2. Antonevich, A. On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points / A. Antonevich, Ju. Makowska // Complex Analysis and Operator Theory. – 2008. – Vol. 2. – P. 215–240.

УДК 517.956

А. И. БАСИК[1], Е. В. ГРИЦУК[2], О. В. БОЛТРУШКО[1]
[1]Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина
[2]Беларусь, Брест, БрГТУ

ИНДЕКС КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В $\mathbb{R}^3$

В ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, гомеоморфной шару, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ рассмотрим систему четырех дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ -a_2 & 0 & 0 & -b_2 \\ -b_2 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & b_2 & -a_2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \begin{pmatrix} 0 & a_3 & b_3 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & -b_3 \\ -b_3 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & b_3 & -a_3 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0, \quad (1)$$

где $U = (U_1(x), U_2(x), U_3(x), U_4(x))^T$ – неизвестная вектор-функция, T означает транспонирование, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, a_2, a_3, b_2, $b_3 \in \mathbb{R}$.

Характеристическая матрица системы (1) имеет вид

$$\mathfrak{A}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & a_2\xi_2 + a_3\xi_3 & b_2\xi_2 + b_3\xi_3 & 0 \\ -a_2\xi_2 - a_3\xi_3 & \xi_1 & 0 & -b_2\xi_2 - b_3\xi_3 \\ -b_2\xi_2 - b_3\xi_3 & 0 & \xi_1 & a_2\xi_2 + a_3\xi_3 \\ 0 & b_2\xi_2 + b_3\xi_3 & -a_2\xi_2 - a_3\xi_3 & \xi_1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\det \mathfrak{A}(\xi) = \left(\xi_1^2 + (a_2\xi_2 + a_3\xi_3)^2 + (b_2\xi_2 + b_3\xi_3)^2\right)^2,$$

то, как нетрудно видеть, система (1) является эллиптической тогда и только тогда, когда выполняется условие $a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0$, которое в дальнейшем предполагаем выполненным.

Задача Римана – Гильберта для системы (1) состоит в нахождении решения этой системы, непрерывно дифференцируемого в области Ω и непрерывного по Гельдеру на $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, удовлетворяющего на $\partial\Omega$ граничным условиям

$$\mathfrak{B}(y)U(y) = f(y) \quad (y \in \partial\Omega)\,, \tag{2}$$

где $\mathfrak{B}$ – заданная матрица-функция размера 2×4, а f – заданная двухкомпонентная вектор-функция, непрерывная по Гельдеру на поверхности $\partial\Omega$.

Существование и единственность решения краевой задачи для эллиптической системы при произвольной правой части оказывается достаточно редким явлением. В этом случае рассматривается вопрос о разрешимости задачи с точностью до конечномерного пространства, т. е. вопрос о том, когда решение существует при наложении конечного числа условий на правую часть задачи и при этом решение зависит от конечного числа произвольных постоянных. Классическим примером такой ситуации является задача Неймана для уравнения Лапласа в ограниченной области Ω, рассматриваемая в учебной дисциплине «Уравнения математической физики»:

$$\Delta u = 0 \ (x \in \Omega), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = g(y) \ (y \in \partial\Omega).$$

Для существования решения задачи Неймана необходимо и достаточно, чтобы для функции g было выполнено условие

$$\int\limits_{\partial\Omega} g(x)dS(x) = 0,$$

при выполнении этого условия решение определено с точностью до одного постоянного слагаемого.

Для эллиптических систем Я. Б. Лопатинским было получено условие, обеспечивающее разрешимость краевой задачи с точностью до конечномерного пространства [1]. Это условие известно как условие Я. Б. Лопатинского (условие регуляризуемости краевой задачи) и представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора. Применительно к задаче (1), (2), условие регуляризуемости состоит в том, что ранг матрицы

$$\mathfrak{B}(y) \cdot \int\limits_{\gamma} \mathfrak{A}^{-1} \left(\lambda\nu(y) + \tau(y)\right) d\lambda \tag{3}$$

равен двум в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом ненулевом касательном к $\partial\Omega$ в точке y векторе $\tau = \tau(y)$. Здесь через $\nu = \nu(y)$ обозначен единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке y, и интегрирование в (3) ведется по простому замкнутому контуру γ, лежащему в верхней комплексной λ-полуплоскости и охватывающему корень $\alpha + i\beta$ ($\beta > 0$) уравнения

$$\det \mathfrak{A} \left(\lambda\nu(y) + \tau(y)\right) = 0.$$

На поверхности $\partial\Omega$ рассмотрим векторное поле

$$L(y) = (L_1(y), L_2(y), L_3(y)),$$

где

$$L_1(y) = \Lambda_{14} + \Lambda_{23}, \quad L_2(y) = a_2 \left(-\Lambda_{13} + \Lambda_{24}\right) + b_2 \left(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}\right),$$

$$L_3(y) = a_3 \left(-\Lambda_{13} + \Lambda_{24}\right) + b_3 \left(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}\right),$$

Λ_{jk} – минор матрицы граничного оператора $\mathfrak{B}(y)$, составленный из ее j-го и k-го столбцов ($j, k = 1, 2, 3, 4$).

Теорема 1. [2] *Задача* (1), (2) *регуляризуема тогда и только тогда, когда в каждой точке $y \in \partial\Omega$ векторное поле $L(y)$ не является касательным к поверхности $\partial\Omega$.*

Из теоремы 1, например, следует, что в случае постоянной матрицы граничного условия (2) рассматриваемая задача Римана – Гильберта является нерегуляризуемой.

Условие регуляризуемости краевой задачи Римана – Гильберта в виде, сформулированном в теореме 1, было ранее получено для системы Моисила – Теодореску [3], для трехмерных аналогов системы Коши – Римана [4], для эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbb{R}^3$ [5].

При выполнении условия регуляризуемости однородная задача Римана – Гильберта (1), (2) имеет конечное число n линейно независимых решений, а неоднородная задача (1), (2) имеет решение тогда и только тогда, когда правая часть (2) удовлетворяет конечному числу m линейно независимых условий разрешимости. Разность $n-m$ называется индексом краевой задачи (1), (2).

Отметим также, что метод В. И. Шевченко, примененный им для вычисления индекса регуляризуемой задачи Римана – Гильберта для голоморфного вектора [3], был с успехом применен к вычислению индекса регуляризуемой задачи для других классов систем [4–6].

Теорема 2. [2] *Индекс произвольной регуляризуемой задачи Римана – Гильберта* (1)*,* (2) *равен минус единице.*

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи математичеких наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.

2. Басик, А. И. Классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для одного класса эллиптических систем в трехмерном пространстве / А. И. Басик. Е. В. Грицук, О. В. Болтрушко // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2024. – № 2 – С. 100–111.

3. Швченко, В. И. Гомотопическая классификация задач Римана – Гильберта для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Математическая физика: респ. межвед. сб. – Киев, 1975. – Вып. 17. – С. 184–186.

4. Усс, А. Т. Краевая задача Римана – Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 6 – С. 10–15.

5. Басик, А. И. Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для одного класса эллиптических систем в $\mathbb{R}^3$ / А. И. Басик, Е. В. Грицук // Математика. Інформаційні технології : зб. ст. – Луцьк, 2019. – № 6. – С. 12–18.

6. Басик, А. И. Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbb{R}^3$ / А. И. Басик. Е. В. Грицук, Т. А. Грицук // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 7–16.