ОПЕРАТОРНОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ДУ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ И ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

В.С. Стойко

(БрГТУ, Брест)

В реальных достаточно сложных системах и объектах управления всегда присутствуют элементы запаздывания. Например, время, необходимое для прохождения топлива в двигателе летательного аппарата от регулирующего клапана до зоны горения; время обработки информации в ЭВМ, включённый в контур управления. Привлечение аппарата ДУ с отклоняющимся аргументом является средством более точного описания систем и объектов автоматического управления.

В теории автоматического управления, при расчёте переходных процессов в линейных электрических цепях возникают дифференциальные уравнения (ДУ), в которые неизвестная функция входит при различных значениях аргумента, например:

$$x''(t) = \varphi(t, x(t), x'(t), x(t-\tau_1(t)), x'(t-\tau_1(t))).$$

Если $\tau_i(t) = const > 0$, а старшая производная зависит только от t, то получаем ДУ с запаздывающим аргументом.

Требуется найти решение задачи Коши для ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами с запаздывающим аргументом. Покажем это на примере: $x''(t) = 2x'(t-1) - x(t-2) + 1$, $x(0) = x'(0) = 0$.

После преобразования по Лапласу получаем операторное уравнение $p^2 X(p) = 2e^{-p} pX(p) - e^{-2p} X(p) + \frac{1}{p}$, откуда $X(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{e^{-np}}{p^{n+3}}$, переходим к оригиналам, получаем решение исходной задачи

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!} (t-n)^{n+2}\, \eta(t-n).$$

Для ДУ с запаздывающим аргументом, описывающих процесс с последействием ставится задача: найти решение уравнения $x(t)$ для $t \ge t_0$, причём для всех $t \ge t_0$, для которых значения $x(t)$ влияют на последующие значения при $t \geq 0$, функция $x(t)$ задаётся. С помощью преобразования Лапласа решены некоторые ДУ такого вида.

Например, решена задача: $x'(t) = x(t-1) + t$, $\varphi(t) = 1$, $-1 \leq t \leq 0$.

$$pX(p) - 1 = \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p} + \frac{1}{p^2} + e^{-p} X(p) \Rightarrow$$

$$X(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-np} \left(\frac{1}{p^{n+3}} + \frac{1}{p^{n+2}} \right);$$

$$x(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t-n)^{n+2}}{(n+2)!} \eta\,(t-n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t-n)^{n+1}}{(n+1)!} \eta\,(t-n).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Краснов, М.А. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.А. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1981.