$, то оператор $T_1 u\times Bz$ управляем в $L_2^n[0,1]$ при любой кусочно-непрерывной матрице B.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Крейн. С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.1971.
2. Пархимович И.В. О построении ***s***– сопряженных операторов к интегро-дифференциальным. ДУ, 8, №8, 1972.
3. Ландо Ю.К. Об управляемых операторах. ДУ, 10, №3, 1974.

УДК 517:330.105

Тузик А.И., Рубанов В.С., Сидоревич М.П.

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Рассматривается и кратко анализируется современная литература по высшей и финансовой математике и их экономическим приложениям.

В [1] ставится вопрос о подготовке для экономистов учебника по высшей математике, который включал бы в себя методы решения финансовых задач, т.е. “финансовую математику”, что позволит улучшить методику преподавания высшей математики и придать ей большую прикладную направленность. Отметим, что опыт подготовки учебных пособий такого типа в определенной степени реализован в [2,3].

Однако пока превалирует тенденция раздельного изучения высшей математики [4-12], которая начинается с первого семестра, и финансовой математики [13-24], изучаемой позже в зависимости от специальности.

На наш взгляд, оба подхода к изучению математики для экономистов имеют право на существование. У каждого из них имеются свои достоинства и недостатки, которые составляют предмет самостоятельного анализа.

После прекрасной монографии [2], ставшей уже библиографической редкостью, в которой даны многочисленные и разнообразные приложения элементарной и высшей математики к решению экономических задач, лишь сравнительно недавно изданы книги [3-12], где изложение теории по основным разделам общего курса высшей математики (линейная алгебра и аналитическая геометрия, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных, дифференциальные и разностные уравнения, ряды) в большей или меньшей степени подкрепляются решением задач экономического характера. При этом различные экономические приложения высшей математики наиболее полно отражены в [6-12].

Отметим книгу [10], в которой нестандартно обсуждается "какую математику и как должен изучать будущий экономист", показывается, что математические понятия вводятся и изучаются ради экономических. Все изучаемые математические понятия здесь иллюстрируются приложениями из экономики, финансов, управления.

В [10,11] рассматриваются также теория вероятностей и математическая статистика, задачи оптимизации в экономике. Более полно эти разделы высшей математики для экономистов изложены в [25-28].

Основные понятия теории игр, теории графов, математического программирования и наиболее часто применяемые в экономике задачи (взаимно двойственные задачи линейного программирования, о максимальном потоке, определение критического пути и расчет временных параметров сетевого графика, транспортная задача и др.) приведены в [8,11,29-33].

Важные вопросы математического моделирования в экономике отражены в [34-42].

Выделим такие из них, как: предварительный анализ и сглаживание временных рядов экономических показателей; прогнозирование экономической динамики на основе трендовых моделей; экономико-математическая модель межотраслевого баланса; эконометрические модели, параметры которых оцениваются с помощью методов математической статистики на основе реальной статистической информации; модели управления запасами; модели систем массового обслуживания в экономической сфере; применение оптимальных экономико-математических моделей для решения производственных задач; имитационные модели, основанные на методах экспериментального изучения социально-экономических задач с помощью ЭВМ.

Укажем справочник по математике для экономистов [43], в котором отражены основные разделы элементарной и высшей математики, которые в настоящее время широко применяются при анализе экономических систем.

Отметим ещё один нюанс. Подготовка математиков-экономистов позволяет наряду с дискретными моделями мак-

Тузик Альфред Иванович. *Доцент, к. ф.-м. н. каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Рубанов Владимир Степанович. *К. ф.-м. н., зав. каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Сидоревич Михаил Павлович. *Доцент, к. ф.-м. н. каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская 267.