УДК 550.34, 517.91

Е.Н. ШВЫЧКИНА
Брест, БрГТУ

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЮЩИХ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ХЕМОСТАТА

Под хемостатом будем понимать математическую модель, описывающую биологический процесс для непрерывного культивирования бактерий, обеспечивающий оптимальные температурные условия и постоянное поступление свежей питательной среды при одновременном удалении части бактериальной культуры [1]. В простейших моделях, когда в хемостате конкурируют две или более популяции эксплуататорским образом для одного лимитируемого субстрата, происходит вымирание всех, кроме одной из популяции. Такая ситуация возникает при заданных постоянных значениях рабочих параметров – скорости вымывания и входной концентрации питательного субстрата. В настоящей работе рассматривается моделирование непрерывного хемостатного культивирования двух микроорганизмов при условии, что функция внешнего воздействия $f(t)$ является периодической. Для этого рассмотрим систему трех дифференциальных уравнений, описывающую динамическую модель хемостата Михаэлиса-Ментена [1]

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = f(t) - S(t) - \dfrac{m_1 x_1(t) S(t)}{a_1 + S(t)} - \dfrac{m_2 x_2(t) S(t)}{a_2 + S(t)}, \\ \dot{x}_1(t) = \left(\dfrac{m_1 S(t)}{a_1 + S(t)} - 1 \right) x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = \left(\dfrac{m_2 S(t)}{a_2 + S(t)} - 1 \right) x_2(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $S(t),\ x_1(t),\ x_2(t)$ обозначают плотности питательного субстрата и микроорганизмов в момент времени t, управляющая функция $f(t)$ определяет скорость подачи питательного субстрата. Рассмотрим решение системы (1) при условии, что начальные концентрации неотрицательны

$$S(0) = S_0 \ge 0,\ x_1(0) = x_1^0 \ge 0,\ x_2(0) = x_2^0 \ge 0. \tag{2}$$

Задача Коши (1)–(2) решается с помощью аналитического метода, основанного на редукции исходной системы к системе Брио и Буке второго порядка [2] и программных модулях, позволяющих автоматизировать процесс проведения преобразований, решения возникающих систем уравнений и визуализацию решений [3]. Для решения сформулированной выше задачи Коши будем искать такие функции $S(t), x_1(t), x_2(t),$ которые либо являются точными аналитическими решениями системы дифференциальных уравнений (1), либо удовлетворяют системе (1) в предельном отношении при $t \to 0$. В обоих случаях для таких решений задачи удается проследить направленность развития процесса хемостатного культивирования.

В данной работе рассматривается задача Коши (1), (2), где управляющая функция имеет вид $f(t) = a\sin(\omega x) + b$; $a, \omega, b -$ заданные действительные числа, отличные от нуля. В процессе построения решения возникает уравнение Абеля второго рода, которое интегрируется в явном виде.

Теорема. *Система (1) имеет решение вида* $\mathrm{S}(t) = \mathrm{u}(t)$,

$$x_1(t) = \frac{\beta_1 u^2(t)\left(a_2 m_1\left(a\sin(\omega t) + b\right) - a_1 m_2 \beta_2\right)}{2a_1 a_2\left(a\sin(\omega t) + b\right)^2} - \frac{\beta_1 u(t)}{a\sin(\omega t) + b} + \beta_1,$$

$$x_2(t) = \frac{\beta_2 u^2(t)\left(a_1 m_2\left(a\sin(\omega t) + b\right) - a_2 m_1 \beta_1\right)}{2a_1 a_2\left(a\sin(\omega t) + b\right)^2} - \frac{\beta_2 u(t)}{a\sin(\omega t) + b} + \beta_2,$$

где $u(t)$ *– решение уравнения Абеля второго рода, а* β_1, β_2 *– произвольные постоянные.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smith, H. Competitive Coexistence in an Oscillating Chemostat / H. Smith // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1981. – Vol. 40, № 3. – P. 498–522.

2. Chichurin, A. Finding the solutions with the infinite limite properties for the third order normal system of differential equations using the Mathematica system / A. Chichurin, H. Shvichkina // Classical and Celestial Mechanics : Selected Papers / Rus. Ac. of Sciences, Dorodnitsyn Computing Centre of RAS, Lomonosov Moscow State University, Moscow State Aviation Institution, Collegium Mazovia in Siedlce ; Eds.: L. Gadomski [at al.]. – Siedlce, 2012. – P. 20–28.

3. Wolfram Web Resources [Electronic resource] / ed. S. Wolfram. – Champaign, 2012. – Mode of access : www.wolfram.com/ – Date of access : 1.11.2012.