МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

ЧАСТЬ VI.

Р Я Д Ы

Брест 2011

УДК 517.9 (076.5)

В части VI практикума содержатся краткие теоретические сведения, основные формулы, решения типовых задач по всем темам раздела «Ряды» учебной программы по математике для технических специальностей, а также задания для аудиторных и домашних работ к каждому практическому занятию по этим темам. Издается в 7-ми частях. Часть 6.

Составители: Р. А. Гоголинская, ассистент.
В. Т. Джура, ассистент.
Е. В. Кузьмина, ассистент.
И.В. Лизунова, доцент.
Л. Т. Мороз, доцент.

Рецензент: Савчук В.Ф., заведующий кафедрой информатики и прикладной математики учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м. н., доцент.

Учреждение образования
© «Брестский государственный технический университет», 2011

Ряды. Сходимость знакоположительных рядов. Признаки сравнения

Ряды представляют собой простой и весьма совершенный инструмент математического анализа для приближенного вычисления функций, интегралов и решений дифференциальных уравнений.

Рядом называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

где $u_1, u_2, u_3, \ \ldots u_n \ \ldots$ – последовательность чисел или функций.

Слагаемые $u_1, u_2, u_3, \ \ldots u_n \ \ldots$ называются ***членами ряда***. Если все члены ряда являются числами, то ряд называется ***числовым***, если члены ряда – функции, то ряд называется ***функциональным***.

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

Ряд (1) задан, если известен его ***общий член*** $a_n = f(n)$, т.е. известно правило, по которому каждому номеру n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ставится в соответствие вполне определенный член ряда.

Сумма конечного числа n первых членов ряда называется его n ***– ой частичной суммой***:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n .$$

Конечный или бесконечный предел частичной суммы при $n \to \infty$ называется ***суммой ряда***:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n .$$

Ряд, имеющий конечную сумму, называется ***сходящимся***. Если ряд (1) сходится и его сумма равна S, то используют запись

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S .$$

Если предел частичной суммы не существует или бесконечен, то ряд называется ***расходящимся***.

Если в ряде (1) отбросить первые m членов, то получится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n} = a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_{m+n} + \ldots,$$

называемый ***остатком ряда (1) после*** m ***– ого члена***.

Если сумму остатка сходящегося ряда обозначить R_m, то, очевидно,

$$S_m + R_m = S .$$

Справедливы следующие теоремы:

1. Отбрасывание от ряда или присоединение к ряду любого конечного числа начальных членов не меняет его сходимости или расходимости.
2. Если ряд (1) сходится, то предел его m – го остатка при $m \to \infty$ равен нулю, т.е. $\lim\limits_{m\to\infty} R_m = 0$.
3. Умножение членов ряда на число $\lambda \neq 0$ не нарушает его сходимости (или расходимости).

Одна из важнейших задач теории числовых рядов – разработка методики вычисления их сумм. Чаще всего ограничиваются приближенным вычислением суммы ряда, полагая $S \cong S_m$ и допуская при этом ошибку, равную сумме ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m+n}$. Но прежде чем браться за вычисление суммы, нужно установить, сходится или расходится данный ряд, ибо расходящийся ряд суммы не имеет. При этом особое значение приобретает задача об исследовании ряда на сходимость.

Приведем некоторые теоремы, выражающие общие признаки сходимости числовых рядов.

Необходимый признак сходимости ряда: *Если ряд (1) сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*, т.е. при* $n \to \infty$ *предел общего члена сходящегося ряда равен нулю.*

Достаточный признак расходимости ряда: *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$*, то ряд расходится.*

Из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, не следует, что данный ряд сходится, необходимо исследовать ряд дальше.

<u>Пример 1.</u>

Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n}$ удовлетворяет необходимому признаку сходимости, но является расходящимся.

Решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

Необходимый признак выполняется, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Оценим n – ую частичную сумму ряда:

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ раз}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$ Итак,

$S_n \geq \sqrt{n}$. Очевидно, что при $n \to \infty$ $\sqrt{n} \to \infty$, а следовательно $S_n \to \infty$, ряд расходится.

Первый признак сравнения. *Пусть даны два ряда (с положительными членами)*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{3}$$

причём для всех $n \ge n_0$ выполняется неравенство $0 < u_n \le v_n$.

Тогда:

1) *из сходимости ряда (3) следует сходимость ряда(2),*
2) *из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда(3).*

Второй признак сравнения (предельный). *Если существует конечный и отличный от нуля предел* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$*, то оба ряда* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *одновременно сходятся или одновременно расходятся.*

В качестве рядов для сравнения часто выбирают ряд, являющийся суммой геометрической прогрессии или ряд Дирихле.

Ряд вида $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$ является суммой *геометрической прогрессии* и при $|q| < 1$ сходится к числу $S = \frac{a}{1-q}$; при $|q| > 1$ расходится.

Рядом Дирихле (обобщенным гармоническим рядом) называется знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$.

При $\alpha = 1$ ряд Дирихле становится гармоническим рядом.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ при $\begin{cases} \alpha \le 1 - \textit{расходится}, \\ \alpha > 1 - \textit{сходится} \end{cases}$.

(Ряд Дирихле исследуется на сходимость с помощью интегрального признака сходимости.)

<u>Пример 2.</u>

Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots.$$

Решение.

Ряд $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$ расходится, т.к. это ряд Дирихле с общим членом $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, при $\alpha = \frac{1}{2}$.

Пример 3.

Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{3}{8}+...$$

Решение.

Найдём $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+2}=\frac{2}{3}\neq 0$. Необходимый признак сходимости для данного ряда не выполняется. Поэтому ряд расходится.

Пример 4.

Записать первые пять членов ряда, n – ый член которого задан формулой $a_n=\frac{n+1}{n\cdot 3^n}$. Исследовать данный ряд на сходимость.

Решение.

Полагая в данной формуле $n=\overline{1,5}$, получаем

$a_1=\frac{1+1}{1\cdot 3^1}=\frac{2}{3}$, $a_2=\frac{2+1}{2\cdot 3^2}=\frac{3}{2\cdot 3^2}=\frac{1}{6}$, $a_3=\frac{3+1}{3\cdot 3^3}=\frac{4}{81}$, $a_4=\frac{4+1}{4\cdot 3^4}=\frac{5}{324}$, $a_5=\frac{5+1}{5\cdot 3^5}=\frac{6}{1215}=\frac{2}{405}$.

Ряд запишем в виде

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{4}{81}+\frac{5}{324}+\frac{2}{405}+...+\frac{n+1}{n\cdot 3^n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n\cdot 3^n}.$$

Для сравнения возьмём ряд с общим членом $b_n=\frac{1}{3^n}$; это геометрическая прогрессия с $a=\frac{1}{3}$ и $q=\frac{1}{3}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n\cdot 3^n}}{\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{n\cdot 3^n}=1.$$

Согласно предельному признаку сравнения ряды ведут себя одинаково, т.е. оба сходятся.

Пример 5.

Найти формулу n – ого члена. Ряд исследовать на сходимость.

$$3+\frac{9}{8}+\frac{27}{27}+\frac{81}{64}+...$$

Решение.

Каждый член данного ряда, начиная со второго, представляет собой дробь, числитель которой – степени числа 3, а знаменатель – третья степень числа n. Первый член $3=\frac{3^1}{1^3}=\frac{3}{1}$, второй: $\frac{9}{8}=\frac{3^2}{2^3}$, …

Таким образом, $a_n=\frac{3^n}{n^3}$.

Проверим выполнение необходимого признака:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot\ln 3}{3n^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot(\ln 3)^2}{6n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot(\ln 3)^3}{6}==\infty.$$

Необходимый признак сходимости не выполняется. Поэтому ряд расходится.

Пример 6.

Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{n+10}+\ldots$$

Решение.

Данный ряд получен из гармонического ряда отбрасыванием первых десяти членов. Следовательно, он расходится.

Пример 7.

Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$$

Решение.

Члены данного ряда меньше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, т.е. ряда $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$. Последний ряд сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Следовательно, сходится и данный ряд.

Задания.

1. Написать первые 5 членов ряда по заданному общему члену

а) $a_n=\dfrac{3^n}{2n^3+1}$;

б) $a_n=\dfrac{n+1}{n!}$; в) $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+3)\cdot 5^{n-1}}$.

2. Написать формулу общего члена ряда

а) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+\ldots$; б) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots$.

3. Найти сумму ряда

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$.

4. Исследовать на сходимость ряд:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n-1}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{5^n+1}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{2n+5}$.

Домашнее задание.

1. Написать первые 5 членов ряда по заданному общему члену

а) $a_n=\frac{\ln(n+1)}{n^2}$;

б) $a_n=\frac{2+(-1)^n}{n!}$; в) $a_n=\frac{2n^2+1}{\sqrt{2^n+1}}$.

2. Написать формулу общего члена ряда

а) $\frac{\ln 2}{4}+\frac{\ln 3}{9}+\frac{\ln 4}{16}+\frac{\ln 5}{25}+\ldots$;

б) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{2}}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{4}}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{6}}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sqrt{8}}+\ldots$; в) $1-\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}-\frac{8}{4!}+\ldots$.

3. Найти сумму ряда

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{14}{(7n-3)(7n+4)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3-n}{n(n+1)(n+3)}$.

4. Исследовать на сходимость ряд:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)\cdot 3^n}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\cdot q^n$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{6^{n+1}}$; з) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+3}}$.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg\,\frac{2}{n^2}$;

Сходимость знакоположительных рядов. Признаки Даламбера и Коши, интегральный признак Коши

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами. Рассмотрим достаточный признак сходимости рядов с положительными членами.

Признак Даламбера: *Если* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, *то при*

$$\begin{cases} \ell < 1, \text{ ряд сходится}; \\ \ell > 1, \text{ ряд расходится}; \\ \ell = 1, \text{ вопрос не решен (нужны дополнительные исследования)}. \end{cases}$$

Признак Коши (радикальный): *Если* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$, *то при*

$$\begin{cases} \ell < 1, \text{ ряд сходится}; \\ \ell > 1, \text{ ряд расходится}; \\ \ell = 1, \text{ вопрос остаётся нерешенным}. \end{cases}$$

Интегральный признак Коши: *Рассмотрим ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

Пусть члены ряда (1) неотрицательны и имеют вид $a_n = f(n)$, $\forall n \in N$, *где* $y = f(x)$ *– непрерывная функция, монотонно убывающая на полуинтервале* $[N, +\infty]$, $(N \geq 1)$, *тогда ряд (1) и несобственный интеграл* $\int_N^{\infty} f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Замечание. Если указанные ранее признаки не дают ответа о сходимости рядов с положительными членами, то надо применить более тонкие признаки: Раабе, Бертрана, Гаусса.

Рассмотрим некоторые примеры исследования рядов на сходимость.

<u>Пример 8.</u>

Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n+1}}$ на сходимость.

Решение.

Поскольку

$a_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+2}}$, то по признаку Даламбера

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot 2^{n+1}}{2^{n+2} \cdot n!} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty > 1$ и данный ряд расходится.

Пример 9.

Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n}.$$

Решение.

Т.к. $a_n=\frac{n^5}{2^n}$, $a_{n+1}=\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}}$, то по признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n^5}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}<1,$$

поэтому данный ряд сходится.

Пример 10.

Исследовать по интегральному признаку сходимости рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^3 n}$.

Решение.

а) Заменяем в заданном выражении общего члена ряда $a_n=f(n)$ номер n непрерывной переменной x и убеждаемся, что полученная функция $f(x)$ является непрерывной и убывающей во всём бесконечном полуинтервале изменения x. Затем находим несобственный интеграл от $f(x)$ с бесконечным верхним пределом.

$$\int_1^{+\infty}\frac{2x}{x^2+1}dx=\lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta}\frac{2x}{x^2+1}dx=\lim_{\beta\to+\infty}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^{\beta}=\lim_{\beta\to+\infty}\left(\ln(+\infty)-\ln 2\right)=\infty.$$

Здесь несобственный интеграл расходится. Следовательно, согласно интегральному признаку, и данный ряд также расходится.

б) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^3 n}$.

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\ln^3 x}dx=\lim_{\beta\to+\infty}\int_2^{\beta}(\ln x)^{-3}\,d(\ln x)=\lim_{\beta\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\Big|_2^{\beta}=$$

$=\lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{1}{2\ln^2 2}-\frac{1}{2\ln^2\beta}\right)=\frac{1}{2\ln^2 2}=C$ – интеграл сходится, значит, и ряд сходится.

Пример 11.

С помощью признака Коши исследовать сходимость рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+5}{2n+1}\right)^n$.

Решение.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{4^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{4}<1.$

Т.к. $\ell=\frac{1}{4}<1$, то ряд сходится.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+5}{2n+1}\right)^n$.

Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+5}{2n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+5}{2n+1}=\frac{3}{2}>1$ – ряд расходится.

Задания.

Исследовать сходимость рядов (необходимый признак, признаки сравнения и достаточные).

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2n+3}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{1+n^3}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)^n}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+\sqrt{n}}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+2}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{3}{n}$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$.
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4-4}$.
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln^2(n+1)}$.
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$.
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$.
15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$.
16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}$.

Домашнее задание.

Исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n+2}{4}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)^2}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n-1}}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n\sqrt{n}+3}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n+\sqrt{n}+5}\right)^n$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} arctg^n \frac{n}{3}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot\ln(n+1)}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n-1}}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n-1)\ln(10n-1)}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{2n+5}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3^n\cdot(n-1)}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$.

Сходимость знакопеременных рядов. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость

Числовой ряд называется ***знакопеременным***, если он содержит как положительные, так и отрицательные слагаемые.

Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots \tag{1}$$

сходится, если сходится ряд, составленный из модулей его членов, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = |b_1| + |b_2| + |b_3| + \ldots + |b_n| + \ldots \tag{2}$$

В этом случае ряд (1) называется ***абсолютно сходящимся***. Если ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то ряд (1) называется ***условно*** или ***не абсолютно сходящимся***.

Вопрос о сходимости ряда (2) как ряда с положительными членами исследуется с помощью достаточных признаков сходимости рядов знакоположительных.

Знакопеременный ряд, у которого любые два соседних члена имеют разные знаки, называется ***знакочередующимся***.

Рассмотрим знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots, \tag{3}$$

где $a_n > 0 \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Признак Лейбница. *Если для знакочередующегося ряда (3) выполняются условия*

1) $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge a_{n+1} \ge \ldots,$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*, то ряд сходится и его сумма не превосходит первого члена, а остаток ряда* r_n *удовлетворяет неравенству* $|r_n| \le a_{n+1}$.

Таким образом, при замене суммы сходящегося знакочередующегося ряда суммой n его первых членов погрешность (ошибка) не превышает абсолютного значения первого из отброшенных членов.

Замечание. Отбрасывание или добавление любого n – го числа членов ряда не влияют на его сходимость, это значит, первое условие признака Лейбница может выполняться начиная с любого номера $n \ge 1$.

Из свойств абсолютно и условно сходящихся рядов необходимо выделить следующие:

Теорема (Дирихле). *Если знакопеременный ряд сходится абсолютно, то он остаётся абсолютно сходящимся при любой перестановке его слагаемых, при этом сумма ряда остаётся неизменной.*

Это свойство не выполняется для условно сходящихся рядов.

Теорема (Римана). *Если знакопеременный ряд сходится условно, то для любого числа* $A \in R$ *можно так переставить слагаемые этого ряда, что после перестановки его сумма будет равна числу* A. *Более того, слагаемые условно сходящегося ряда можно переставить так, что он окажется расходящимся.*

Таким образом, привычные нам свойства конечных сумм на случай бесконечных сумм переносятся лишь для абсолютно сходящихся рядов.

Пример 1.

Исследовать на сходимость знакопеременные ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{5^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$;

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos n\alpha}{2^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n\pi}{3}$.

Решение.

а) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{5^n}{n!}=5-\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}-...+(-1)^{n-1}\cdot\frac{5^n}{n!}+....$$

Рассмотрим ряд из модулей данного:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}=5+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}+...+\frac{5^n}{n!}+...$$

Применим к этому ряду признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}=0<1.$$

Следовательно, ряд сходится. Значит, данный ряд сходится абсолютно.

б) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине, стремясь к нулю:

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{5}>\frac{1}{7}>... \text{ и } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0.$$

Поэтому, согласно признаку Лейбница, данный ряд сходится. Чтобы установить, сходится он абсолютно или условно, исследуем ряд с положительными членами $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n-1}$, составленный из абсолютных значений членов данного ряда.

Применяя интегральный признак

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\lim_{\beta\to+\infty}\int_{1}^{\beta}\frac{d(2x-1)}{2x-1}=\frac{1}{2}\lim_{\beta\to+\infty}\ln(2x-1)\Big|_{1}^{\beta}=\frac{1}{2}\lim_{\beta\to+\infty}\ln(2\beta-1)=+\infty,$$

заключаем, что данный ряд с положительными членами расходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n-1}$ сходится условно.

в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{2^n}$.

Заменим члены данного знакопеременного ряда, где α – любое число, их абсолютными значениями и исследуем полученный ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\cos n\alpha|}{2^n}$ с положительными членами. Сравним его с рядом геометрической бесконечно убывающей прогрессии $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, который есть ряд сходящийся. Каждый член полученного ряда не превосходит соответствующего члена геометрической прогрессии.

$$\frac{|\cos n\alpha|}{2^n}\le\frac{1}{2^n}.$$

Поэтому, согласно признаку сравнения, ряд с положительными членами также сходится, а заданный знакопеременный ряд сходится абсолютно.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{3}$.

Для данного знакопеременного ряда не выполняется необходимое условие сходимости:

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left|\sin\frac{n\pi}{3}\right|$ не существует.

Вследствие этого ряд расходится

Пример 2.

Проверить, что знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$ сходится. Вычислить приближенное значение его суммы с точностью до 0,01.

Решение.

Проверяем сходимость ряда по признаку Лейбница: убеждаемся, что его члены убывают по абсолютному значению и что $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3+1}=0$. Далее вычисляем несколько последовательных первых членов данного ряда, пока не получим такой член, абсолютное значение которого меньше 0,01:

$$a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{9},\ a_3 = -\frac{1}{28},\ a_4 = \frac{1}{65},\ a_5 = -\frac{1}{126}.$$

Согласно указанному ранее свойству знакочередующихся сходящихся рядов для вычисления суммы данного ряда с точностью до 0,01 достаточно взять сумму четырех его первых членов.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1} \approx -\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{28}+\frac{1}{65} \approx -0{,}500+0{,}111-0{,}036+0{,}015 = -0{,}410 \approx$$
$$\approx -0{,}41$$

Пример 3.

Проверить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ сходится. Сколько нужно взять членов этого ряда, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?

Решение.

Для данного ряда все условия признака Лейбница выполнены, поэтому ряд сходится. Напишем сумму ряда в таком виде:

$$S = S_n + r_n,\ |r_n| < |a_{n+1}|.$$

Найдем такое n, чтобы $|a_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \le 0{,}01$. Решив уравнение $\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0{,}01$, получим $n = 9999$, следовательно, $|r_{9999}| < 0{,}01$. Учитывая условия задачи и этот результат, находим $0 < r_{9999} < 0{,}01$. Таким образом, $S = S_{9999} + r_{9999}$, откуда $S \approx S_{9999}$ с точностью до 0,01 (с недостатком). Заметим, что данный ряд сходится очень медленно, как и все другие условно сходящиеся ряды.

Задания.

1. Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01; 0,001?.
2. С точностью до 0,01 вычислить сумму ряда

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$;

   б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n^2+1}$.

3. В следующих задачах исследовать сходится абсолютно или условно, или расходится знакопеременный ряд

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 5x}{\sqrt{n^3+1}}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)}{n^4}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{3n+5}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{(5n+1)!}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

Домашнее задание.

1. Исследовать на сходимость ряд.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$;

г) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot(\ln\ln n)\cdot\ln n}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2n^2}{n^4-2n^2+1}$;

е) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot\ln n}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!}$;

з) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln(2n)}$;

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}$;

к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+1)}{\sqrt{n^3}}$;

л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot tg\frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}$;

м) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}$;

н) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$;

о) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sin 3^n}{3^n}$.

2. Вычислить сумму ряда с точностью α.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3^{n^2}}$, $\alpha=0{,}01$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$, $\alpha=0{,}01$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n}\right)^3$,
$\alpha=0{,}001$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$,
$\alpha=0{,}001$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$, $\alpha=0{,}001$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{7^n}$, $\alpha=0{,}0001$;

ж) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n$, $\alpha=0{,}01$;

з) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$, $\alpha=0{,}1$;

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n+1)}{(2n)!n!}$,
$\alpha=0{,}001$;

к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n\cdot n!}$, $\alpha=0{,}001$.

Функциональные ряды. Область сходимости. Понятие равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса

Ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...+u_n(x)+..., \tag{1}$$

члены которого – функции от x, называется ***функциональным***. Совокупность значений x, при которых функции $u_1(x), u_2(x), u_3(x), ..., u_n(x), ...$определены и ряд сходится $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)$, называют ***областью сходимости функционального ряда***.

Областью сходимости функционального ряда чаще всего служит какой-нибудь промежуток оси OX. Каждому значению из области сходимости X соответствует определённое значение величины $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$. Эту величину, являющуюся функцией x, называют суммой функционального ряда и обозначают через $S(x)$.

Представим сумму ряда в виде

$S(x)=S_n(x)+R_n(x)$, где

$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...+u_n(x)$,

$R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+...$

($R_n(x)$ – остаток функционального ряда)

Сходящийся функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется ***равномерно сходящимся*** в некоторой области X, если для сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое целое положительное число N, что при $n \geq N$ выполняется неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$ для любого x из области X. При этом сумма $S(x)$ равномерно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в области X, где $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ – непрерывные функции, есть непрерывная функция.

Сформулируем достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда.

Признак Вейерштрасса. *Если функции $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x), ...$ по абсолютной величине не превосходят в некоторой области X положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, причем числовой ряд $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ сходится, то функциональный ряд $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + ... + u_n(x) + ...$ в этой области сходится равномерно.*

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***мажорирующим*** для ряда (1).

Сформулируем две теоремы, относящиеся к интегрированию и дифференцированию функциональных рядов.

Теорема 1. *Если ряд $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + ... + u_n(x) + ...$, где $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x), ...$ – непрерывные функции, равномерно сходится в некоторой области X и имеет сумму $S(x)$,* то ряд $\int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + ... + \int_a^b u_n(x)dx + ...$ *сходится и имеет сумму $\int_a^b S(x)dx$ (промежуток $[a; b]$ принадлежит области X).*

Теорема 2. *Пусть функции $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x), ...$ определены в некоторой области X и имеют в этой области производные $u_1'(x), u_2'(x), ..., u_n'(x), ...$. Если в этой области ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно, то его сумма равна производной от суммы первоначального ряда:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)_x'$$

В простейших случаях для определения области сходимости ряда (1) можно применить к нему известные признаки сходимости, считая x фиксированным. В частности, при применении признака Даламбера или Коши случай, когда $\ell = 1$, исследуется особо, с помощью других признаков сходимости.

Функциональный ряд (1) называется ***абсолютно сходящимся*** на множестве X, если при всех $x \in X$ сходится ряд из модулей его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n(x) \right|.$$

Пример 1.

Дан функциональный ряд

$$\frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{2n-1}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^n + \ldots$$

Исследовать сходимость ряда в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Решение.

В точке $x = 0$ получаем ряд

$$2 + \frac{1}{3} \cdot 2^2 + \frac{1}{5} \cdot 2^3 + \ldots + \frac{1}{2n-1} \cdot 2^n + \ldots$$

Здесь $u_n = \dfrac{2^n}{2n-1}$, $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{2n+1}$.

Применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \cdot (2n-1)}{2^n (2n+1)} = 2 > 1, \text{ т.е. } \ell > 1.$$

Следовательно, ряд расходится.

В точке $x = 1$ получаем ряд

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{3^n} + \ldots$$

Здесь

$$u_n = \frac{1}{3^n \cdot (2n-1)}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1} \cdot (2n+1)};$$

находим

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot (2n-1)}{3^{n+1} \cdot (2n+1)} = \frac{1}{3} < 1, \text{ т.е. ряд сходится.}$$

Пример 2.

Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Решение.

Данный ряд представляет собой обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, который сходится, и притом абсолютно, при $p=x>1$ и расходится при $p=x\le 1$. Область сходимости ряда определяется двойным неравенством $1<x<\infty$.

<u>*Пример 3.*</u>

Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n x.$$

Решение.

Данный ряд представляет собой бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\ln x$. Т.к. прогрессия сходится лишь при $|q|<1$, то он сходится и, притом абсолютно, при $|\ln x|<1$, т.е. $-1<\ln x<1$, и, следовательно, неравенства $e^{-1}<x<e$ определяют область сходимости данного ряда.

<u>*Пример 4.*</u>

Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(x^2+1\right).$$

Решение.

Зафиксировав произвольным образом x, получим числовой ряд с общим членом $u_n(x)=n\left(x^2+1\right)$.

Вычислим

$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\left(x^2+1\right)=\infty$ при любом x.

Таким образом, необходимый признак сходимости не выполняется, поэтому при любом x исследуемый функциональный ряд расходится, т.е. область сходимости ряда – пустое множество.

<u>*Пример 5.*</u>

Найти область сходимости ряда

$$\frac{x-1}{x+1}+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\ldots+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k+\ldots$$

Решение.

Данный ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{x-1}{x+1}$. Он сходится, если $|q|<1$. Следовательно, ряд сходится лишь в случае $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|<1$.

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1.$$

Решив это неравенство, получим, что ряд сходится, если $x > 0$, т.е. $x \in (0; +\infty)$.

Пример 6.

Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots$$

Решение.

Очевидно, что

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \le \frac{1}{n^2}, \ \forall x \in R, \ \forall n \in N.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то данный ряд по мажорантному признаку Вейерштрасса сходится равномерно для $x \in R$.

Пример 7.

Показать, что ряд

$$\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^4+2} + \frac{1}{x^6+3} - \frac{1}{x^8+4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{x^{2n}+n} + \ldots$$

сходится равномерно при всех значениях x $(-\infty < x < +\infty)$.

Решение.

Данный ряд при любом значении x сходится по признаку Лейбница, поэтому его остаток оценивается с помощью неравенства

$|R_n(x)| < |u_{n+1}(x)|$, т.е. $\quad |R_n(x)| < \frac{1}{x^{2n+2}+n+1} < \frac{1}{n+1}$.

Т.к. неравенства $\frac{1}{n+1} \le \varepsilon$ и $n \ge \frac{1}{\varepsilon} - 1$ равносильны, то, взяв $n \ge N$, где N – какое-нибудь целое положительное число, удовлетворяющее условию $N \ge \frac{1}{\varepsilon} - 1$, приходим к неравенству $|R_n(x)| < \varepsilon$.

Итак, данный ряд сходится равномерно в промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Пример 8.

Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

сходится неравномерно в интервале $(-1; 1)$.

Решение.

В указанном интервале ряд сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Имеем

$R_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} + \dots$, т.е.

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Но $\lim\limits_{x\to -1+0} \left| R_n(x) \right| = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to -1+0} R_n(x) = \infty$.

Следовательно, приняв $\varepsilon > \frac{1}{2}$, мы не сможем добиться выполнения неравенства при любом значении x.

Итак, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится неравномерно.

<u>*Пример 9.*</u>

Можно ли к ряду

$$arctgx + arctg\frac{x}{2\sqrt{2}} + arctg\frac{x}{3\sqrt{3}} + \dots + arctg\frac{x}{n\sqrt{n}} + \dots$$

Применить теорему о почленном дифференцировании рядов?

Решение.

Сравним этот ряд со сходящимся рядом $x + \frac{x}{2^{3/2}} + \frac{x}{3^{3/2}} + \dots + \frac{x}{n^{3/2}} + \dots$ (при любом фиксированном x). Тогда

$$u_n(x) = arctg\left(\frac{x}{n^{3/2}}\right),\ v_n(x) = \frac{x}{n^{3/2}}.$$

Т.к. $arctg\alpha$ и α эквивалентные бесконечно малые, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ и согласно второму признаку сравнения заключаем, что данный ряд сходится.

Найдём производную общего члена данного ряда:

$$u_n'(x) = \frac{\frac{1}{n^{3/2}}}{1 + \frac{x^2}{n^3}} = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{x^2 + n^3}.$$

Ряд, составленный из производных, имеет вид

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{2\sqrt{2}}{x^2+2^3} + \frac{3\sqrt{3}}{x^2+3^3} + \dots.$$

Заметим, что члены последнего ряда меньше соответствующих членов сходящегося ряда

$$1 + \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} + \dots.$$

Поэтому, на основании признака Вейерштрасса, ряд, составленный из производных, равномерно сходится в промежутке $(-\infty; +\infty)$ и, значит, к заданному ряду можно применить теорему о дифференцировании рядов.

Пример 10.

Законно ли применять к ряду

$$\cos x + \frac{1}{2}\cdot\cos 2x + \frac{1}{2^2}\cdot\cos 3x + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\cos nx + \ldots$$

теоремы об интегрировании функциональных рядов в промежутке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$?

Решение.

Члены данного ряда при любом значении x по абсолютной величине меньше соответствующих членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$.

Поэтому, данный ряд, согласно признаку Вейерштрасса, равномерно сходится в промежутке $(-\infty; +\infty)$. И, следовательно, к нему можно применить теорему об интегрировании рядов для любого конечного промежутка $[a; b]$, в частности для промежутка $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Задания.

1. Найти область сходимости функционального ряда.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2}\right)^x$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^n}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{nx^n}}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\cdot tg\frac{x}{3^n}$;

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^n\cdot n\cdot\ln n}$;

к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n}$;

л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right)^n$

2. Установить равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

3. Доказать равномерную сходимость функциональных рядов в указанных промежутках.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{\sqrt{n}}$, $[0; 1]$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot \ln\left(1 + \sin \frac{1}{4^n (x+1)}\right)$, $[0; +\infty]$.

Домашнее задание.

1. Найти область сходимости функционального ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot x^{2n-1}}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2 (5x+9)^{2n-1}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{x \ln^n x}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2x-1}}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(3 - x^2\right)^n$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3x-4)^n}{3^n}$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi x}{4}$;

и) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot tg\,\frac{x}{3^n}$;

к) $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$.

2. Доказать равномерную сходимость функциональных рядов в указанных промежутках.

а) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \cdot n^3}$, $[-3; 3]$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 \cdot x^2}$, $[-\infty; +\infty]$.

Степенные ряды.
Радиус и интервал сходимости степенного ряда

Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots,$$

где $a, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – действительные числа, называется ***степенным***.

Основное свойство степенных рядов состоит в том, что если степенной ряд сходится при $x = x_0$, то он сходится (и притом абсолютно) при всяком значении x, удовлетворяющем неравенству $|x-a| < |x_0 - a|$ (***теорема Абеля***). Одним из следствий теоремы Абеля является факт существования для всякого степенного ряда ***интервала сходимости*** $|x-a| < R$, или $a - R < x < a + R$ с центром в точке a, внутри которого степенной ряд абсолютно сходится, и вне которого он расходится. На концах интервала сходимости (в точках $x = a \pm R$) различные степенные ряды ведут себя по-разному: одни сходятся абсолютно на обоих концах, другие – либо условно сходятся на обоих концах, либо на одном из них условно сходятся, на другом расходятся, третьи – расходятся на обоих концах.

Число R – половина длины интервала сходимости – называется ***радиусом*** сходимости степенного ряда. В частных случаях радиус сходимости ряда R может быть равен нулю или бесконечности. Если $R = 0$, то степенной ряд сходится лишь при $x = a$; если же $R = \infty$, то ряд сходится на всей числовой оси. Для отыскания интервала и радиуса сходимости степенного ряда можно пользоваться одним из следующих способов.

1. Если среди коэффициентов ряда $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ нет равных нулю, т.е. ряд содержит все целые положительные степени разности $x - a$, то

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{1}$$

при условии, что этот предел (конечный или бесконечный) существует.

2. Если исходный ряд имеет вид

$$a_0 + a_1(x-a)^p + a_2(x-a)^{2p} + \ldots + a_n(x-a)^{np} + \ldots$$

(где p – некоторое определённое целое положительное число: 2, 3, …), то

$$R = \sqrt[p]{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} \tag{2}$$

3. Если среди коэффициентов ряда есть равные нулю и последовательность оставшихся в ряде показателей степеней разности $x - a$ любая (т.е. не образует арифметическую прогрессию, как в предыдущем случае), то радиус сходимости можно находить по формуле

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{3}$$

в которой используются только значения a_n, отличные от нуля. (Эта формула пригодна и в случаях 1 и 2).

4. Во всех случаях интервал сходимости можно находить, применяя непосредственно признак Даламбера или признак Коши к ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда.
   Записав ряд в виде
$$u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$
   (здесь $u_0=a_0$, $u_n(x)=a_n(x-a)^N$, где зависимость N от n может быть любой, причем через a_n обозначен не коэффициент при $(x-a)^n$, а коэффициент n-го члена ряда), находят интервал сходимости из неравенств
$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}<1 \text{ или } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}<1.$$

Отметим следующее свойство степенных рядов: *ряды, полученные почленным дифференцированием и интегрированием степенного ряда, имеют тот же интервал сходимости и их сумма внутри интервала сходимости равна соответственно производной или интегралу от суммы первоначального ряда.*

Таким образом, если
$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n \text{, то}$$
$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot a_n\cdot(x-a)^{n-1},$$
$$\int_a^x S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(x-a)^{n+1}}{n+1}, \text{ где } -R<x-a<R.$$

Операцию почленного дифференцирования и интегрирования можно производить над степенным рядом сколько угодно раз. Следовательно, сумма степенного ряда внутри его интервала сходимости является бесконечно дифференцируемой функцией.

<u>*Пример 1.*</u>

Исследовать сходимость степенного ряда
$$x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots+\frac{1}{n}x^n+\ldots.$$

Решение.

Здесь
$$a_n=\frac{1}{n},\ a_{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

Найдём радиус сходимости ряда:
$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Следовательно, ряд сходится для значений x, удовлетворяющих неравенству $-1 < x < 1$. Исследуем сходимость ряда на концах промежутка.

Если $x = 1$, то получаем гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$, который, как известно, расходится.

Если $x = -1$, то получается ряд $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots$. Этот ряд сходится, т.к. удовлетворяет условиям признака Лейбница.

Итак, область сходимости степенного ряда определяется двойным неравенством $-1 \le x < 1$.

Пример 2.

Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 3^{n-1}}.$$

Решение.

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, где $a_{n=} \frac{1}{n^2 \cdot 3^{n-1}}$, $a_{n+1=} \frac{1}{(n+1)^2 \cdot 3^n}$.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2 \cdot 3^n}{n^2 \cdot 3^{n-1}} \right| = 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 3.$$

Значит, $(-3; 3)$ – интервал сходимости. Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -3$ получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3}{n^2}$, который сходится по признаку Лейбница.

При $x = 3$ – числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$, который сходится (см. обобщенный гармонический ряд).

Следовательно, область сходимости данного степенного ряда $-3 \le x \le 3$; или $x \in [-3; 3]$.

Пример 3.

Найти интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n = x + 4x^2 + 27x^3 + 256x^4 + \ldots + (nx)^n + \ldots.$$

Решение.

Применим формулу $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}\right)^n\frac{1}{n+1} = \frac{1}{e}\cdot 0 = 0.$$

Значит, радиус сходимости ряда равен нулю. Ряд сходится в единственной точке $x = 0$.

<u>*Пример 4.*</u>

Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\left(5^n+1\right)}.$$

Решение.

Применяем признак Даламбера, считая x фиксированным.

Поскольку

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)\cdot\left(5^{n+1}+1\right)} : \frac{(x+2)^n}{m\cdot\left(5^n+1\right)}\right| = \frac{|x+2|\cdot n\cdot\left(5^n+1\right)}{(n+1)\cdot\left(5^{n+1}+1\right)};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+2|\cdot n\cdot\left(5^n+1\right)}{(n+1)\cdot\left(5^{n+1}+1\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}\frac{|x+2|\left(1+5^{-n}\right)}{\left(5+5^{-n}\right)} = \frac{|x+2|}{5}.$$

Ряд сходится, если полученный предел <1, т.е. $\dfrac{|x+2|}{5} < 1$ или $|x+2| < 5$. Так как при $|x+2| < 5$ ряд сходится, а при $|x+2| > 5$ ряд расходится, то радиус сходимости $R = 5$; интервал $(-7;3)$ является интервалом сходимости. Исследуем сходимость ряда на концах промежутка $(-7;3)$.

При $x = -7$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{n\left(5^n+1\right)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\left(1+\dfrac{1}{5^n}\right)}.$$

По признаку Лейбница ряд сходится.

При $x = 3$ получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n\left(5^n+1\right)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(1+\dfrac{1}{5^n}\right)}.$$

Сравнивая с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, используя предельный признак сравнения, показываем, что ряд расходится.

Итак, область сходимости $x\in[-7;3)$.

Пример 5.

Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n^3\cdot 4^n}.$$

Решение.

Данный ряд содержит только четные степени $(x-2)$. Коэффициенты при нечетных степенях равны 0. К ряду применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{2n+2}\cdot n^3\cdot 4^n}{(n+1)^3\cdot 4^{n+1}(x-2)^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(x+2)^2 n^3}{4(n+1)^3} =$$

$$=\frac{(x-2)^2}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3}=\frac{(x-2)^2}{4}.$$

$\frac{(x-2)^2}{4}<1 \Leftrightarrow |x-2|<2 \Rightarrow 0<x<4$ – интервал сходимости.

Если $x=0$ получим ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{2n}}{n^3\cdot 4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ – сходится как ряд Дирихле при $p=3>1$.

При $x=4$ получим тот же сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{n^3\cdot 4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}.$$

Следовательно, областью сходимости степенного ряда является отрезок $x\in[0;4]$.

Пример 6.

Найти сумму ряда

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+...+\frac{x^n}{n}+...\quad (|x|<1).$$

Решение.

Продифференцируем почленно заданный ряд и найдём его сумму по формуле $S=\frac{a}{1-q}$, где $a=1$, $q=x$; получим

$$1+x+x^2+x^3+...=\frac{1}{1-x}.$$

Проинтегрируем затем в пределах от 0 до x, находим

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots=-\ln(1-x).$$

Этот ряд сходится на промежутке $(-1;1)$.

Задания.

1. Найти область сходимости степенных рядов.

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)!}$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{\sqrt{n}}$.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n\cdot x^n$.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$.

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n\cdot n!}{n^n}x^n$.

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,x^n}{(2n-1)!}$.

к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

л) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\cdot(x-1)^n$.

м) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}10^n\cdot x^n$.

н) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!(x-3)^n$.

о) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{2n^2+1}$.

п) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(nx)^n}{(n!)^2}$.

р) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{3n-2}$.

2. Найти интервал сходимости и сумму ряда

$$1-3x^2+5x^4-7x^6+\ldots.$$

3. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

4. Применяя почленное дифференцирование и интегрирование, найти сумму ряда

а) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$.

б) $1-3x^2+5x^4-\ldots+(-1)^{n-1}(2n-1)\cdot x^{2n-2}+\ldots$.

в) $1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\ldots+n(n+1)x^{n-1}+\ldots$.

Домашнее задание.

1. Найти область сходимости степенных рядов.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+3)}$.

б) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n(5^n+1)}$.

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n \cdot n!}{(2n)!}$.

ж) $\sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^n$.

з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n}$.

и) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$.

к) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n^2}$.

л) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot x^n}{n!}$.

м) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$.

н) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{3^{2n}(3n+2)}$.

о) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot x^n$.

п) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot x^{2n-2}$.

2. Найти интеграл сходимости и сумму ряда

а) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$.

б) $1 - 4x + 7x^2 - 10x^3 + \ldots$

(*Указание*. Составить выражение $S + S \cdot x$).

3. Применяя почленное дифференцирование и интегрирование, найти сумму ряда

а) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$.

б) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$.

в) $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots$.

Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена

Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производные любых порядков, то степенной ряд

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (1)$$

называется ***рядом Тейлора*** функции $f(x)$ в точке x_0. Если $x_0=0$, то ряд

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

называется ***рядом Маклорена***.

Ряд (1), составленный для функции $f(x)$, как всякий степенной ряд будет иметь интервал сходимости и сумму, причем сумма может быть и не равной $f(x)$. При каких условиях ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0, т.е. сумма ряда (1) будет совпадать с $f(x)$?

Для сходимости ряда Тейлора (1) к функции $f(x)$ необходимо и достаточно выполнения условия

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,$$

где $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(b)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $b=x_0+\theta(x-x_0)$ $(0<\theta<1)$ и x принадлежит некоторой окрестности точки x_0. (*форма Лагранжа*).

Если функция $f(x)$ является суммой степенного ряда в каком-либо промежутке, то говорят, что $f(x)$ в этом промежутке разлагается в степенной ряд. Практически важное достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора выражается следующей теоремой.

Теорема. *Если производные любого порядка функции $f(x)$ ограничены в окрестности $u(x_0)$ точки x_0 одним и тем же числом C, т.е. $\left|f^{(n)}(x)\right|\le C$ $(n=1,2,3,\ldots)$, то ряд Тейлора этой функции сходится к $f(x)$ для любого x из этой окрестности*.

Если функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора, то это разложение единственное.

Приведем разложение в степенной ряд (ряд Маклорена) некоторых элементарных функций.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \ -\infty < x < +\infty.$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \ -\infty < x < +\infty.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \ -\infty < x < +\infty.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots, \ -1 < x \le 1.$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, \ -1 < x < 1.$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \ -1 < x < 1.$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \ (|x| \le 1).$$

$$\mathrm{s}hx = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \ -\infty < x < +\infty.$$

$$\mathrm{c}hx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \dots, \ -\infty < x < +\infty.$$

Пример 1.

Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8x - 2$ в окрестностях точки $x_0 = 1$.

Решение.

Вычислим значения функции и её производных при $x = 1$:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 8x - 2$, $f(1) = 4$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 8$, $f'(1) = 5$.

$f''(x) = 6x - 6$, $f''(1) = 0$.

$f'''(x) = 6$, $f'''(1) = 6$.

$f^{(IV)}(x) = f^{(V)}(x) = \dots = f^{(n)}(x) = 0$.

Очевидно, что производные данной функции в окрестности точки $x_0 = 1$ ограничены одним и тем же числом, следовательно, функция может быть представлена в виде суммы ряда Тейлора:

$$x^3 - 3x^2 + 8x - 2 = 4 + \frac{5}{1!}(x-1) + \frac{0}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 + 0 + \dots =$$

$$= 4 + 5(x-1) + (x-1)^3.$$

Пример 2.

Разложить функцию $f(x)=2^x$ в ряд Тейлора по степеням x.

Решение.

Применим принцип непосредственного разложения.

$f(x)=2^x$, $f(0)=1$.

$f'(x)=2^x\cdot\ln 2$, $f'(0)=\ln 2$.

$f''(x)=2^x\cdot(\ln 2)^2$, $f''(0)=(\ln 2)^2$.

$f'''(x)=2^x\cdot(\ln 2)^3$, $f'''(0)=(\ln 2)^3$.

…

$f^{(n)}(x)=2^x\cdot(\ln 2)^n$, $f^{(n)}(0)=(\ln 2)^n$.

Подставляя в ряд (1) при $x_0=0$, получим ряд Маклорена для функции 2^x:

$$1+\frac{\ln 2}{1!}x+\frac{\ln^2 2}{2!}x^2+\ldots+\frac{\ln^n 2}{n!}x^n+\ldots$$

Найдём область сходимости полученного ряда. Т.к.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln^n 2}{(\ln 2)^{n+1}}=\infty,$$

то ряд сходится для всех значений x.

Выясним, для каких значений x найденное разложение сходится к функции 2^x. Заметим, что производные всех порядков данной функции на отрезке $-R\le x\le R$ ввиду справедливости неравенства $\ln^n 2<1$ ограничены одним и тем же числом 2^R.

$\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|2^x\cdot\ln^n 2\right|\le 2^R$.

Отсюда следует, что найденное разложение в силу соответствующей теоремы сходится к функции 2^x при всех значениях x:

$$2^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n 2}{n!}x^n.$$

Пример 3.

Разложить в ряд Тейлора функцию $\frac{1}{3x+1}$ по степеням $x+2$.

Решение.

Так как

$$\frac{1}{3x+1}=\frac{1}{3x+6-6+1}=\frac{1}{-5+3(x+2)}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{3(x+2)}{5}},$$

то заменив в разложении

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots,\ x\in(-1;1)$$

x на $\dfrac{3(x+2)}{5}$, получим разложение данной функции в ряд Тейлора по степеням $(x+2)$.

$$\frac{1}{3x+1}=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3(x+2)}{5}\right)^n=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n(x+2)^n.$$

Оно справедливо, когда $\left|\dfrac{3(x+2)}{5}\right|<1\Leftrightarrow-\dfrac{11}{3}<x<-\dfrac{1}{3}$, т.е. при любом $x\in\left(-\dfrac{11}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$.

Пример 4.

Разложить функцию $(1+x)e^{-x^2}$ в ряд по степеням x.

Решение.

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\ldots,\ -\infty<x<+\infty.$$

Двучлен $(1+x)$ рассматриваем как степенной ряд, у которого коэффициенты всех членов, кроме двух первых, равны нулю и который сходится на всей числовой оси. Умножив этот ряд на ряд Маклорена для функции e^{-x^2}, получим искомое разложение данной функции:

$$(1+x)e^{-x^2}=(1+x)\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\ldots\right)=1+x-\frac{x^2}{1!}-\frac{x^3}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^5}{2!}-$$
$$-\frac{x^6}{3!}-\frac{x^7}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\frac{x^9}{4!}+\ldots,$$

которое справедливо, т.е. сходится к данной функции, при всех значениях x.

Пример 5.

Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Решение.

Имеем

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x).$$

Воспользуемся разложением функции $\ln(1+x)$. Тогда

$$\ln(1-x)=(-x)-\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{3}-\frac{(-x)^4}{4}+\frac{(-x)^5}{5}-...=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-$$

$$-\frac{x^5}{5}-..., \ -1\le x<1.$$

Следовательно,

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-...\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-...\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \ (-1<x<1).$$

Пример 6.

Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=\dfrac{4}{(1+x)(1-3x)}$.

Решение.

Раскладывая данную функцию на сумму элементарных дробей, получаем

$$\frac{4}{(1+x)(1-3x)}=\frac{1}{1+x}+\frac{3}{1-3x}.$$

Так как

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+...+(-1)^n\cdot x^n+...,$$

$$\frac{1}{1-3x}=1+3x+(3x)^2+(3x)^3+...+(3x)^n+...,$$

то получим

$$\frac{4}{(1+x)(1-3x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n+3\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n+3^{n+1}\right)\cdot x^n.$$

Ряд сходится при $|3x|<1$, т.е. $-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{3}$.

Пример 7.

Разложить $\ln x$ в ряд по степеням $x-1$.

Решение.

В разложении

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+... \ (-1<x\le 1)$$

заменим x на $x-1$; получим

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+... \ (0<x\le 2).$$

Задания.

1. Разложить функции в ряды по степеням x.

а) $f(x)=3^x$.

б) $f(x)=e^{-2x}$.

в) $f(x)=\cos^2 x$.

г) $f(x)=(1+x)e^x$.

д) $f(x)=\dfrac{x-3}{(x+1)^2}$.

е) $f(x)=e^{-x}\cdot\sin x$.

ж) $f(x)=\ln\left(1+3x+2x^2\right)$.

з) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

и) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

к) $f(x)=x^2\cdot e^{-x}$.

л) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

м) $f(x)=\cos 5x$.

н) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$.

2. Разложить в ряды Тейлора.

а) $\ln(5x+3)$ по степеням $x-1$.

б) $\dfrac{1}{5+2x}$ по степеням $x-3$.

в) $\dfrac{1}{\sqrt{4+x}}$ по степеням $x+3$.

Домашнее задание.

1. Разложить функции в ряды по степеням x.

а) $f(x)=\sin^2 x$.

б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

в) $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$.

г) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{1+3x^2}}$.

д) $f(x)=\sin\dfrac{2x^4}{3}$.

е) $f(x)=x^3\cdot arctgx^2$.

ж) $f(x)=\sin\dfrac{x}{4}$.

з) $f(x)=\ln(x+3)$.

и) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$.

к) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$.

л) $f(x)=\ln\left(1-5x+4x^2\right)$.

2. Разложить в ряды Тейлора.

а) $\ln x$ по степеням $x-1$.

б) $\sqrt{x}$ по степеням $x-2$.

в) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ по степеням $x-3$.

г) $\cos^2 x$ по степеням $x-\dfrac{\pi}{3}$.

Приложения степенных рядов. Вычисление интегралов

При вычислении пределов дробей, числители и знаменатели которых стремятся к нулю, используют различные приёмы: применяют табличные формулы, эквивалентные бесконечно малые и правило Лопиталя. Существует, однако, ещё весьма эффективный способ вычисления пределов отношений, основанный на применении степенных рядов. Он состоит в следующем. Числитель и знаменатель дроби раскладываются в степенные ряды (по степеням одной и той же разности $x-a$). После этого производятся необходимые сокращения, вследствие чего неопределённость обычно исчезает. Разумеется, применение рядов не исключает применение других приёмов.

С помощью рядов Тейлора можно находить числовые значения производных любого порядка от данной функции. В частности, чтобы найти $f^{(n)}(a)$, нужно разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $x-a$, а затем по формуле $f^{(n)}(a)=C_n n!$ вычислить нужную производную (указанная формула получается из общего уравнения $C_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ для коэффициентов ряда Тейлора).

Теорию рядов можно применить и к интегрированию функций. Если функция $f(x)$ разложима в равномерно сходящийся на отрезке $[a;b]$ ряд, то интеграл $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$, где $a\le x_1<x_2\le b$, часто также легко представляется в виде сходящегося ряда. Разумеется, и неопределённые интегралы можно вычислять с помощью разложения в ряд подынтегральной функции с последующим интегрированием этого ряда.

Таким путём удаётся вычислить ряд интегралов, не выражающихся через элементарные функции в конечном виде, а также ряд некоторых интегралов, вычисление которых другими способами представляет значительные трудности.

Пример 1.

Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+\cos x}{x^3\cdot\sin x}-\frac{3}{x^4}\right).$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+\cos x}{x^3\cdot\sin x}-\frac{3}{x^4}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x+x\cdot\cos x-3\sin x}{x^4\cdot\sin x}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x + x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) - 3\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)}{x^4 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{4!} - \frac{3}{5!}\right)x^5 + \left(-\frac{1}{6!} + \frac{3}{7!}\right)x^7 + \dots}{x^5 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{4!} - \frac{3}{5!}\right) + \left(-\frac{1}{6!} + \frac{3}{7!}\right)x^2 + \dots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots} =$$

$$= \frac{1}{4!} - \frac{3}{5!} = \frac{1}{24} - \frac{1}{40} = \frac{1}{60}.$$

<u>Пример 2.</u>

Найти производную 11-го порядка от функции $f(x) = x^5 \cdot \cos\frac{x}{2}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение.

Разложим данную функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$x^5 \cdot \cos\frac{x}{2} = x^5 \cdot \left(1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{6!} + \dots\right) = x^5 - \frac{x^7}{2^2 \cdot 2!} + \frac{x^9}{2^4 \cdot 4!} -$$

$$- \frac{x^{11}}{2^6 \cdot 6!} + \dots.$$

Так как $f^{(11)}(0) = C_{11} \cdot 11!$, то $f^{(11)}(0) = -\frac{11!}{2^6 \cdot 6!} = -\frac{3465}{4} = -866{,}25$.

Заметим, что непосредственное вычисление производной 11-го порядка от данной функции было бы значительно труднее.

<u>Пример 3.</u>

Найти интеграл

$$\int \frac{\sin x}{x} dx$$

в виде степенного ряда и указать область его сходимости.

Решение.

Воспользовавшись формулой разложения в ряд $\sin x$, получим ряд для подынтегральной функции.

$$\frac{1}{x} \cdot \sin x = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots,$$

Он сходится на всей числовой прямой, и, следовательно, его можно почленно интегрировать:

$$\int \frac{\sin x}{x}dx = C + x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - ... + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!} + ...$$

Так как при интегрировании степенного ряда его интервал сходимости не изменяется, то полученный ряд сходится на всей числовой прямой.

Пример 4.

Вычислить $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,001.

Решение.

Данный интеграл не выражается через элементарные функции в конечном виде. Тем не менее его можно вычислить с помощью степенных рядов с любой степенью точности.

Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд. Воспользуемся уже известным рядом

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Заменив в этом ряде x на $-x^2$, получим

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + ... + (-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{n!} + ...,$$

отсюда

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1\left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + ...\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} - \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} + ...\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \frac{1}{11\cdot 5!} + ...$$

Вычисляя члены этого ряда с точностью до 0,001, замечаем, что шестой член ряда по абсолютной величине меньше 0,001. Следовательно, для решения данной задачи согласно признаку Лейбница, надо взять сумму первых пяти членов, что обеспечивает требуемую точность.

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0{,}747.$$

Задания.

1. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)}{x - \sin x}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x - \sqrt{x}\cdot\sin\sqrt{x}}{1 - \cos x}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(tgx - \sin x) - x^3}{x^5}$.

2. Найти значения производных указанного порядка при $x=0$ от функций.

а) $e^{-\frac{x^2}{2}}$; $f^{(10)}(0)$.

б) $\dfrac{2x}{1+x^2}$; $f^{(6)}(0)$.

в) $\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; $f^{(5)}(0)$.

3. Представить интегралы в виде рядов.

а) $\int\limits_0^x x^2 \cdot e^{-x^2} dx$.

б) $\int \sin\frac{1}{x} dx$.

в) $\int \sqrt{1+x^5} dx$.

г) $\int\limits_0^x \dfrac{\sqrt[5]{1+x^4}-1}{x^3} dx$.

д) $\int \dfrac{\sin x^2}{x^3} dx$.

4. С точностью до 10^{-4} вычислить интегралы.

а) $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{arctgx}{x} dx$.

б) $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1+x^4} dx$.

в) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \sin x^2 dx$.

г) $\int\limits_5^{10} \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} dx$.

Домашнее задание.

1. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+arctgx-2\sin x}{\left(e^{x^2}-1\right)\cdot\ln\left(1+2x^3\right)}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1+x^2}\cdot\cos x}{tg^4 x}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)+\dfrac{x^2}{2}-\sin x}{arctg^3 x}$.

2. Найти значения производных указанного порядка при $x=0$ от функций.

а) $x^4 \cdot \ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$; $f^{(9)}(0)$.

б) $\sqrt[3]{8+x}$; $f^{(5)}(0)$.

в) $x^6 \cdot arctgx$; $f^{(12)}(0)$, $f^{(13)}(0)$.

3. Представить интегралы в виде рядов.

а) $\int\limits_0^x \frac{\arcsin x}{x}dx$.

б) $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

в) $\int \cos x^3 dx$.

г) $\int \sqrt{1+x^3}dx$.

д) $\int \frac{e^x}{x^2}dx$.

е) $\int \frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

4. С точностью до 10^{-4} вычислить интегралы.

а) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

б) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+x^3}dx$.

в) $\int\limits_0^1 \cos x^2 dx$.

г) $\int\limits_0^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$.

д) $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x}dx$.

е) $\int\limits_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x}dx$.

Приложения степенных рядов.
Приближённое решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Для приближённого вычисления значения функции $f(x)$ в точке x_0 можно функцию разложить в степенной ряд. В полученном разложении полагают $x = x_0$. Затем для вычисления $f(x_0)$ с нужной точностью берут необходимое число его членов.

Особо отметим следующие случаи.

1. При вычислении различных степеней числа e пользуются приближенной формулой

$$e^x \approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!},$$

допуская при этом ошибку R_n, которая при $|x| < n+1$ оценивается неравенством

$$|R_n| < \frac{|x|^{n+1}}{n!(n+1-|x|)}.$$

При $x \le 0$ можно пользоваться более простой оценкой

$$|R_n| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. При вычислении значений синуса и косинуса пользуются приближенными формулами

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

При этом ошибки оцениваются соответственно неравенствами

$$|R_{2n-1}(x)| = |R_{2n}(x)| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$|R_{2n}(x)| = |R_{2n+1}(x)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

3. Для вычисления логарифмов чисел можно пользоваться рядом

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \right) \quad (|x| < 1).$$

Ошибка, полученная заменой суммы ряда суммой его первых n членов, может быть оценена с помощью формулы

$$|R_n| < \left| \frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)} \right|.$$

Пример 1.

Вычислить $\sqrt[4]{e}$ с точностью до 0,00001.

Решение.

В разложении функции e^x полагаем $x = \frac{1}{4}$:

$$e^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2 \cdot 2!} + \frac{1}{4^3 \cdot 3!} + \frac{1}{4^4 4!} + \ldots .$$

Если взять пять членов этого ряда $(n = 4)$, то ошибка вычислений не будет превышать 0,00001

$$R_4 < \frac{x^{4+1}}{4!(4+1-x)} = \frac{1}{4^5 \cdot 4!\left(5 - \frac{1}{4}\right)} < 0{,}00001.$$

Подсчитав сумму пяти выписанных выше членов ряда, получим $\sqrt[4]{e} \approx 1{,}28403$.

Пример 2.

Вычислить $\cos 1^0$ с точностью до 0,0001.

Решение.

Так как $\cos 1^0 = \cos\frac{\pi}{180}$, то, полагая в разложении косинуса $x = \frac{\pi}{180}$, получаем:

$$\cos 1^0 \approx 1 - \frac{\pi^2}{180^2 \cdot 2!} \approx 0{,}9998.$$

Здесь первые два члена разложения уже обеспечивают значительно большую точность, т.к.

$$\left|R_2\right| \le \frac{\pi^4}{180^4 \cdot 4!} < \frac{4^4}{180^4 \cdot 4!} = \frac{1}{45^4 \cdot 24} < 0{,}0000001.$$

Пример 3.

Вычислить $\sqrt[3]{68}$ с точностью до 0,001.

Решение.

$$\sqrt[3]{68} = \sqrt[3]{64+4} = 4\sqrt[3]{1+\frac{4}{64}} = 4\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Раскладываем в ряд функцию $(1+x)^{\frac{1}{3}}$.

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!}x^2+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}x^3-\frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4\cdot 4!}x^3+\ldots$$

Полагая в полученном разложении $x=\frac{1}{16}$ и умножая ряд на 4, получаем

$$\sqrt[3]{68} = 4\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 4\left(1+\frac{1}{3\cdot 16}-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!\cdot 16^2}\right) = 4+\frac{1}{12}-\frac{1}{576}\approx 4{,}082.$$

Здесь взятые три члена ряда обеспечивают нужную точность, т.к.

$$\left|R_3\right| \le 4\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!\cdot 16^3} < 0{,}001.$$

Пример 4.

Вычислить $\ln 2$ с точностью до 0,0001.

Решение.

В разложении функции $\ln\frac{1+x}{1-x}$ положим $\frac{1+x}{1-x}=2$, тогда $x=\frac{1}{3}$ и, следовательно,

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3\cdot 3}+\frac{1}{3^5\cdot 5}+\frac{1}{3^7\cdot 7}+\ldots\right).$$

Заданную точность обеспечивают четыре члена, так как для оценки погрешности имеем неравенство

$$\left|R_n\right| < \left|\frac{2\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)\left(1-x^2\right)}\right|,$$

из которого при $n=4$ и $x=\dfrac{1}{3}$ получаем

$$\left|R_4\right|<\frac{2\cdot 9}{3^9\cdot 9\cdot 8}=\frac{1}{3^9\cdot 4}<0,0001.$$

Таким образом, с точностью до 0,0001

$$\ln 2\approx\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{27}+\frac{1}{405}+\frac{1}{5103}\right)\approx 0,6931.$$

Рассмотрим **интегрирование дифференциальных уравнений**.

При нахождении частного решения дифференциального уравнения в виде степенного ряда применяют способ, основанный на использовании ряда Тейлора (способ последовательных дифференцирований).

Пусть, например, требуется найти решение уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=x_0}=y_0$. Применяя первый способ, искомое решение ищут в виде ряда Тейлора:

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,$$

где $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'(x_0,y_0)$, остальные производные $y^{(n)}(x_0)$ $(n=2,3,\ldots)$ находят последовательным дифференцированием исходного уравнения и подстановкой в результате дифференцирования вместо $x, y, y', \ldots$ значений $x_0, y_0, y'_0, \ldots$ и всех остальных найденных значений последовательных производных. С помощью ряда Тейлора аналогично интегрируются уравнения высших порядков, которые разрешимы относительно старшей производной.

При нахождении частного решения ещё используется способ неопределённых коэффициентов. Его чаще применяют при интегрировании линейных дифференциальных уравнений.

Пример 5.

Найти первые шесть членов разложения в ряд решения уравнения $y''=x\cdot\sin y'$, удовлетворяющего условиям $y(1)=0$, $y'(1)=\dfrac{\pi}{2}$.

Решение.

Точка $x=1$ не является особой для данного уравнения, поэтому его решение можно искать в виде ряда

$$y=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{f^{IV}(1)}{4!}(x-1)^4+\ldots.$$

Здесь $f(1)=0$, $f'(1)=\dfrac{\pi}{2}$. Находим 2, 3, 4 и 5-ю производные:

$$f''(1)=1\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1,$$

$f'''(x) = \sin y' + xy'' \cdot \cos y' = \sin y' + x^2 \sin y' \cdot \cos y' = \sin y' + \frac{1}{2} x^2 \sin 2y'$;

$y'''(1) = 1$;

аналогично, $f^{IV}(1) = -1$, $f^{V}(1) = -6$.

Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получаем решения данного уравнения

$$y = \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{24}(x-1)^4 - \frac{1}{20}(x-1)^5 + \dots.$$

Задания.

1. Вычислить приближенно функции с указанной степенью точности α.
   а) e, $\alpha = 0{,}0001$.
   б) $\sqrt[3]{e}$, $\alpha = 0{,}0001$.
   в) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, $\alpha = 0{,}001$.
   г) $\sin 1^0$, $\alpha = 0{,}0001$.
   д) $\cos 10^0$, $\alpha = 0{,}0001$.
   е) $\sqrt{1{,}3}$, $\alpha = 0{,}001$.
   ж) $\sqrt[5]{250}$, $\alpha = 0{,}001$.
   з) $\ln 1{,}5$, $\alpha = 0{,}0001$.
   и) $\ln 10$, $\alpha = 0{,}0001$.
   к) $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$, $\alpha = 0{,}001$.
2. Применяя метод последовательных дифференцирований, найти указанное число членов разложения в ряд решений дифференциальных уравнений при указанных начальных условиях.
   а) $y' = \arcsin y + x$, $y(0) = \frac{1}{2}$ – четыре члена.
   б) $y' = x + y^{-1}$, $y(0) = 1$ – пять членов.
   в) $y' + y\cos x - 3e^x y^2 - \sin x = 0$, $y(0) = 1$ – четыре члена.
   г) $y' - 4y + 2xy^2 - e^3 x = 0$, $y(0) = 2$ – четыре члена.
   д) $y'' = e^y \cdot \sin y'$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = \frac{\pi}{2}$ – пять членов.
   е) $y''' = ye^x - x(y')^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ – шесть членов.

Домашнее задание.

1. Вычислить приближенно функции с указанной степенью точности α.
   а) $\sqrt{e}$, $\alpha = 0{,}0001$.
   б) $\frac{1}{e}$, $\alpha = 0{,}0001$.

в) e^2, $\alpha = 0{,}001$.

г) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, $\alpha = 0{,}0001$.

д) $\cos 2^0$, $\alpha = 0{,}001$.

е) $\sin\dfrac{\pi}{100}$, $\alpha = 0{,}0001$.

ж) $\sqrt[3]{8{,}36}$, $\alpha = 0{,}001$.

з) $\sqrt[3]{80}$, $\alpha = 0{,}001$.

и) $\ln 3$, $\alpha = 0{,}0001$.

к) $\ln 7$, $\alpha = 0{,}001$.

л) $arctg\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $\alpha = 0{,}001$.

2. Применяя метод последовательных дифференцирований, найти указанное число членов разложения в ряд решений дифференциальных уравнений при указанных начальных условиях.

а) $y' = xy + \ln(y + x)$, $y(1) = 0$ – пять членов.

б) $y' = 2x + \cos y$, $y(0) = 0$ – пять членов.

в) $2y' - (x + y)y - e^x = 0$, $y(0) = 2$ – четыре члена.

г) $y'' = y \cdot \cos y' + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \dfrac{\pi}{3}$ – пять членов.

д) $y'' = xyy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ – шесть членов.

е) $y''' = y'' + (y')^2 + y^3 + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 0{,}5$ – шесть членов.

Ряды Фурье.
Ряд Фурье для 2π – периодических функций.
Ряд Фурье для четных и нечетных функций

Пусть в некотором промежутке задана функция $f(x)$. Поставим вопрос: нельзя ли построить такой тригонометрический ряд, который в этом промежутке сходился бы к функции $f(x)$? Как найти коэффициенты такого ряда?

Эти вопросы помогает разрешить следующая теорема.

Теорема. *Если функция $f(x)$ разложима в равномерно сходящийся на всей числовой оси тригонометрический ряд*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1}$$

то коэффициенты этого ряда определяются формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx\,,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\,dx\,, \tag{2}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$.

Заметим, что теорема остаётся справедливой и в том случае, когда функция $f(x)$ определена лишь на отрезке $[-\pi;\pi]$ или всяком другом отрезке $[a; a+2\pi]$ длины 2π, а тригонометрический ряд сходится на этом отрезке равномерно. При этом пределы интегрирования в формуле (2) заменяются соответственно на a и $a+2\pi$.

Ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right),$$

коэффициенты которого определяются формулами (2), независимо от того, сходится он к функции $f(x)$ или нет, называется ***рядом Фурье*** для функции $f(x)$; это записывается так:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right).$$

Коэффициенты a_0, a_n, b_n, определяемые формулами (2), называются ***коэффициентами Фурье***.

Формально для всякой интегрируемой на отрезке $[-\pi;\pi]$ функции можно составить ряд Фурье. Однако между функцией и этим рядом не всегда можно поставить знак равенства. Следующая теорема (её называют ***теоремой Дирихле***) даёт достаточные условия для разложимости функции в ряд Фурье.

Теорема. *Если периодическая функция $f(x)$ имеет период $T = 2\pi$ и является кусочно-гладкой (на каждом конечном интервале она и её производные имеют не более конечного числа точек разрыва, и притом лишь первого рода) или кусочно-монотонной, то в каждой точке непрерывности функция $f(x)$ разложима в ряд Фурье, причем этот ряд сходится и в каждой точке x_n разрыва функции $f(x)$ к среднему арифметическому правого и левого пределов функции $f(x)$ в точке x_n, т.е. к числу $\frac{1}{2}\left(f(x_n-0)+f(x_n+0)\right)$.*

Заметим, что в ряд Фурье можно разложить и непериодическую кусочно-гладкую функцию $f(x)$, заданную лишь в интервале $(-\pi;\pi)$. При этом полученный ряд будет сходиться к функции $f(x)$ только в тех точках интервала $(-\pi;\pi)$, в которых функция $f(x)$ непрерывна. Более того полученный ряд будет сходящимся на всей числовой оси, а его суммой будет периодическое продолжение функции $f(x)$ на всю ось OX.

Исключение составляют лишь точки разрыва, в которых сумма ряда будет равна среднему арифметическому правого и левого пределов периодического продолжения данной функции.

Напомним, что функция $F(x)$, совпадающая с $f(x)$ в интервале $(-\pi;\pi)$ и удовлетворяющая для каждого x условию $F(x+2\pi)=F(x)$, называется периодическим продолжением функции $f(x)$ на всю ось OX.

Рассмотрим частные случаи разложимости функции в тригонометрический ряд Фурье.

1. Если $f(x)$ – чётная функция $(f(-x)=f(x))$, то функция $f(x)\cos nx$ будет также чётной, а функция $f(x)\sin nx$ – нечётной. Следовательно, имеем:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\,dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin nx\,dx=0,$$

а поэтому

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx.$$

2. Если $f(x)$ – нечётная функция $(f(-x)=-f(x))$, то функция $f(x)\cos nx$ будет нечётной, а функция $f(x)\sin nx$ – чётной. Следовательно, имеем:

$a_n=0$, а $b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi}f(x)\cdot\sin nx\,dx$,

поэтому разложение примет вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx.$$

Замечание. Функция, заданная в интервале $(0;\pi)$, может быть разложена в зависимости от требований либо только в ряд косинусов, либо только в ряд синусов. Для этого она должна быть продолжена в интервале $(-\pi;0)$ либо как чётная, либо как нечётная.

Если функция $f(x)$ периодична и имеет своим периодом $T=2\ell$, а в остальном удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то в каждой точке непрерывности функции $f(x)$ она разложима в ряд Фурье.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right), \qquad (3)$$

где $a_n=\dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$, $b_n=\dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$.

В каждой точке разрыва x_n ряд, стоящий в правой части равенства (3), сходится к среднему арифметическому правого и левого пределов функции $f(x)$ в точке x_n.

В случае четной функции x_n равенство (3) принимает вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell},$$

где $a_n=\dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_{0}^{\ell}f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$, $n=0,1,2,3,\ldots$.

В случае нечетной функции

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell},$$

где $b_n=\dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_{0}^{\ell}f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$, $n=1,2,3,\ldots$.

Пример 1.

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $f(x)$, заданную в интервале $(-\pi;\pi)$ уравнением $f(x)=\pi+x$.

Решение.

Графиком этой функции в интервале $(-\pi;\pi)$ является отрезок, соединяющий точки $(-\pi;0)$ и $(\pi;2\pi)$.

$y=S(x)$, где $S(x)$ – сумма ряда Фурье функции $f(x)$. Эта сумма является периодической функцией с периодом 2π и совпадает с функцией $f(x)$ на $(-\pi;\pi)$.

Определим коэффициенты ряда Фурье. Сначала находим

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx.$$

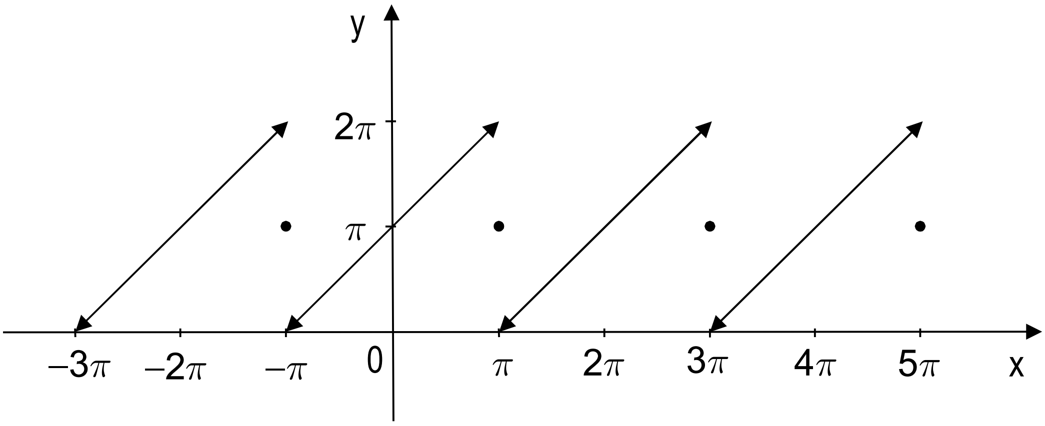

Рисунок 1

Второй интеграл равен нулю как интеграл от нечетной функции, взятый по интервалу, симметричному относительно начала координат.

Таким образом, $a_0 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\pi + x)\cos nx\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\, dx$$

Нетрудно видеть, что оба интеграла равны нулю. Итак, $a_n = 0$, т.е. $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Найдём теперь b_n.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\pi + x)\sin nx\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cdot\sin nx\, dx$$

Первый интеграл равен нулю. Подынтегральная функция второго интеграла – чётная. Таким образом,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\cdot\sin nx\, dx.$$

Интегрируя по частям, получим $v = x$, $dv = \sin nxdx$, $du = dx$, $v = \left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx$, т.е.

$$b_n = -\frac{2x}{n\pi}\cdot\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos nx\, dx = -\frac{2}{n}\cos n\pi + \frac{2}{\pi n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Следовательно, разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx = \pi + 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - ...\right).$$

Пример 2.

Разложить в тригонометрический ряд Фурье в интервале $(-\pi;\pi)$ функцию $f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi<x<0;\\ \pi-x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

Решение.

Данная функция является кусочно-гладкой в интервале $(-\pi;\pi)$, а её периодическое продолжение, при дополнительном условии $f\left[(2k-1)\pi\right]=\frac{\pi}{2}$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, удовлетворяет всем условиям теоремы Дирихле.

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\pi dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi dx-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\frac{3}{2}\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\cos nx\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cdot\cos nx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\sin nx\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cdot\sin nx\,dx=\frac{\cos nx}{n}=\frac{(-1)^n}{n}$$

и подставим их в равенство (1).

$$f(x)=\frac{3}{4}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right).$$

Найденное разложение имеет место при всех значениях x из промежутка $(-\pi;\pi)$, однако ряд, стоящий справа, сходится при всех x к функции, график которой изображён на рис. 2.

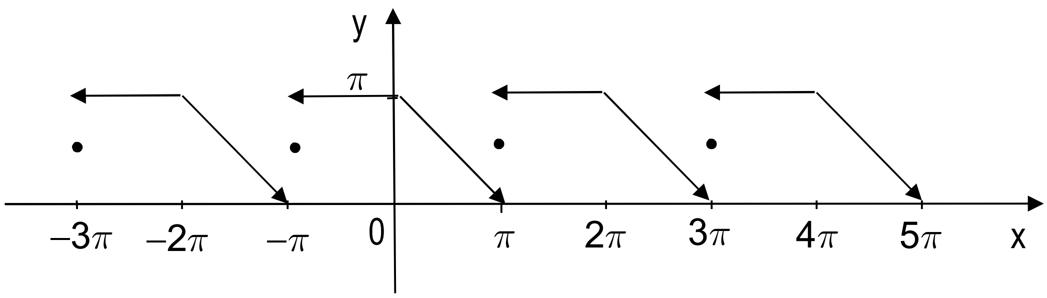

Рисунок 2

Пример 3.

Дана функция $f(x)=x^2$. Разложить её в ряд Фурье в интервале $(0;\pi)$ в ряд синусов.

Решение.

Функция, разлагаемая в ряд по синусам должна быть нечётная. Следовательно, нужно построить её нечётное продолжение в интервал $(-\pi;0)$; тогда $a_n=0$, а

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cdot\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{2x}{n^2}\sin nx-\left(\frac{x^2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\cos nx\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{4}{\pi n^3}\left(\left(-1\right)^n-1\right)-\frac{4}{\pi n}.$$

Искомое разложение будет иметь вид:

$$x^2=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n-1}{n^3}\sin nx-2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2n-1\right)x}{\left(2n-1\right)^3}-2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

Полученное равенство имеет место для всех значений $x\in(0;\pi)$, а ряд, стоящий справа, сходится для всех значений x к функции, график которой изображён на рис. 3.

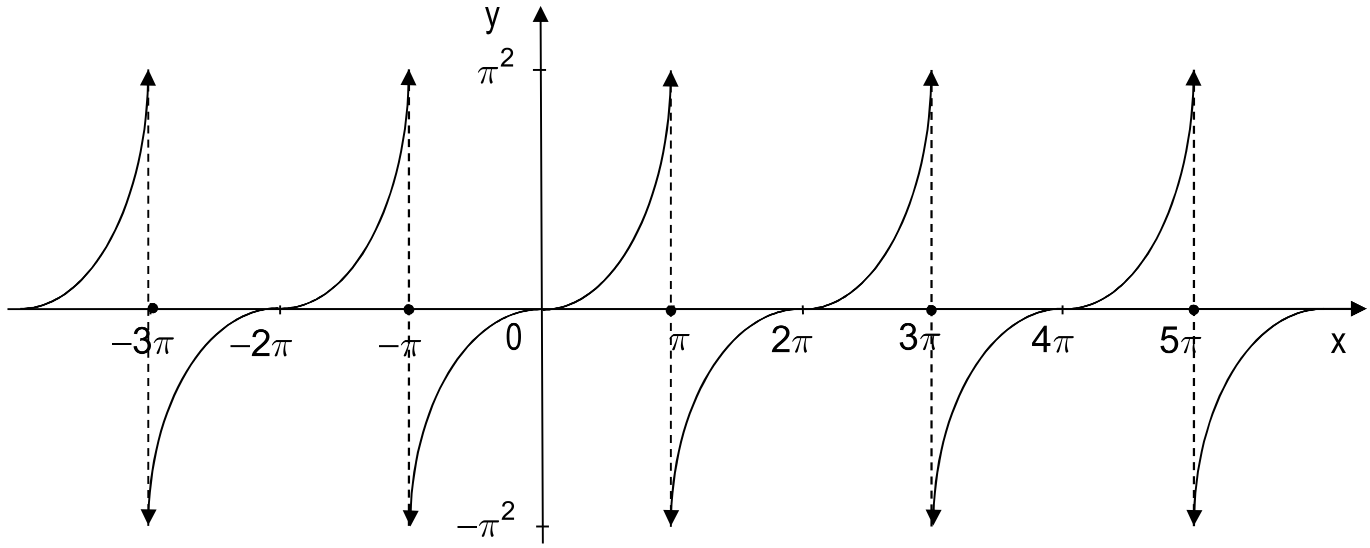

Рисунок 3

<u>*Пример 3.*</u>

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in[0;1);\\ 0, & x\in[0;3),\end{cases}$ имеющую период $T=4$. График функции изображен на рис. 4.

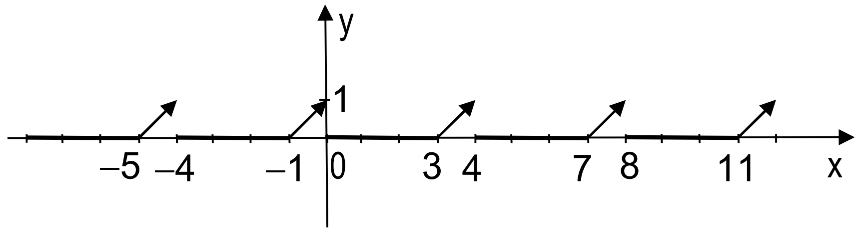

Рисунок 4

Решение.

Так ка длина отрезка $[-1;3]$ равна периоду, то при нахождении коэффициентов Фурье можно интегрировать по этому отрезку.

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\int_{0}^{3}0dx\right)=\frac{1}{2}\frac{(x+1)^2}{2}\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{4}.$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(x+1)\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{x+1}{\frac{n\pi}{2}}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{2}{(n\pi)^2}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right).$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(x+1)\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}-\frac{x+1}{\frac{n\pi}{2}}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{n\pi}\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-1\right).$$

(Здесь было применено интегрирование по частям).

Искомое разложение запишется так:

$$f(x)=\frac{1}{8}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-1\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Это равенство имеет место в точках непрерывности функции $f(x)$. В точках её разрыва $x_m=4m\quad(m\in\mathbb{Z})$ ряд Фурье сходится к полусумме односторонних пределов, т.е. к значению $\frac{1}{2}$.

Задания.

1. В промежутке $(-\pi;\pi)$ разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\frac{1}{2}x+5$.
2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x\le 0;\\ 0, & 0<x<\pi.\end{cases}$
3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x^3$ в промежутке $(-1;1)$.

4. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$ Разложить в ряд Фурье по синусам.

5. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}0, & -3<x\le 0;\\ x, & 0<x<3.\end{cases}$

6. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0;\\ 2, & 0<x<\pi.\end{cases}$

7. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x$ в промежутке $(0;\pi)$.

8. Разложить в тригонометрические ряды Фурье следующие функции в указанных интервалах.

   а) $f(x)=\begin{cases}1, & 3\pi<x<4\pi;\\ 3, & 4\pi<x<5\pi\end{cases}$ в интервале $(3\pi;5\pi)$.

   б) $f(x)=(x-2\pi)^2$ в интервале $(\pi;3\pi)$.

   в) $f(x)=e^x-1$ в интервале $(0;2\pi)$.

   г) $f(x)=x-4\pi$ в интервале $(4\pi;5\pi)$ по синусам.

   д) $f(x)=x\cdot\sin x$ в интервале $(0;\pi)$ по косинусам.

   е) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1;\\ 1, & 1<x<2;\\ 3-x, & 2\le x\le 3.\end{cases}$ в интервале $(0;3)$.

Домашнее задание.

1. Функцию $f(x)=x$ в промежутке $[0;\pi]$ разложить в ряд Фурье по косинусам.

2. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=x^2-x$, $x\in[-1;1]$, если $T=2$.

3. Разложить периодическую с периодом ℓ функцию в ряд Фурье, построить графики её и суммы $S(x)$ и найти значение $S(x_0)$ суммы полученного ряда в заданной точке x_0:

   а) $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi;\\ 0, & -\pi<x<0,\end{cases}$ $\ell=2\pi$, $x_0=\pi$.

   б) $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ при $0<x<2\pi$, $\ell=2\pi$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

   в) $f(x)=|x|$ при $-1<x<1$, $\ell=2$, $x_0=1$.

4. $f(x)=e^x$ при $x\in(0;\ln 2)$. Разложить в ряд Фурье по косинусам.

5. Разложить в ряд Фурье $f(x) = \pi - x$ в интервале $(0; 2\pi)$.
6. Разложить в тригонометрический ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2$ функцию, определенную на всей числовой оси и заданную на отрезке $[-1; 1]$ равенством $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x < 0; \\ 0,5, & x = 0; \\ x, & 0 < x \le 1. \end{cases}$
7. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0; \\ 2, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

Литература

1. Шмелев, П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях. – М.: Высш. шк., 1983.
2. Гусак А.А., Гусак Г.М. Справочник по высшей математике. – Мн.: Навука и тэхніка, 1991.
3. Руководство к решению задач по высшей математике: в 2-х частях / Под ред. Е.И. Гурского. – Мн.: Выш. шк., 1990. – Ч. 2.
4. Тузик, А.И. Высшая математика. Ряды. – Бр., 2003.
5. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х частях / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1986. – Ч. 2.
6. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа. / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981.
7. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1966.
8. Сборник задач и упражнений по высшей математике. / Под ред. А.В. Кузнецова. – Мн.: Выш. шк., 1994.
9. Лихолетов, И.И. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике / И.И. Лихолетов, И.П. Мацкевич. – Мн.: Выш. шк., 1969.
10. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: в 3-х частях / Под ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 1991. – Ч. 3.

Содержание

Учебное издание

Составители:
Мороз Людмила Трофимовна
Лизунова Ирина Владимировна
Гоголинская Рената Альдефонсовна
Джура Валентина Тимофеевна
Кузьмина Елена Викторовна

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

ЧАСТЬ VI.

Р Я Д Ы

Ответственный за выпуск: Мороз Л.Т.
Редактор: Строкач Т.В.
Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 1.12.2011 г. Формат 60х84 $^{1}/_{16}$.
Бумага «Снегурочка». Усл. п. л. 3,45. Уч. изд. л. 3,75. Тираж 100 экз.
Заказ №1157. Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, Брест, ул. Московская, 267.