2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1966.
3. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике. Под ред. Т. Круза и Ф. Риццо. - М.: Мир, 1978.
4. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. - М.: Высшая школа, 1978.

УДК 532.135

Босяков С.М.

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В ПОЛУМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ МИКРОПОЛЯРНОЙ ВЯЗКОЙ СРЕДЫ

Решения волновых уравнений в виде плоских волн имеют большое значение, так как отражают наиболее характерные свойства колебательных процессов. Ниже предлагается анализ волновых явлений в вязкой жидкости с несимметричным тензором напряжений с позиции теории плоских волн.

В случаях, когда можно пренебречь диссипацией энергии и считать, что движения происходят с малыми скоростями, система уравнений для анализа волновых процессов в микрополярной жидкой среде, при условии равенства поворота локального трехгранника среднему повороту поля перемещений, примет вид [1]:

$$\mu\Delta\vec{v} + \left(\lambda + \frac{\mu}{3}\right) graddiv\vec{v} + \frac{1}{4}(\gamma+\beta) rotrot\Delta\vec{v} - gradp = \rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho div\vec{v} = 0.$$

Здесь $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ - вектор скорости, λ, μ - объемная и сдвиговая вязкости, γ, β - коэффициенты вращательной вязкости [2,3], p - давление, ρ - плотность среды, Δ - оператор Лапласа, массовые силы отсутствуют.

Известно, что векторное поле можно представить в виде суммы потенциальной и вихревой компонент [4,5]:

$$\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{v}_L = grad\varphi + rot\vec{A}, \quad (2)$$

где $\varphi, \vec{A}$ скалярный и векторный потенциалы. Также отметим, что в (2) компонента $\vec{v}_L = grad\varphi$ описывает продольные (звуковые) волны, $\vec{v}_T = rot\vec{A}$ - поперечные (сдвиговые) волны.

Для продольных колебаний система (1) приводится к известному волновому уравнению [5]:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial t}\Delta\vec{v}_L + \rho\frac{\partial p}{\partial\rho}\Delta\vec{v}_L - \rho\frac{\partial^2\vec{v}_L}{\partial t^2} = 0, rotv_L = 0. \quad (3)$$

Если искать решение уравнения (3) в виде плоской гармонической волны $\vec{v}_T = \vec{n}A(x)exp(-i\omega t)$, то дисперсионное соотношение примет вид [5]:

$$k \approx \frac{\omega}{c_0}\left(1 + i\frac{b\omega}{2c_0^2\rho}\right) = k' + ik'', \quad (4)$$

где $c_0 = \frac{\partial p}{\partial\rho}$, $b = \lambda + \frac{4\mu}{3}$, ω - частота, k - волновое число, i - мнимая единица. Используя выражение (4), получим решение уравнения (3) в виде:

$$\vec{v}_l = \vec{n}A_1 exp(-k''x)exp\left(-i\omega\left(t - \frac{\lambda}{c_0}\right)\right) + \vec{n}A_2 exp(k''x)exp\left(-i\omega\left(t + \frac{\lambda}{c_0}\right)\right).$$

Это решение представляет собой совокупность двух встречных плоских гармонических волн, амплитуды которых убывают по мере распространения ($\vec{n}$ -нормаль к волновой поверхности). Здесь коэффициент затухания $k'' = \frac{\omega^2 b}{2\rho c_0^3}$ [5].

Для сдвиговых колебаний из уравнения неразрывности следует $\frac{\partial p}{\partial\rho} = 0$, то есть жидкость можно рассматривать как несжимаемую ($\rho = const$). Тогда из (1) получим

$$\mu\Delta\vec{v}_T + \frac{1}{4}(\gamma+\beta) rotrot\Delta\vec{v}_T = \rho\frac{\partial\vec{v}_T}{\partial t}, \quad div\vec{v}_T = 0. \quad (5)$$

Учитывая, что $rotrot\Delta\vec{v}_t = graddiv\Delta\vec{v}_t - \Delta^2\vec{v}_t$, из системы (5) будем иметь:

$$\mu\Delta\vec{v}_T - \frac{1}{4}(\gamma+\beta)\Delta^2\vec{v}_T = \rho\frac{\partial\vec{v}_T}{\partial t}, \ div\vec{v}_T = 0. \quad (6)$$

Будем считать, что поперечные волны в жидкости возбуждаются колеблющейся стенкой так, что твёрдая поверхность, совпадающая с плоскостью yz декартовой системы координат, совершает движение вдоль оси y. Значит, для величины $\vec{v}_t = \{v_x, v_y, v_z\}$ отлична от нуля только компонента v_y и решение (6) ищем в виде

$$v_y = v_0 exp(-i(\omega t - kx)). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), найдём закон дисперсии (связь между волновым числом κ и частотой ω):

$$\mu k^2 + \frac{1}{4}(\gamma+\beta)k^4 = \rho\omega i, \quad (8)$$

или

Босяков Сергей Михайлович. *Ассистент каф. СМиТМ Брестского государственного технического университета. Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская 267.*

$$k^2 = \sqrt{\Omega^2 + \Omega\frac{2\rho\omega i}{\mu}} - \Omega\ ,\ \ \Omega = \frac{2\mu}{\gamma+\beta}. \quad (9)$$

Это уравнение указывает на существование в полумоментной микрополярной жидкой среде двух совокупностей взаимосвязанных поперечных волн, обладающих дисперсией. Выведенный дисперсионный закон (9) позволяет получать зависимости фазовой скорости $v_f = \dfrac{\omega}{Re\,k(\omega)}$ и коэффициента затухания $\alpha = Im\,k(\omega)$ от частоты [5]. Также отметим, что соотношение (8) при $\gamma+\beta=0$ (микрополярные эффекты отсутствуют) совпадает с дисперсионным уравнением для классической гидродинамики вязкой несжимаемой среды [5].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Мартыненко М.Д., Войнич В.П./ Весці АН Беларусі, сер. фіз. - тэх. навук, 1996, 4, С. 68-70.
2. Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Кувшинский Е.В./ ПММ, 1964, т.29, 2,С. 297-308.
3. Листров А.Т./ ПММ, 1967, т.31, 1, С. 1616-1632.
4. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред: в приложении к теории волн. М., 1982.
5. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М., 1980.

УДК 532.135

Босяков С.М., Веремейчик А.И.

МЕТОД СИЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ МИКРОПОЛЯРНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Нестационарные процессы в вязких жидких средах с несимметричным тензором напряжений изучались в фундаментальных работах [1-3]. Ниже приводится исследование двумерного движения вязкой несжимаемой микрополярной жидкости с точки зрения общей теории характеристик [4,5], описываемого следующими матрицами силовых и моментных напряжений:

$$\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{Vmatrix},\quad m = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & m_{13} \\ 0 & 0 & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Здесь для конкретности предполагаем, что движение происходит в плоскости $x_3 = 0$, а потому:

$$\sigma_{ii} = -p + 2\mu\frac{\partial v_i}{\partial x_i},$$
$$\sigma_{ij} = (\mu+\alpha)\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + (\mu-\alpha)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + 2(-1)^i\gamma\omega_3, \quad (1)$$
$$m_{i3} = 2\tau\frac{\partial\omega_3}{\partial x_i}, m_{3i} = 2\theta\frac{\partial\omega_3}{\partial x_i}, i \neq j = 1,2.$$

В формулах (1) v_1, v_2 - составляющие вектора скорости, ω_3 - составляющая вектора скорости микровращения, λ,μ - объёмная и сдвиговая вязкости, γ- коэффициент "сцепления" частицы со своим окружением, τ,θ - коэффициенты вращательной вязкости, p - давление.

Подставим (1) в уравнения поступательного и вращательного движения микрополярной среды:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + X_1 = \rho\frac{dv_1}{dt},$$
$$\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 = \rho\frac{dv_2}{dt}, \quad (2)$$
$$\frac{\partial m_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial m_{32}}{\partial x_2} + \sigma_{21} - \sigma_{12} = j\rho\frac{d\omega_3}{dt}.$$

Считая, что жидкость является несжимаемой $(\rho = const)$ и движения происходят с малыми скоростями, получим из (1)-(2):

$$(\mu-\alpha)\Delta v_1 + 2\gamma\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2} - \frac{\partial p}{\partial x_1} + X_1 = \rho\frac{\partial v_1}{\partial t},$$
$$(\mu-\alpha)\Delta v_2 - 2\gamma\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_2} + X_2 = \rho\frac{\partial v_2}{\partial t},$$
$$(\tau+\theta)\Delta\omega_3 + \gamma\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) - 2\gamma\omega_3 + Y_3 = j\rho\frac{\partial\omega_3}{\partial t},$$
$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \quad (3)$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, j - мера инерции вращения, ρ - плотность, X_1, X_2 - массовые силы, Y_3 - массовый момент.

Будем считать, что v_1, v_2, ω_3, p являются непрерывными функциями, а их первые частные производные испытывают на поверхности $Z(t, x_1, x_2) = const$ сильные разрывы (разрывы первого рода), удовлетворяющие кинематиче-

Босяков Сергей Михайлович. *Ассистент каф. СМиТМ Брестского государственного технического университета.*
Веремейчик Андрей Иванович. *Аспирант каф. сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская 267.