УДК 519.2

Л.П. МАХНИСТ, Т.И. КАРИМОВА, В.С. РУБАНОВ, И.И. ГЛАДКИЙ
Брест, БрГТУ

О МОМЕНТАХ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕКОТОРЫХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

В работе рассматриваются моменты геометрического распределения – распределения дискретной случайной величины X, принимающей целые неотрицательные значения $k = 0,1,2,\ldots$ с вероятностями $P(X = k) = pq^k$, где $0 < p < 1$ – параметр геометрического распределения ($q = 1 - p$) (например, в [1], [2]).

В работе [3] рассматривались взаимосвязи между начальными, центральными и соответствующими факториальными моментами случайных величин, способы вычисления одних моментов, используя другие, и вычисление моментов случайных величин, используя числа Стирлинга первого и второго рода.

В настоящей работе получены формулы для вычисления начальных и центральных моментов геометрического распределения и установлена их взаимосвязь с некоторыми целочисленными последовательностями, определяемыми аналитическими или рекуррентными формулами.

Так как для начальных факториальных моментов n-го порядка $\alpha_{[n]}$ (например, в [4]) геометрического распределения выполняется $\alpha_{[n]} = n!\dfrac{q^n}{p^n}$, и, учитывая, что начальные моменты n-го порядка α_n случайной величины связаны с ее начальными факториальными моментами соотношением $\alpha_n = \sum\limits_{m=1}^{n} S_m^{(n)} \alpha_{[m]}$ (например, в [3]), где коэффициенты $S_m^{(n)}$ – числа Стирлинга второго рода, получим

$$\alpha_n = \sum_{m=1}^{n} \alpha_m^{(n)} \frac{q^m}{p^m}, \tag{1}$$

где коэффициенты $\alpha_m^{(n)} = S_m^{(n)} m!$ (последовательность A019538 в OEIS (англ. On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Энциклопедия целочисленных последовательностей)) могут быть получены с помощью рекуррентной формулы $\alpha_m^{(n)} = m\left(\alpha_{m-1}^{(n-1)} + \alpha_m^{(n-1)}\right)$, полагая $\alpha_m^{(n)} = 0$, если $m < 1$ или $m > n$.

Некоторые значения $\alpha_m^{(n)} = S_m^{(n)} m!$ внесем в следующую таблицу:

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	2				
3	1	6	6			
4	1	14	36	24		
5	1	30	150	240	120	
6	1	62	540	1560	1800	720

Следовательно, $\alpha_1 = \dfrac{q}{p}$, $\alpha_2 = 2\dfrac{q^2}{p^2} + \dfrac{q}{p}$, $\alpha_3 = 6\dfrac{q^3}{p^3} + 6\dfrac{q^2}{p^2} + \dfrac{q}{p}$,

$$\alpha_4 = 24\frac{q^4}{p^4} + 36\frac{q^3}{p^3} + 14\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p},$$

$$\alpha_5 = 120\frac{q^5}{p^5} + 240\frac{q^4}{p^4} + 150\frac{q^3}{p^3} + 30\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p},$$

$$\alpha_6 = 720\frac{q^6}{p^6} + 1800\frac{q^5}{p^5} + 1560\frac{q^4}{p^4} + 540\frac{q^3}{p^3} + 62\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}.$$

Существует и другое представление начальных моментов n-го порядка геометрического распределения: $\alpha_n = \sum\limits_{m=0}^{n} \dfrac{(-1)^{n-m}\,\alpha_{m+1}^{(n+1)}}{p^m}$, где коэффициенты $\alpha_m^{(n)}$ (последовательность A028246 в OEIS) могут быть получены с помощью рекуррентной формулы $\alpha_m^{(n)} = (m-1)\alpha_{m-1}^{(n-1)} + m\alpha_m^{(n-1)}$, полагая $\alpha_m^{(n)} = 0$, если $m < 1$ или $m > n$.

Некоторые значения $\alpha_m^{(n)}$ внесем в следующую таблицу:

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	…
1	1							
2	1	1						
3	1	3	2					
4	1	7	12	6				
5	1	15	50	60	24			
6	1	31	180	390	360	120		
7	1	63	602	2100	3360	2520	720	

Так, например, $\alpha_1 = \dfrac{1}{p} - 1$, $\alpha_2 = \dfrac{2}{p^2} - \dfrac{3}{p} + 1$,

$$\alpha_3 = \frac{6}{p^3} - \frac{12}{p^2} + \frac{7}{p} - 1\,,\ \alpha_4 = \frac{24}{p^4} - \frac{60}{p^3} + \frac{50}{p^2} - \frac{15}{p} + 1,$$
$$\alpha_5 = \frac{120}{p^5} - \frac{360}{p^4} + \frac{390}{p^3} - \frac{180}{p^2} + \frac{31}{p} - 1\,,$$
$$\alpha_6 = \frac{720}{p^6} - \frac{2520}{p^5} + \frac{3360}{p^4} - \frac{2100}{p^3} + \frac{602}{p^2} - \frac{63}{p} + 1\,.$$

Можно установить взаимозависимость между этими двумя представлениями начальных моментов. Заметим также, что для начальных моментов *n*-го порядка геометрического распределения выполняется

$$\alpha_n = \frac{1}{p^n}\sum_{m=0}^{n-1} E(n,m)\,q^{m+1}\,, \tag{2}$$

где коэффициенты $E(n,m)$ – числа Эйлера первого рода (последовательность A008292 в OEIS), которые могут быть получены с помощью рекуррентной формулы $E(n,m) = (n-m)E(n-1,m-1) + (m+1)E(n-1,m)$, полагая $E(n,m) = 0$, если $m < 0$ или $m > n-1$.

Для центральных моментов *n*-го порядка μ_n геометрического распределения выполняется $\mu_n = \dfrac{1}{p^n}\sum\limits_{m=1}^{n-1}\mu_m^{(n)}q^m$ (соотношение вида, аналогичного виду соотношения (2)), где коэффициенты $\mu_m^{(n)}$ (последовательность A046739 в OEIS) могут быть получены с помощью рекуррентной формулы $\mu_m^{(n)} = (n-1)\mu_{m-1}^{(n-2)} + (n-m)\mu_{m-1}^{(n-1)} + m\mu_m^{(n-1)}$, полагая $\mu_m^{(n)} = 0$, если $m < 1$ или $m > n-1$.

Так как центральные моменты *n*-го порядка случайной величины связаны с ее начальными моментами соотношением $\mu_n = \sum\limits_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m \alpha_{n-m}\alpha_1^m$ (например, в [2]), и, учитывая (1), получим $\mu_n = \sum\limits_{m=1}^{n}\mu_m^{(n)}\dfrac{q^m}{p^m}$ (соотношение вида, аналогичного виду соотношения (1)), где коэффициенты $\mu_m^{(n)}$ определяются соотношением

$$\mu_m^{(n)} = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j C_n^j S_{m-j}^{(n-j)}(m-j)!. \tag{3}$$

Некоторые значения $\mu_m^{(n)}$, определяемые (3), внесем в следующую таблицу:

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	2			
4	1	10	18	9		
5	1	25	90	110	44	
6	1	56	375	850	795	265

Следовательно, $\mu_2 = \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$, $\mu_3 = 2\frac{q^3}{p^3} + 3\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$,

$$\mu_4 = 9\frac{q^4}{p^4} + 18\frac{q^3}{p^3} + 10\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p},\ \mu_5 = 44\frac{q^5}{p^5} + 110\frac{q^4}{p^4} + 90\frac{q^3}{p^3} + 25\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p},$$

$$\mu_6 = 265\frac{q^6}{p^6} + 795\frac{q^5}{p^5} + 850\frac{q^4}{p^4} + 375\frac{q^3}{p^3} + 56\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}.$$

Заметим, что последняя целочисленная последовательность $\mu_m^{(n)} = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_n^j S_{m-j}^{(n-j)} (m-j)!$, как и последовательность $\mu_m^{(n)}$, определяющая представление центральных моментов в виде $\mu_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{n-m} \mu_m^{(n)}}{p^m}$, отсутствуют в OEIS (англ. On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Энциклопедия целочисленных последовательностей).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М. : Высшая школа, 1999. – 576 с.
2. Корн, Г.А. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г.А. Корн, Т.М. Корн – М. : Наука, 1978. – 832 с.
3. Зеневич, Е.А. Моменты распределения вероятностей / Е.А. Зеневич, Н.В. Фомина (научные руководители: Л.П. Махнист, Т.И. Каримова) // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов : в 2 ч. – Брест : Из-во БрГТУ, 2012. – Ч. 1. – С. 68–72.
4. О моментах геометрического распределения / Л.П. Махнист [и др.] // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : сб. материалов регион. науч.-практ. конф., Брест, 18–19 октября 2012 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. О.В. Матысика. – Брест, 2012. – С.108–110.