Материал поступил в редакцию 11.11.2019

**VEREMEICHIK A. I., KHVISEVICH V. M., SAZONOV M. I. Hafnium cathode plasma torch for oxygen plasma generation**

The article presents theoretical and experimental studies of the features of the arc to the thermionic cathode and the nature of the formation of the crater with the formation of simulating electrons of the oxide layer of hafnium. The resource of operation of the thermochemical hafnium cathode of the plasma torch at currents up to 300 A with working gases oxygen and air at continuous arc combustion is studied.

УДК 539.3

***Хвисевич В. М., Веремейчик А. И., Мазырка М. В.***

# ПОСТРОЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ЛИНЕЙНОГО РАСШИРЕНИЯ

**Введение.** Современный уровень развития техники и технологий выдвигает перед инженерами требования по созданию эффективных методов расчета инженерных конструкций, позволяющих снизить материалоемкость элементов при их достаточной прочности и надежности. Основная цель таких методов – исследовать напряженно-деформированное состояние тел, а также распределение температурного поля. Для этого необходимо поставить и решить краевые задачи механики деформируемого твердого тела и в частности теории упругости, теплопроводности, термоупругости [1–5]. Во многих случаях достаточно ограничиться рассмотрением плоских областей. Немаловажным аспектом с позиции снижения материалоемкости конструктивных элементов является также учет неоднородности материала, т. е. когда характеристики материала зависят от температуры [6].

Особое применение для построения математических моделей краевых задач механики деформируемого твердого тела получила теория потенциала. Ее практическим воплощением стало появление метода граничных элементов. Длительное время в инженерной практике исследователи отдавали предпочтение методу конечных разностей (МКР) и конечных элементов (МКЭ). Однако ряд работ, например, [1, 5], позволил развить метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) и показал преимущества метода ГИУ перед МКР и МКЭ. Сущность метода ГИУ состоит в преобразовании дифференциальных уравнений в эквивалентную систему интегральных. Этот метод имеет характерную особенность - возможность решения задач с использованием дискретизации лишь границы области. Это позволяет снизить на единицу порядок решаемой системы алгебраических уравнений. Естественно, что реализация такой возможности в методе ГИУ предусматривает предварительный переход от исходной краевой задачи для дифференциальных уравнений, описывающих некоторый процесс, к соотношениям, связывающим неизвестные функции на границе области (или ее части).

**1. Постановка задачи.** При исследовании напряженно-деформированного состояния элементов механизмов и машин, строительных конструкций в случае воздействия на них высоких температур важную роль играет учет изменения коэффициента линейного расширения $\alpha$ от температуры $T$ (модули упругости $E$ и $G$ считаются постоянными). Для решения поставленной задачи используем метод граничных интегральных уравнений [1, 2].

В работе [3] для определения $\alpha(T)$ рекомендуется использовать зависимость:

$$\alpha = \alpha_0 \left(1 + \gamma T\right), \quad (1)$$

где $\alpha_0$ – значение коэффициента для исходного состояния; $\gamma$ – эмпирический коэффициент.

Рассмотрим дифференциальное уравнение краевой задачи термоупругости для плоской области $D$ в перемещениях:

$$\Delta u_i + \frac{1}{1-2\upsilon}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{2(1+\upsilon)}{1-2\upsilon}\frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^{\alpha(T)} \alpha(T)\,dT, \quad i,j = 1,2, \quad (2)$$

с граничными условиями на границе $L$ области $D$:

$$\sigma_{ij} n_j = q_i\left(x_L\right),$$

где $u_i$ – вектор перемещений, $\upsilon$ – коэффициент Пуассона.

**2. Построение сингулярных интегральных уравнений.** Решение уравнения (2) ищем как сумму общего решения однородного дифференциального решения теории упругости $u_i^U$ и частного решения $u_i^T$:

$$u_i = u_i^U + u_i^T. \quad (3)$$

Частное решение $u_i^T$ представим в виде:

$$u_i^T = \frac{\partial W}{\partial x_i}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2), получим: $\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta W = \frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^{\alpha(T)} \alpha(T)\,dT\right)$. Это уравнение удовлетворяется, если принять: $\Delta W = \frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\int_0^{\alpha(T)} \alpha(T)\,dT$.

Используя зависимость для $\alpha(T)$ (1), получаем соотношение:

$$\Delta W = a\left(T + \frac{T^2}{2}\gamma\right), \quad (5)$$

где $a = \frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\alpha_0$.

Предполагаем, что внутренние источники тепла отсутствуют, а коэффициент теплопроводности является функцией температуры $\lambda(T) = \lambda_0\left(1 - kT\right)$, где $k$ – определяется с помощью экспериментальных кривых [4], $\lambda_0$ – коэффициент теплопроводности при исходной температуре. Температурное поле $T$ удовлетворяет уравнению теплопроводности:

$$div\left(\lambda\, grad T\right) = 0. \quad (6)$$

Введем функцию теплопроводности:

$$T^* = \int_0^T \lambda(T)\,dT. \quad (7)$$

Тогда, подставляя (7) в (6), приходим к уравнению Лапласа:

$$\Delta T^* = 0. \quad (8)$$

Функция $T$ связана с гармонической функцией $T^*$ неявной за-

***Мазырка Михаил Владимирович,*** *ведущий специалист по автоматизированным системам конструкторско-технологической подготовки производства СООО «Джофре Лабортехник».*
*Беларусь, 224025, г. Брест, ул. Лейтенанта Рябцева, 116; e-mail : mmazyrka@yandex.by*

висимостью (7). Подставляя выражение для $\lambda(T)$ в (7), получим:

$$T=\frac{1}{k}\left(1-\sqrt{1-\frac{2k}{\lambda_0}T^*}\right). \qquad (9)$$

Внося (9) в (5), получим:

$$\Delta W=a\left(bT-cT^*\right), \qquad (10)$$

где $b=1+\frac{\gamma}{k}$, $c=\frac{\gamma}{k\lambda_0}$.

В правой части (10) находится алгебраическая сумма функций температуры $T$ и гармонической функции $T^*$. Гармоническую функцию $T^*$ согласно [7] для внутренней и внешней краевой задачи можно представить в форме (11) и (12) соответственно:

$$T^*(x)=\sum_{i=1}^{n}\int_{L_i}\chi(y)\frac{\cos\alpha}{r}dl_y+\sum_{i=1}^{n}A_i\ln r_{Ai}, \qquad (11)$$

$$T(x)=T_\infty+\sum_{i=1}^{n}\int_{L_i}\chi(y)\frac{\cos\varphi}{r}dl_y+\sum_{k=1}^{m}A_k\ln r_{A_k}, \qquad (12)$$

где $\chi(y)$ – плотность потенциала двойного слоя, $r=|y-x|=\sqrt{(y_i-x_i)(y_i-x_i)}$, $\varphi$ – угол между направлением $\bar{r}$ и вектором внешней нормали $\bar{n}(y)$ в точке $y$, $\cos\varphi=n_i(y)\beta_i$, $\beta_i$ – направляющие косинусы вектора нагрузки, $A_i$ – мощность фиктивных источников тепла, $r_{A_k}$ – расстояние от источника до точки $x$ границы $L$.

Функцию $T$ будем выражать через функцию Дирака $\delta(y-x)$, тогда (10) примет вид:

$$\Delta W=-\frac{ab}{2\pi}\int_D T(y)\Delta\left(\ln\frac{1}{r}\right)dF_y-$$
$$-ac\left\{\int_L\chi(y)\Delta\left[\frac{r}{4}\cos\varphi(1-2\ln r)dl_y+\sum_{k=1}^{n}A_k\Delta\left[\frac{r_{A_k}^2}{4}\left(1-\ln r_{A_k}\right)\right]\right]\right\},$$

откуда:

$$W=-\frac{ab}{2\pi}\int_D T(y)\ln\frac{1}{r}dF_y-$$
$$-ac\left[\int_L\chi(y)\frac{r}{4}\cos\varphi(1-2\ln r)dl_y+\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{r_{A_k}^2}{4}\left(1-\ln r_{A_k}\right)\right]. \qquad (13)$$

Имея $W$, строим интегральные формулы добавок температурных перемещений, напряжений и фиктивной температурной нагрузки, т. е. плоскую краевую задачу термоупругости сводим к задаче изотермической теории упругости. Представим $W$ в виде:

$$W=W_\alpha+W_q,$$

где

$$W_\alpha=-\frac{ab}{2\pi}\int_D T(y)\ln\frac{1}{r}dD_y,\ \Delta W_\alpha=abT. \qquad (14)$$

Дифференцируя (14), найдем:

$$\frac{\partial W_\alpha}{\partial x_i}=-\frac{ab}{2\pi}\int_D T(y)\frac{\beta_i}{r}dD_y, \qquad (15)$$

$$\frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_i\partial x_j}=-\frac{ab}{2\pi}\int_D T(y)\frac{2\beta_i\beta_j-\delta_{ij}}{r^2}dD_y, \qquad (16)$$

где $\beta_i$ – направляющие косинусы вектора $\bar{r}$.

Термоэластопотенциалы (15) и (16) необходимы для построения формул перемещений $u_i^T$ и напряжений $\sigma_{ij}^T$:

$$\sigma_{ij}^T=\frac{E}{1+\upsilon}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\partial x_j}-\Delta W\delta_{ij}\right).$$

Исследуя свойства интеграла в (15), легко видеть, что при переходе через кривую контура $L$, ограничивающего область $D^+$, он не испытывает разрыва. Этот интеграл является сходящимся, т. к. порядок особенности $1/r$ меньше мерности области интегрирования. Интеграл в (16) представляет собой частную производную второго порядка от логарифмического потенциала площади. Этот интеграл особенный и необходимо выразить его неинтегральный член. Для этого в окрестности особой точки опишем окружность малого радиуса $\varepsilon$. Применяя формулу Гаусса, получим:

$$I=\int_D T(x)\frac{\partial^2(\ln 1/r)}{\partial x_i\partial x_j}dD_y\cong T(y)\int_D\frac{\partial^2(\ln 1/r)}{\partial x_i\partial x_j}dD_y=$$
$$=T(y)\int_L n_j(x)\frac{\partial(\ln 1/r)}{\partial x_i}dl_y, \qquad (17)$$

где $L$ – контур интегрирования, $n_j$ – направляющие косинусы вектора внешней нормали.

Так как для окружности в полярных координатах $dL=\varepsilon\, d\vartheta$, а $n_j=\beta_j$, то интеграл примет вид:

$$I=T(y)\int_L\beta_i\beta_j d\vartheta. \qquad (18)$$

Выполняя интегрирование по контуру окружности в пределах от нуля до $2\pi$, имеем:

$I=\pi$, если $i=j$; $I=0$, если $i\neq j$.

На основании вышеизложенного при $x\equiv y$ термоэлстопотенциал (16) запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_i\partial x_j}=-\frac{ab}{2\pi}\left(\pi T(x)+\int_D T(y)\frac{2\beta_i\beta_j-\delta_{ij}}{r^2}dD_y\right). \qquad (19)$$

Когда точка $x$ стремится к точкам границы области, вторые производные логарифмического потенциала площади имеют определенные пределы. Эти пределы различны для точек $x$, стремящихся к границе из внутренней $D^+$ и внешней $D^-$ области. Используя теорему Гюгонио-Адамара [5] и предполагая, что плотность потенциала $T(y)$ такова, что его внутренний потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона, определяем скачки этих производных:

$$I=\eta\pi T(x)n_i(x)n_j(x)+\int_D T(y)\frac{\partial^2(\ln 1/r)}{\partial x_i\partial x_j}dD_y, \qquad (20)$$

где $\eta=-\pi$ – для внутреннего предела и $\eta=\pi$ – для внешнего предела.

Тогда термоэластопотенциал (16) в граничных точках выражается формулой:

$$\frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_i\partial x_j}=-\frac{ab}{2\pi}\left(\eta\pi T(x)n_i(x)n_j(x)+\int_F T(y)\frac{2\beta_i\beta_j-\delta_{ij}}{r^2}dF_y\right). \qquad (21)$$

Имея (15), (19), (21), составим формулы добавок перемещений и напряжений (выражение для $W_q$ приведено в [7]).

Температурные добавки перемещений с учётом $W_q$ и $W_\alpha$ имеют вид:

$$u_i^T(x)=u_i^\alpha+u_i^q=-\frac{a}{2}\left\rangle\frac{b}{\pi}\int_F T(y)\frac{\beta_i}{r}dF_y-\right.$$
$$\left.-c\left\{\int_L\chi(y)\left[n_i(y)(2\ln r-1)+2\beta_i\cos\varphi\right]dl_y+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}A_k\left[\beta_i^{(A_k)}r_{A_k}\left(2\ln r_{A_k}-1\right)\right]\right\}\right\langle. \qquad (22)$$

Температурные добавки напряжений внутри области определяются следующим образом:

$$\sigma_{ij}^T(x)=\sigma_{ij}^{\alpha}+\sigma_{ij}^{q}=-\frac{aE(T)}{2(1+\upsilon)}\Big\langle\frac{b}{\pi}\left[2\pi T(x)\delta_{ij}+\int_F T(y)\frac{2\beta_i\beta_j-\delta_{ij}}{r^2}dF_y\right]+$$

$$+c\left\{\int_L \chi(y)\frac{1}{r}\left[n_i(x)\beta_j+n_j(x)\beta_i-(2\beta_i\beta_j-\delta_{ij})\cos\varphi\right]dl_y+\right. \quad (23)$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}A_k\left[(0.5+\ln r_{A_k})\delta_{ij}-\beta_i^{(A_k)}\beta_j^{(A_k)}\right]\right\}\Big\rangle.$$

Формулы температурных добавок напряжений в граничных точках области представим в виде:

$$\sigma_{ij}^T(x_L)=\sigma_{ij}^{\alpha}(x_L)+\sigma_{ij}^{q}(x_L)=-\frac{aE}{2(1+\nu)}bT(x_L)\left[\eta n_i(x_L)n_j(x_L)+2\delta_{ij}\right]+$$

$$+c\pi\chi(x_L)\left[\eta n_i(x_L)n_j(x_L)-\delta_{ij}\right]+\frac{b}{\pi}\int_L T(y)\frac{2\beta_i\beta_j-\delta_{ij}}{r^2}dl_y+V.p.\sigma_{ij}^{(q)T}, \quad (24)$$

где $V.p.$ означает главное значение сингулярного интеграла по Коши.

Полные термические перемещения рассматриваемой задачи определяются по формуле (3), при этом:

$$u_i^u(x)=\frac{1}{4\pi G(1-\upsilon)}\int_L \mu_i(y)\left[\beta_i\beta_j-(3-4\upsilon)\ln r\right]dl_y. \quad (25)$$

Полные напряжения во внутренних и граничных точках области определяются по формулам:

$$\sigma_{ij}(x)=\sigma_{ij}^U(x)+\sigma_{ij}^T(x),$$
$$\sigma_{ij}(x_L)=\sigma_{ij}^U(x_L)+\sigma_{ij}^T(x_L). \quad (26)$$

Здесь $\sigma_{ij}^U(x)$ соответствуют перемещению $u_i^U(x)$ во внутренних точках области:

$$\sigma_{ij}^u(x)=\frac{1}{2\pi(1-\upsilon)}\int_L \mu_k(y)\left[(1-2\upsilon)(\delta_{ik}\beta_j+\delta_{jk}\beta_i-\delta_{ij}\beta_k)+2\beta_i\beta_j\beta_k\right]\frac{dl_y}{r}, \quad (27)$$

в граничных точках области:

$$\sigma_{ij}^u(x_L)=\mu_i(x_L)n_i(x_L)\left[1+\frac{n_j^2(x_L)}{1-\upsilon}\right]+$$

$$+\mu_j(x_L)n_j(x_L)\left[\frac{n_i^2(x_L)}{1-\upsilon}-1\right]+V.p.\sigma_{ij}(x_L), \quad (28)$$

$$i,j=1,2.$$

Для получения системы сингулярных интегральных уравнений данной задачи подставляем (27) в граничные условия. После преобразований получаем:

$$\mu_i(x_L)+\frac{1}{2\pi(1-\upsilon)}\int_L\Big(\mu_i(y)\cos\psi\left[(1-2\upsilon)+2\beta_i^2\right]+$$

$$+\mu(y)\left\{(1-2\upsilon)\left[n_j(x_L)\beta_i-n_i(x_L)\beta_j\right]+2\beta_i\beta_j\cos\psi\right\}\Big)\frac{dl_y}{r}= \quad (29)$$

$$=f_i(x_L)+f_i^T(x_L),$$

где $f_i(x_L)$ – заданные механические нагрузки, а $f_i^T(x_L)$ – фиктивная поверхностная температурная нагрузка. Формулу для $f_i^T(x_L)$ представим в свёрнутом виде:

$$f_i^T(x_L)=-\sigma_{ij}^T(x_L)n_j(x_L). \quad (30)$$

Таким образом, решение краевой задачи термоупругости с переменным коэффициентом $\alpha(T)$ сведено к решению задачи изотермической теории упругости с поверхностными нагрузками $f_i(x_L)$ и $f_i^T(x_L)$. Полные напряжения, вычисленные по формулам (26), используются при решении краевой задачи теории упругости как компоненты плотности массовых сил.

Реализация полученных интегральных уравнений осуществляется в 2 этапа. На 1-м этапе решается краевая задача теплопроводности, в результате решения которой определяются плотности потенциалов, температурные добавки перемещений $u_i^T$, напряжений $\sigma_{ij}^T$ и фиктивная нагрузка $f_i^T$. На 2-м этапе реализуется система (29) и определяются термические перемещения и напряжения в произвольной точке области. Численная реализация интегральных уравнений построена на базе метода механических квадратур. Интегралы вычисляются при помощи квадратурных формул Гаусса и Лащенова. Контур области может аппроксимироваться криволинейными и прямолинейными элементами. Некоторые особенности разработанного алгоритма численной реализации полученных интегральных уравнений приведены в [8, 9].

**Заключение.** С помощью метода граничных интегральных уравнений теории потенциала плоская краевая задача термоупругости для изотропных тел с зависящим от температуры коэффициентом линейного расширения сведена к задаче изотермической теории упругости. Получены формулы для определения температурных добавок перемещений и напряжений во внутренних и граничных точках области.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вробел. – М. : Мир, 1987. – 524 с.
2. Steinbach, O. Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems. – New York : Springer Science, 2008. – 386 p.
3. Писаренко, Г. С. Прочность материалов при высоких температурах / Г. С. Писаренко, В. Н. Руденко, Г. Н. Третьяченко. – М. : Наука, 1966. – 796 с.
4. Шнейдер, П. Инженерные проблемы теплопроводности / П. Шнейдер. – М., 1960. – 340 с.
5. Гюнтер, Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Н. М. Гюнтер. – М. : Гостехиздат,1953. – 415 с.
6. Ломакин, В. А. Теория упругости неоднородных тел / А. В. Ломакин. – М. : Изд-во МГУ, 1976. – 361 с.
7. Хвисевич, В. М. Интегральные уравнения и алгоритм решения плоской краевой задачи стационарной термоупругости методом потенциала / В. М. Хвисевич // Строительная механика и расчет сооружений. – 1991. – № 2. – С. 48–51.
8. Веремейчик, А. И. К решению плоских краевых задач термоупругости неоднородных тел методом потенциала / А. И. Веремейчик, В. В. Гарбачевский, В. М. Хвисевич // Теоретическая и прикладная механика. – 2015. – Вып. 30. – С. 184–189.
9. Хвисевич, В. М. Развитие метода потенциала на решение плоских краевых задач термоупругости изотропных непрерывно-неоднородных тел / В. М. Хвисевич, А. И. Веремейчик / Механика. Исследования и инновации / Белорусский гос. ун-т транспорта. – Гомель, 2016. – Вып. 11. – С. 235–248.


*Материал поступил в редакцию 11.11.2019*

***KHVISEVICH V. M., VEREMEICHIK A. I., MAZYRKA M. V. Construction of singular integral equations of the plane thermoelasticity problem for isotropic bodies with variable coefficient of linear expansion***

The paper considers the application of the potential method to the solution of the two-dimensional boundary value problem of thermoelasticity of isotropic bodies with a variable coefficient of linear expansion. Properties of potentials are investigated, singular integral equations for determination of displacements and stresses are constructed.