О. В. МАТЫСИК, Н. А. ДЕРАЧИЦ
БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

ОСТАНОВ ПО НЕВЯЗКЕ В НЕЯВНОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЕ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

В действительным гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряжённым оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Для решения уравнения (1) предлагается неявная итерационная процедура

$$(E+\alpha A^3)x_{n+1} = x_n + \alpha A^2 y, \;\; x_0 = 0. \tag{2}$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближённой правой части y_δ, $\|y-y_\delta\|\le\delta$. В этом случае метод (2) примет вид

$$(E+\alpha A^3)x_{n+1,\delta}=x_{n,\delta}+\alpha A^2 y_\delta,\ \ x_{0,\delta}=0. \qquad (3)$$

Ниже под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ, т. е. $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_n\|x-x_{n,\delta}\|\right)=0$.

Для метода (3) при условии $\alpha>0$ доказана сходимость при точной и приближённой правой части уравнения (1), и в предположении, что точное решение уравнения истокообразно представимо, т. е. $x=A^s z$, $s>0$ получена априорная оценка погрешности [1]. Эта оценка погрешности оптимизирована и найден априорный момент останова. В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, метод (3) становится неэффективным, так как тогда невозможно получить оценку погрешности и найти априорный момент останова.

Тем не менее, этот метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке, аналогичным [2–3]. Зададим уровень останова $\varepsilon>0$ и определим момент m останова условиями

$$\|Ax_{n,\delta}-y_\delta\|>\varepsilon,\ (n<m),\ \|Ax_{m,\delta}-y_\delta\|\le\varepsilon,\ \varepsilon=b\delta,\ b>1. \qquad (4)$$

Предполагается, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\|Ax_{0,\delta}-y_\delta\|>\varepsilon$. Ниже метод итерации (3) с правилом останова (4) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_m\|x-x_{m,\delta}\|\right)=0$. Покажем, что правило останова по невязке (4) применимо к методу (3).

Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\dfrac{1}{\left(1+\alpha\lambda^3\right)^n}\right]\ge 0$. Используя результаты [1], нетрудно показать, что при $\alpha>0$ для $g_n(\lambda)$ выполняются следующие условия

$$\sup_{0\le\lambda\le M}|g_n(\lambda)|\le 3(n\alpha)^{1/3},\ n>0,$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}|1-\lambda g_n(\lambda)|\le 1,\ n>0,$$

$$1-\lambda g_n(\lambda)\to 0,\ \ n\to\infty,\ \ \forall\lambda\in(0,M],$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda^s|1-\lambda g_n(\lambda)|\le\left(\frac{s}{6n\alpha}\right)^{s/3},\ n>0,\ \ 0\le s<\infty.$$

Справедливы

Лемма 1. *Пусть* $A=A^*\ge 0$, $\|A\|\le M$. *Тогда для любого* $\omega\in H$ $\left(E-Ag_n(A)\right)\omega\to 0, n\to\infty$.

Лемма 2. *Пусть* $A=A^*\ge 0$, $\|A\|\le M$. *Тогда для* $\forall\upsilon\in\overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^{s/3}\|A^s(E-Ag_n(A))v\|\to 0,\ n\to\infty,\ 0\le s<\infty$.

Лемма 3. *Пусть* $A=A^*\ge 0$, $\|A\|\le M$. *Если для некоторой последовательности* $n_p<\overline{n}=const$ *и* $v_0\in\overline{R(A)}$ *при* $p\to\infty$ *имеем* $\omega_p=A\left(E-Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0\to 0$, *то* $\upsilon_p=\left(E-Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0\to 0$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $A=A^*\ge 0$, $\|A\|\le M$ *и пусть момент останова* $m=m(\delta)$ *в методе* (3) *выбирается по правилу* (4). *Тогда метод* (3) *сходится.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и пусть* $x = A^s z$, $s > 0$. *Тогда справедливы оценки* $m(\delta) \le 1 + \frac{s+1}{6\alpha}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{3}{s+1}}$.

$$\left\|x_{m(\delta),\delta} - x\right\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 3\alpha^{1/3}\left\{1 + \frac{s+1}{6\alpha}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{3}{s+1}}\right\}^{1/3} \delta. \quad (5)$$

Доказательство лемм 1–3 и теорем 1–2 аналогично доказательству подобных из [2].

Замечание 1. *Порядок оценки* (5) *есть* $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$ *и, как следует из* [3], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

Замечание 2. *Используемое в формулировке теоремы* 2 *предположение порядка* $s > 0$ *истокопредставимости точного решения не потребуется на практике, так как оно не содержится в правиле останова* (4). *И тем не менее в теореме* 2 *утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m, обеспечивающих оптимальный порядок погрешности. Но даже, если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке* (4), *как показывает теорема* 1, *обеспечивает сходимость итерационного метода, т. е. его регуляризующие свойства.*

Литература

1. Матысик, О. В. Априорный выбор числа итераций в итерационной процедуре неявного типа решения линейных / О. В. Матысик, Н. А. Дерачиц // Вестник Брестского технического университета. – 2010. – № 5. – С. 68–71.

2. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : изд-во БрГУ им. А. С. Пушкина, 2008. – 196 с.

3. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.