

$$a) Ax_n \rightarrow \Pi(A)y, \|Ax_n - y\| \rightarrow I(A, y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|$$

b) последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда уравнение $Ax_n = \Pi(A)y$ разрешимо. В последнем случае

$$x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*,$$

где x^* – минимальное решение уравнения (1).

Замечание. В рассматриваемом случае $x_0 = 0$, поэтому $x_n \rightarrow x^*$, т. е. процесс (2) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

УДК 004.942:519.218

**П. А. МЕРКУШЕВИЧ, И. Ю. СВЕРБА, Л. П. МАХНИСТ,
Т. И. КАРИМОВА**

Беларусь, Брест, БрГТУ

ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ИЗ ЗАДАЧ ГИДРОЛОГИИ

Рассмотрим дифференциальное уравнение для описания колебаний речного стока, используемое в стохастической гидрологии (например, в [1] и [2]):

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi \frac{d\theta_1}{d\xi} = -1, \quad \left. \frac{d\theta_1}{d\xi} \right|_{\xi=\infty} = 0, \quad \theta_1(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0 \quad (1)$$

Уравнение (1) при решении некоторых прикладных задач, интегрировалось различными методами, например, в [3], а в работах [4], [5] исследовалась сходимость решения таких уравнений. В работах [6] и [7] для решения уравнения (1) использовалась система компьютерной алгебры.

Приведем решение этого уравнения, используя степенные ряды.

Введем обозначение $\frac{d\theta_1}{d\xi} = f_1(\xi)$. Тогда, учитывая, что $\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} = \frac{df_1}{d\xi}$, приходим к линейному дифференциальному уравнению первого порядка $\frac{df_1}{d\xi} - \xi f_1 = -1$, с начальным условием $f_1(\xi)|_{\xi=\infty} = 0$.

Решение последнего уравнения будем искать в виде $f_1(\xi) = u(\xi)v(\xi)$. Тогда, учитывая, что $f_1'(\xi) = u'(\xi)v(\xi) + u(\xi)v'(\xi)$, получим уравнение

$$u'v + u(v' - \xi v) = -1 \quad (2).$$

Найдем одно из ненулевых решений уравнения $v' - \xi v = 0$. Разделяя переменные в уравнении $\frac{dv}{d\xi} = \xi v$, решением которого, очевидно, является $v = 0$, получим $\frac{dv}{v} = \xi d\xi$. Интегрируя последнее уравнение, получим $\int \frac{dv}{v} = \int \xi d\xi + C_2$. Откуда $\ln |v| = \frac{\xi^2}{2} + \ln C_1$ или $v = \pm C_1 e^{\frac{\xi^2}{2}}$.

Следовательно, $v = C e^{\frac{\xi^2}{2}}$ – общее решение дифференциального уравнения $v' - \xi v = 0$.

Выберем одно из ненулевых решений этого уравнения, например, $v = e^{\frac{\xi^2}{2}}$, при $C = 1$. Подставляя его в уравнение (2), имеем $u'e^{\frac{\xi^2}{2}} = -1$ или $u' = -e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Откуда $u = -\int e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi + C$.

Следовательно, $f_1(\xi) = u(\xi)v(\xi) = \left(-\int e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi + C\right) e^{\frac{\xi^2}{2}}$ или $f_1(\xi) = \left(C - \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) e^{\frac{\xi^2}{2}}$.

Заметим, что $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$. Тогда, учитывая начальное условие $f_1(\xi)|_{\xi=\infty} = 0$, имеем $f_1(\xi) = \left(\sqrt{2\pi} - \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) e^{\frac{\xi^2}{2}}$ или $f_1(\xi) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) e^{\frac{\xi^2}{2}}$, что можно проверить, используя правило Лопиталя.

Далее решение дифференциального уравнения $\frac{df_1}{d\xi} - \xi f_1 = -1$ будем искать в виде степенного ряда $f_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n$. Тогда $f_1'(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \xi^{n-1}$. Подставляя $f_1(\xi)$ и $f_1'(\xi)$ в уравнение $\frac{df_1}{d\xi} - \xi f_1 = -1$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n \xi^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^{n+1} = -1.$$

Введя замены $n - 1 = k$ и $n + 1 = m$ в первой и второй сумме, соответственно, получим уравнение $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} \xi^k - \sum_{m=1}^{\infty} c_{m-1} \xi^m = -1$ или, полагая $k = n$ и $m = n$ в первой и второй сумме, соответственно, получим уравнение $c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) c_{n+1} \xi^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} \xi^n = -1$ или уравнение $c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1) c_{n+1} - c_{n-1}) \xi^n = -1$ для любого ξ . Следовательно, $(n+1) c_{n+1} - c_{n-1} = 0$ или $c_{n+1} = \frac{c_{n-1}}{n+1}$, если n – натуральное число, и $c_1 = -1$.

При $n = 2k - 1$ – нечетное число ($k \in \mathbb{N}$), получим $c_{2k} = \frac{c_{2k-2}}{2k} = \frac{c_0}{(2k)!!}$, где $(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)$ – двойной факториал четного числа $2k$.

При $n = 2k$ – четное число ($k \in \mathbb{N}$), получим $c_{2k+1} = \frac{c_{2k-1}}{2k+1} = \frac{c_1}{(2k+1)!!}$, где $(2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1)$ – двойной факториал нечетного числа $2k+1$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n = c_0 + c_1 \xi + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \xi^n = c_0 + c_1 \xi + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} \xi^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k+1} \xi^{2k+1} = \\ &= c_0 + c_1 \xi + c_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{(2k)!!} + c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!} = c_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{(2k)!!} + c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!}, \end{aligned}$$

полагая, что $0!! = 1$.

Так как $c_0 = f_1(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и $c_1 = -1$, то

$$f_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{(2k)!!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!}.$$

Так как $\frac{d\theta_1}{d\xi} = f_1(\xi)$, то

$$\theta_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+2}}{(2k)!!(2k+1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+2}}{(2k+1)!!(2k+2)} + C.$$

Учитывая начальное условие, $\theta_1(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0$, получаем, что $\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*)$, где

$$S_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+2}}{(2k)!!(2k+1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+2}}{(2k+1)!!(2k+2)}$$

или

$$S_1(\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{n}{2}\right\}} \frac{(-1)^{n-1} \xi^n}{(n-1)!! n},$$

где $\{t\}$ – дробная часть числа t соответственно.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волчек, А. А. О сходимости решения одной малопараметрической модели многолетних колебаний речного стока / А. А. Волчек, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов // Вестник Брестского государственного технического университета. Серия: Физика, математика, информатика. – 2009. – № 5. – С. 2–5.

2. Волчек, А. А. Об асимптотическом поведении параметра одного из распределений вероятностей речного стока / А. А. Волчек, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов // Проблемы водоснабжения, водоотведения и энергосбережения в западном регионе Республики Беларусь : сб. материалов междунар. науч.-техн. конф., Брест, 22–23 апр. 2010 г. / Брест. гос. техн. ун-т ; редкол.: С. В. Басов [и др.]. – Брест, 2010. – С. 45–49.

3. Волчек, А. А. О решении системы дифференциальных уравнений, одной из моделей многолетних колебаний речного стока / А. А. Волчек, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2010. – № 1. – С. 68–77.

4. Волчек, А. А. О параметрах распределения вероятностей диффузионной модели стохастической гидрологии / А. А. Волчек, И. И. Гладкий, Л. П. Махнист // Вестник Брестского государственного технического университета. Серия: Физика, математика, информатика. – 2010. – № 5. – С. 48–53.

5. Волчек, А. А. О моментах распределения вероятностей модели диффузионного типа в практике гидрологии / А. А. Волчек, И. И. Гладкий, Л. П. Махнист // Математика и ее приложения : межвуз. сб. науч. тр. / Ассоциация математиков вузов северо-запада ; под ред. Д. П. Голоскокова, А. Р. Шкадовой. – СПб, 2011. – Вып. 3. – С. 139–148.

6. Махнист, Л. П. Применение систем компьютерной алгебры для решения модели стохастической гидрологии / Л. П. Махнист, Е. Н. Защук, И. И. Гладкий // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 22–23 апр. 2021 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. Н. Н. Сендера. – Брест, 2021. – С. 96–98.

7. Махнист, Л. П. К решению задачи гидрологии с использованием систем компьютерной алгебры / Л. П. Махнист, Е. Н. Защук, И. И. Гладкий // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 28–29 апр. 2022 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. И. Басика. – Брест, 2022. – С. 17–19.