МЕТОД ИТЕРАЦИИ РЕШЕНИЯ НЕКОРРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С АПРИОРНЫМ ВЫБОРОМ ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ

С.Н. Наумовец, О.В. Матысик
(БрГТУ, Брест)

В действительном гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение $Ax = y_\delta$, где A – ограниченный, положительный, самосопряжённый оператор, для которого нуль не является собственным значением. Пусть $0 \in S_A$, т. е. рассматриваемая задача некорректна. Здесь $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Предположим, что при точной правой части y существует единственное решение x уравнения $Ax = y_\delta$. Для его отыскания применим явный метод

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta - \alpha^2 A y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0.$$

Здесь E – тождественный оператор. Ниже, под сходимостью метода итераций (1) понимается утверждение о том, что приближения (1) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения $Ax = y_\delta$ при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Иными словами, метод (1) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta \to 0}(\inf\limits_n \|x - x_{n,\delta}\|) = 0$.

Справедливы

***Теорема* 1.** *При условии* $0 < \alpha < 2/\|A\|$ *итерационный процесс* (1) *сходится, если выбирать число итераций n в зависимости от* δ *так, чтобы* $n\delta \to 0, \quad n \to \infty, \quad \delta \to 0$

***Теорема* 2.** *Если точное решение x уравнения* $Ax = y_\delta$ *истокообразно представимо, т. е.* $x = A^s z$, $s > 0$, *то при условии* $0 < \alpha \le 5(4\|A\|)^{-1}$ *для метода последовательных приближений* (1) *справедлива оценка погрешности* $\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s (2n\alpha e)^{-s}\|z\| + 2n\alpha\delta$.

***Теорема* 3.** *Если точное решение x уравнения* $Ax = y_\delta$ *истокообразно представимо, то при условии* $0 < \alpha \le 5(4\|A\|)^{-1}$ *оптимальная оценка погрешности для явного итерационного процесса* (1) *имеет вид* $\|x - x_{n,\delta}\|_{опт} \le (s+1)e^{-s/(s+1)}\delta^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}$ *и достигается при* $n_{опт} = s(2\alpha)^{-1} e^{-s/(s+1)} \delta^{-1/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}$.

Поэтому для уменьшения объёма вычислительной работы, следует брать α по возможности большим из условия $0 < \alpha \le 5(4\|A\|)^{-1}$ и так, чтобы $n_{опт} \in Z$.