ВОЛНОВОЙ СМЫСЛ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

П.Н. Луцюк
(*БрГТУ, Брест*)

Амплитудно-фазовые частотные характеристики используются при анализе динамических свойств систем автоматического регулирования. Область применения преобразования Фурье гораздо уже, чем у преобразования Лапласа, но с точки зрения физики преобразование Фурье более естественно.

Прямые и обратные преобразования Фурье соответственно определяются формулами:

$$Vf(t)=F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\,, \qquad V^{1}F(\omega)=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega\,;$$

причем рассматриваются непериодические, абсолютно интегрируемые функции $f(t)$, заданные на интервале $(0;+\infty)$.Находится преобразование Лапласа $Lf(t)=F(p)$ функции и вводится замена $p=i\omega$. Полученную функцию $F(\omega)$ называют спектральной функцией: $F(\omega)=|F(\omega)|e^{-i\psi(\omega)}=|F(\omega)|e^{i\arg F(\omega)}$, где $|F(\omega)|$ – амплитудно-частотный спектр, $\psi(\omega)=-\arg F(\omega)$ – фазовый спектр.

Рассмотрим пример для синусоидального импульса $f(t)=\sin(t)$ при $t\in(0,\pi)$ и $f(t)=0$ при $t\notin(0;\pi)$, найдем его изображение по Фурье $Vf(t)$:

$$f(t)=\sin t\,\eta(t)-\sin t\,\eta(t-\pi)=\sin t\,\eta(t)+\sin(t-\pi)\eta(t-\pi)\,;$$

$Lf(t)=F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}(1+e^{-\pi p})$, подставим $p=i\omega$, $\omega>0$;

$$F(\omega) = \frac{1}{1-\omega^2}(1 + e^{-i\pi\omega}) = \frac{2}{1-\omega^2}\cos\frac{\pi\omega}{2}e^{-\frac{i\pi\omega}{2}}.$$

Найдем частотные характеристики исследуемой функции и построим их графики(см рис.1 и рис.2):

$$|F(\omega)| = 2\left|\frac{\cos 1/2\,\pi\omega}{1-\omega^2}\right| \qquad \psi(\omega) = \begin{cases} \pi\omega/2, 0 < \omega < 3, \\ \pi\omega/2 - \pi, 3 < \omega < 5, \\ \pi\omega/2 - 2\pi, 5 < \omega < 7, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

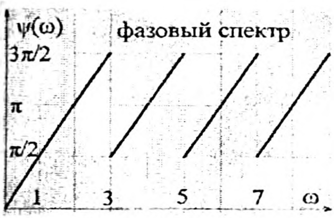

Рисунок 1

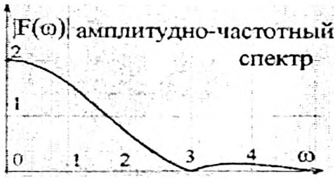

Рисунок 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Араманович, И.Г. Функция комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1968. – 416 с.