УДК 517.9

Е. В. КУЗЬМИНА
Беларусь, Брест, БрГТУ

ПОСТРОЕНИЕ ДВУХ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ТРЕТЬЕГО УРАВНЕНИЯ ИЕРАРХИИ РИККАТИ

Предметом исследования является уравнение

$$w''' + \gamma^3 w^4 + 6\gamma^2 w^2 w' + 4\gamma w w'' + 3\gamma w'^2 = 0. \tag{1}$$

Это третье уравнение из иерархии уравнений со свойством Пенлеве, порожденной уравнением Риккати

$$w'(z) + \gamma w^2(z) = 0.$$

Указанная иерархия была построена в работе [1]. Это уравнения вида

$$D_R^n w = 0, \ n = 1, 2, 3, ...,$$

где D_R есть преобразование дифференциальных выражений, действующее по формуле

$$D_R = \frac{d}{dz} + \gamma w, \ z \in \mathbb{C}, \ \gamma \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

Уравнение (1) получаем при $n = 3$. Как показано в [1], уравнению (1) удовлетворяет формальный ряд вида

$$w = \frac{1}{\gamma(z-a)} + c_1 + c_2(z-a) + c_3(z-a)^2 + c_4(z-a)^3 + c_5(z-a)^4 + ..., \tag{2}$$

где $c_1 = h_1$, $c_2 = h_2$, $c_3 = -\frac{3}{2}\gamma h_1 h_2 - \frac{1}{2}\gamma^2 h_1^3$, $c_4 = \frac{1}{2}\gamma^3 h_1^4 + \gamma^2 h_1^2 h_2 - \frac{1}{2}\gamma h_2^2$, $c_5 = -\frac{1}{4}\gamma^4 h_1^5 + \frac{5}{4}\gamma^2 h_1 h_2^2$, коэффициенты c_j, $j > 5$, однозначно определяются через произвольные параметры h_1, h_2. Согласно работе [2], ряд в (2) сходится в области $|z-a| < \rho$, $\rho = \min\left\{\frac{1}{|\gamma k_1|}, \frac{1}{|\gamma k_2|}\right\}$, где

$$k_1 = \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}\sqrt{-h_1^2 - \frac{2}{\gamma}h_2}, \ \ k_2 = \frac{1}{2}h_1 - \frac{1}{2}\sqrt{-h_1^2 - \frac{2}{\gamma}h_2},$$

h_1, h_2 – произвольные постоянные, а знаком $\sqrt{\ }$ обозначена одна из ветвей многозначной аналитической функции. Найдя сумму ряда в (2), получили решение уравнения (1) – функцию вида

$$w(z) = \frac{1}{\gamma(z-a)} + \frac{k_1}{1+\gamma k_1(z-a)} + \frac{k_2}{1+\gamma k_2(z-a)}. \tag{3}$$

Аналитические решения $w(z)$ уравнения (1) могут иметь три различных полюса первого порядка – точки a, $b = a - \frac{1}{\gamma k_1}$ и $c = a - \frac{1}{\gamma k_2}$. Если a, b и c вещественные, то эти точки делят прямую на четыре части и на вещественной оси решение задачи Коши с начальными условиями в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ однозначно определено только на одной из этих частей, содержащей точку x_0. Но аналитическая функция $w(z)$ задает по условию Коши однозначно определенную на всей прямой функцию, которую будем называть *формальным решением задачи Коши.*

Рассмотрим уравнение (1) на прямой, т. е. уравнение вида

$$u'''(x) + \gamma^3 u^4(x) + 6\gamma^2 u^2(x)u'(x) + 4\gamma u(x)u''(x) + 3\gamma u'^2(x) = 0, \tag{4}$$

и задачу Коши для этого уравнения с начальными условиями $u(x_0) = C_1$, $u'(x_0) = C_2$, $u''(x_0) = C_3$, где $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Зафиксируем формальное решение $u(x)$, удовлетворяющее указанным начальным условиям
и имеющее полюсы в точках a, b и c на прямой.

Пусть $C_1(\varepsilon), C_2(\varepsilon), C_3(\varepsilon) \in \mathbb{C}$, $C_1(\varepsilon) \to C_1$, $C_2(\varepsilon) \to C_2$, $C_3(\varepsilon) \to C_3$ при $\varepsilon \to 0$ и $C_1(\varepsilon), C_2(\varepsilon), C_3(\varepsilon)$ таковы, что решения $w_\varepsilon(x)$ задачи Коши для уравнения (1) с условиями $w_\varepsilon(x_0) = C_1(\varepsilon)$, $w'_\varepsilon(x_0) = C_2(\varepsilon)$, $w''_\varepsilon(x_0) = C_3(\varepsilon)$ не имеют особенностей на вещественной оси.

Определение. Распределение W будем называть *обобщенным решением задачи Коши* для уравнения (4) с условиями $u(x_0) = C_1$, $u'(x_0) = C_2$, $u''(x_0) = C_3$ при заданном способе аппроксимации начальных условий, если $w_\varepsilon(x)$ сходятся при $\varepsilon \to 0$ к W в смысле сходимости в пространстве обобщенных функций.

Наличие трех различных полюсов порождает восемь случаев [2], в зависимости от расположения каждого из полюсов выше или ниже вещественной оси. Поэтому существует восемь разных обобщенных решений задачи Коши. Возможны вырожденные случаи. Уравнение (4) имеет только два обобщенных решения, если $b = \infty$ и $c = \infty$.

Теорема. *Если* $C_2 = -\gamma C_1^2$ *и* $C_3 = 2\gamma^2 C_1^3$, *то обобщенными решениями задачи Коши являются распределения*

$$W^{\pm} = \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right) \pm i\pi \frac{1}{\gamma}\delta_a,$$

где $a = x_0 - \frac{1}{\gamma C_1}$, *и только они.*

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грицук, Е. В. Исследование обобщенной иерархии уравнения Риккати на свойство Пенлеве / Е. В. Грицук, Е. В. Кузьмина // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2017. – № 2. – С. 64–72.

2. Антоневич, А. Б. Существование восьми обобщенных решений задачи Коши для третьего уравнения иерархии Риккати / А. Б. Антоневич, Е. В. Кузьмина // XIV Белорусская математическая конференция, посвященная 65-летию Института математики НАН Беларуси : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 28 окт. – 1 нояб. 2024 г. : в 3 ч. / Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т математики, Белорус. гос. ун-т ; сост. Т. С. Бусел. – Минск : Беларус. навука, 2024. – Ч. 1. – С. 64–66.

УДК 517.986.2

М. М. ЛОГИНОВСКАЯ[1], И. Л. ЛЮКСЕМБУРГ[2]
[1]Беларусь, Минск, БГУ
[2]Беларусь, Минск, Институт математики НАН Беларуси

НЕПРЕРЫВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДОПУСКАЮЩИХ РАЗРЫВЫ ПЕРВОГО РОДА

Согласно теории Гельфанда [1], симметричная банахова алгебра A ограниченных комплекснозначных функций изоморфна алгебре всех непрерывных функций на пространстве максимальных идеалов $\mathfrak{M}(A)$ этой алгебры, которое является компактным топологическим пространством. Это пространство обычно интерпретируется как естественная область определения рассматриваемых функций, при этом структура этого пространства отражает возможные типы разрывов этих функций.