СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корзюк, В. И. Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / В. И. Корзюк. – Минск : БГУ, 2013. – 368 с.

2. Дайняк, В. В. Задача типа Дирихле для составного уравнения третьего порядка / В. В. Дайняк, В. И. Корзюк, А. А. Протько // Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика. – 2012. – № 3. – С. 116–121.

3. Дайняк, В. В. Некоторые граничные задачи для линейного дифференциального уравнения пятого порядка / В. В. Дайняк, К. В. Латушкин // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения – XXXVI : материалы междунар. конф. «Воронежская весенняя математическая школа», Воронеж, 26–30 апр. 2024 г. / Воронеж. гос. ун-т ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова ; Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН. – Воронеж, 2024. – С. 110–112.

УДК 517.9

Д. Д. ЕЛЕЦ[1], Т. А. ЯЦУК[2]
[1]Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина
[2]Беларусь, Брест, БрГТУ

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Пусть $f \in L_2[-1;1]$, $a > 0$. Рассмотрим задачу нахождения решения дифференциального уравнения второго порядка с сингулярным потенциалом

$$u''(x) - a\delta(x)u(x) = f(x) \;\; (x \in (-1;1)) \tag{1}$$

и удовлетворяющего граничным условиям

$$u(-1) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{2}$$

В формуле (1) $\delta(x)$ – δ-функция Дирака [1, с. 82].

Основной вопрос, возникающий при изучении уравнений с обобщенными коэффициентами, состоит в определении понятия решения такого уравнения. Одной из первых работ, в которой был придан строгий математический смысл понятию решения уравнения с дельтообразным коэффициентом, была статья Ф. А. Березина и Л. Д. Фаддеева [2]. В этой работе рассматривался оператор Шредингера с сингулярным потенциалом в трехмерном пространстве.

Заметим, что если $u(x)$ гладкое решение (1), (2), то для любой основной функции $\varphi \in \mathscr{D}(-1;1)$ имеет место равенство [1, с. 101]:

$$\langle \delta(x)u(x), \varphi(x)\rangle = \langle \delta(x)u(0), \varphi(x)\rangle.$$

А поэтому левая часть (1) запишется как

$$u''(x) - a\delta(x)u(0). \tag{3}$$

Однако, если $u(0) \neq 0$, то левая часть (1) не принадлежит $L_2[-1,1]$. Таким образом, $u(x)$ не может быть гладкой функцией.

Далее для простоты рассуждений будем считать, что $f \in C[-1;1]$. Пусть также $0 < \varepsilon < 1$. Рассмотрим семейство уравнений

$$u''(x) - a\delta_\varepsilon(x)u(x) = f(x) \ \ (x \in (-1;1)), \tag{4}$$

где $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \chi_{(0;\varepsilon)}(x)$ ($\chi_A(x)$ – характеристическая функция множества A). Нетрудно видеть, что $\delta_\varepsilon(x) \to \delta(x)$ при $\varepsilon \to 0$ в пространстве обобщенных функций $\mathscr{D}'(-1;1)$.

На каждом из промежутков $[-1;0]$, $(0;\varepsilon)$ и $[\varepsilon;1]$ уравнение (4) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Пусть

$$u_1 : [-1;0] \to \mathbb{R}, \quad u_2 : (0;\varepsilon) \to \mathbb{R}, \quad u_3 : [\varepsilon;1] \to \mathbb{R}$$

есть общие решения (4) на соответствующих промежутках. Отметим, что каждая из функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ зависит от двух произвольных постоянных. Значения этих постоянных найдем из граничных условий: $u_1(-1) = 0$, $u_3(1) = 0$ и условий сопряжения в точках $x = 0$ и $x = \varepsilon$: $u_1(-0) = u_2(+0)$, $u_2(\varepsilon - 0) = u_3(\varepsilon + 0)$, $u_1'(-0) = u_2'(+0)$, $u_2'(\varepsilon - 0) = u_3'(\varepsilon+0)$. Явные выражения для $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ не приводим ввиду их громоздкости. Таким образом, функция

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} u_1(x), & \text{при } x \in [-1;0], \\ u_2(x), & \text{при } x \in (0;\varepsilon), \\ u_3(x), & \text{при } x \in [\varepsilon;1] \end{cases}$$

является непрерывно дифференцируемой на $[-1;1]$, удовлетворяет граничным условиям (2) и уравнению (4) за исключением $x=0$ и $x=\varepsilon$.

Теорема. *В каждой точке x отрезка $[-1;1]$ существует предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} u_\varepsilon(x) =: u(x)$, где*

$$u(x)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{-1}^{x}(x-t)f(t)\,dt+\frac{(x+1)(A+aA+B-C-D)}{2+a},\ x\in[-1;0),\\ \displaystyle-\int\limits_{x}^{1}(x-t)f(t)\,dt+\frac{(x-1)(A-B-C-aC+D)}{2+a},\ x\in[0;1],\end{cases}$$

$$A=\int\limits_{-1}^{0}tf(t)dt,\quad B=-\int\limits_{-1}^{0}f(t)dt,\quad C=-\int\limits_{0}^{1}tf(t)dt,\quad D=\int\limits_{0}^{1}f(t)dt.$$

Справедливы следующие утверждения

(i) $u(x)$ *непрерывна на* $[-1;1]$ *и* $u(-1)=u(1)=0$*;*

(ii) $u(x)$ *имеет непрерывную производную на промежутках* $[-1;0)$ *и* $(0;1]$*, существуют* $u'(-0)$ *и* $u'(+0)$ *и выполняется условие*

$$u'(+0)-u'(-0)=au(0);$$

(iii) $u''(x)=f(x)$ *при* $x\in(-1;0)\cup(0;1)$.

Пусть теперь u''_g – вторая производная функции u в смысле теории обобщенных функций. Тогда для любой основной функции $\varphi\in\mathscr{D}(-1;1)$ выполняется равенство $\langle u''_g;\varphi\rangle = \langle u''(x)+(u'(+0)-u'(-0))\delta(x);\varphi\rangle$, которое с учетом утверждений (ii) и (iii) теоремы принимает вид

$$\langle u''_g-au(0)\delta(x);\varphi\rangle=\langle f;\varphi\rangle.$$

Последнее равенство и утверждение (i) теоремы показывают, что $u(x)$ является решением задачи (1), (2).

Пример. Пусть $f(x)=x^3-2x+1$. Тогда решением задачи (1), (2) при $a=0$ является функция

$$v(x)=\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{17}{60}x-\frac{1}{2},$$

а при $a > 0$ функция

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{7x}{4} + \frac{29}{30} - \frac{88+29a}{60+30a}(x+1), & x \in [-1;0), \\ \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{30} + \frac{32+a}{60+30a}(x-1), & x \in [0;1]. \end{cases}$$

На рисунке мы видим, что наличие δ-слагаемого в уравнении (1) вызывает излом графика решения в точке $x = 0$.

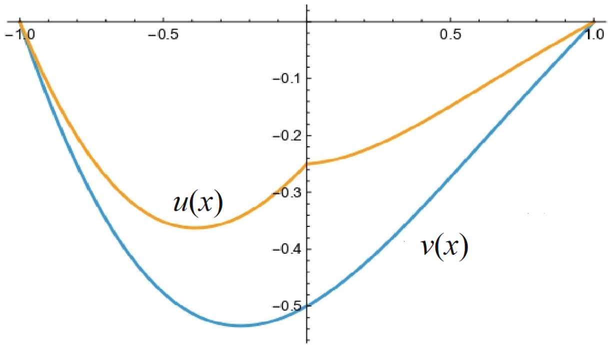

Рисунок – Графики функций $v(x)$ и $u(x)$ при $a = 2$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – Изд. 4-е. – М. : Наука, 1981. – 512 с.

2. Березин, Ф. А. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / Ф. А. Березин, Л. Д. Фадеев // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 137. – № 5. – С. 1011–1014.

УДК 519.65

М. В. ИГНАТЕНКО
Беларусь, Минск, БГУ

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА ЭРМИТА ОТНОСИТЕЛЬНО ПЯТИКРАТНЫХ УЗЛОВ

Пусть на $[a, b]$ заданы различные точки $x_0, x_1, ..., x_n$ – узлы интерполирования, в которых известны конечные значения интерполируемой функции $f : [a, b] \to R$ и значения ее первых четырех производных.