

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

В. Н. Сидоров¹, Д. О. Климушкин²

¹*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), Москва, Россия,
e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com*

²*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), Москва, Россия,
e-mail: d.o.klimushkin@gmail.com*

Реферат

В данной статье в рамках метода конечных элементов предлагается алгоритм, построенный для анализа устойчивости стержневых механических систем под действием динамических нагрузок. Учтены воздействия узловых изгибающих моментов и поперечных сил на общую устойчивость конечно-элементной расчетной модели.

Ключевые слова: устойчивость, метод конечных элементов, стержневая система, стержневой конечный элемент, динамика сооружений, устойчивость при динамическом воздействии.

Введение

При численном решении задач расчета конструкций на динамические воздействия, формулируемых уравнением движения Д'Аламбера, это уравнение, как правило, записывается в удобном для вычислений матричном виде:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\bar{\mathbf{V}}}(t) + \mathbf{D} \cdot \dot{\bar{\mathbf{V}}}(t) + \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{V}}(t) = \bar{\mathbf{F}}(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{K}$ – матрица жёсткости расчётной модели конструкции;

$\mathbf{D}$ – матрица демпфирования расчётной модели;

$\mathbf{M}$ – матрица масс расчётной модели;

$\bar{\mathbf{F}}(t)$ – вектор изменяющихся во времени t внешних силовых воздействий.

Решением уравнения (1) является вектор $\bar{\mathbf{V}}(t)$, содержащий значения перемещений узлов расчётной модели деформируемой конструкции в моменты времени t .

Методология

При анализе устойчивости системы, выполняемом при пошаговом решении уравнения движения $\bar{\mathbf{V}}(t)$, для моментов времени t , условие равновесия Д'Аламбера может быть представлено в следующем виде:

$$(\mathbf{A}_{din} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{V}}(t) = \bar{\mathbf{F}}(t), \quad (2)$$

где $\mathbf{A}_{din}$ – сумма диагональных матриц $\mathbf{A}_{in}$ и $\mathbf{A}_{damp}$, на главных диагоналях которых находятся коэффициенты инерционных и демпфирующих усилий, вычисляемые поэлементным делением векторов внутренних инерционных $(\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{V}})_{[i]}$ и демпфирующих $(\mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{V}})_{[i]}$ сил на вектор упругих сил $(\mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{V}})_{[i]}$:

$$\mathbf{A}_{in} = (\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{V}})_{[i]} : (\mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{V}})_{[i]} = (\bar{\mathbf{S}}_{in})_{[i]} : (\bar{\mathbf{S}}_{el})_{[i]},$$

$$\mathbf{A}_{damp} = (\mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{V}})_{[i]} : (\mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{V}})_{[i]} = (\bar{\mathbf{S}}_{damp})_{[i]} : (\bar{\mathbf{S}}_{el})_{[i]},$$

где знак «:» означает поэлементное деление векторов.

$\mathbf{E}$ – единичная матрица.

Таким образом, уравнения (1) и (2) равнозначны между собой.

Матричная запись обобщенной проблемы собственных значений, к которой сводится каноническое уравнение устойчивости механической системы под действием упругих (потенциальных) сил, имеет вид:

$$\mathbf{K} \cdot \Phi = \mathbf{K}^T \cdot \Phi \cdot \Lambda, \quad (3)$$

где Λ – диагональная матрица критических значений внешней нагрузки, вызывающих потерю устойчивости системы;

Φ – матрица, чьи колонки численно моделируют формы потери устойчивости системы, соответствующие критическим значениям нагрузки.

Далее алгоритм численного расчета стержневых систем на устойчивость рассмотрим в рамках алгоритма метода конечных элементов. При учете динамических (инерционных и демпфирующих) усилий формулировка (3) примет следующий вид:

$$(\mathbf{A}_{din} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{K} \cdot \Phi = \mathbf{K}^T \cdot \Phi \cdot \Lambda, \quad (4)$$

где $\mathbf{K}^T$ – полная матрица геометрической жесткости расчетной модели:

$$\mathbf{K}^T = \mathbf{K}_N^T + \mathbf{K}_M^T + \mathbf{K}_Q^T, \quad (5)$$

где $\mathbf{K}_N^T$ – стандартная матрица геометрической жесткости конечно-элементной расчетной модели [3], учитывающая продольный изгиб теряющих устойчивость стержневых конечных элементов (КЭ), т. е. только под действием продольных сил. Матрица геометрической жесткости одного (i -го)¹ стержневого КЭ, деформируемого в плоскости имеет вид (6) [3], [8]. Этот конечный элемент имеет по три степени свободы в каждом из двух его узлов (две поступательных и одну поворотную). При построении матрицы $\mathbf{K}_i^T$ (6) учитывается энергия, затрачиваемая только продольной силой, и только на продольный изгиб КЭ, и не учитывается вклад в потерю устойчивости узловых изгибающих моментов и поперечных сил.

¹Здесь i – номер конечного элемента в расчетной модели.

$$\mathbf{K}_i^F = \frac{F_i}{30 \cdot l} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 36 & 3 \cdot l & 0 & -36 & 3 \cdot l \\ \hline 0 & 3 \cdot l & 4 \cdot l^2 & 0 & -3 \cdot l & -l^2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -36 & -3 \cdot l & 0 & 36 & -3 \cdot l \\ \hline 0 & 3 \cdot l & -l^2 & 0 & -3 \cdot l & 4 \cdot l^2 \\ \hline \end{array} \quad (6)$$

Суть данной матрицы никак не отличается от используемой при стандартном подходе к анализу устойчивости, за исключением того, что значения продольных усилий F_i являются суммой упругих, инерционных и диссипативных внутренних сил:

$$F_i = F_i^{el} + F_i^{damp} + F_i^{in}, \quad (7)$$

где $\mathbf{K}_M^F$ – матрица геометрической жесткости стержневого КЭ, реализующая вклад изгибающих моментов M в потерю устойчивости;

$\mathbf{K}_Q^F$ – матрица геометрической жесткости КЭ, реализующая вклад поперечных сил Q в потерю устойчивости.

Вывод матриц $\mathbf{K}_{Mi}^F$ и $\mathbf{K}_{Qi}^F$ для стержневого (i -го) КЭ приведен ниже.

Результаты

Вывод матриц геометрической жесткости вклада изгибающих моментов и поперечных сил

Вклад моментов и поперечных сил в потерю устойчивости стержневого КЭ определяем из условия стационарности выражения энергии $\mathcal{E}_i$ (8), которую тратят эти силы при деформировании стержневого элемента (см. рисунок 1).

$$\mathcal{E}_i(v) = \int_l \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 v}{dz^2} EJ \frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{1}{2} \cdot N_i \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 - Q_i \cdot \gamma(v) - M_i \cdot \varphi(v) \right) dz. \quad (8)$$

Стоит отметить, что в (8) N_i , Q_i и M_i – внешние силы, воздействующие на стержневой КЭ через его узлы.

Вывод матрицы геометрической жесткости КЭ при действии изгибающих моментов

Энергия, затрачиваемая изгибающим моментом M при деформировании стержня, определяется значением момента и углом искривления $d\varphi$ вдоль оси Oz предельно малого фрагмента стержня dz (см. рисунок 2).

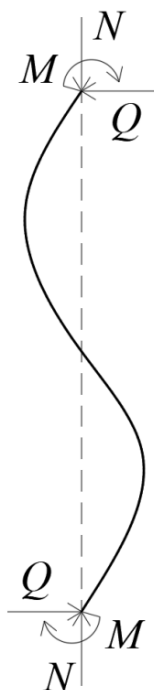


Рисунок 1 – Деформированная схема стержневого КЭ

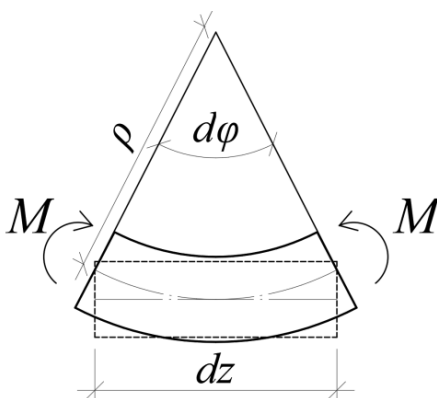


Рисунок 2 – Деформирование предельно малого фрагмента dz стержневого КЭ под действием изгибающего момента M

$$d\Pi = M \cdot d\varphi, \quad d\varphi = \frac{dz}{\rho}, \quad \frac{1}{\rho} = \vartheta \approx \frac{d^2v}{dz^2}; \quad (9)$$

$$d\Pi = M \cdot \frac{d^2v}{dz^2} dz, \quad (10)$$

где

$d\Pi$ – энергия, затрачиваемая изгибающим моментом M на изгиб фрагмента dz ;

$v(z)$ – функция прогибов КЭ;

$\vartheta(z)$ – кривизна фрагмента стержневого элемента dz .

Тогда энергия, затрачиваемая внешними изгибающими моментами при деформировании всего КЭ длиной l , составляет:

$$\Pi = \int_l M \cdot \frac{d^2 v}{dz^2} dz. \quad (11)$$

Заменим в (11) функцию прогибов $v(z)$ её приближением $\tilde{v}_i(\xi)$, восполняющим узловые значения прогибов по длине КЭ. Согласно алгоритму метода конечных элементов (МКЭ) [3], функция восполнения $\tilde{v}_i(\xi)$ изменяется внутри элемента уже по локальной нормированной ординате ξ , поэтому выполним в (11) замену переменной z на ξ :

$$z = \xi \cdot l. \quad (11a)$$

Тогда (11) примет вид:

$$\Pi = \int_0^1 M(\xi) \cdot \frac{\frac{d^2 v}{d\xi^2}}{\frac{d^2 \xi}{d\xi^2}} l \cdot \frac{d\xi}{d\xi} d\xi. \quad (12)$$

Изгибающий момент в свою очередь вычисляется по формуле

$$M(\xi) = EJ \cdot \vartheta. \quad (13)$$

С учетом (13) и (9) выражение (12) принимает вид:

$$\Pi = \int_0^1 EJ \frac{\frac{d^2 v}{d\xi^2}}{\frac{d^2 \xi}{d\xi^2}} \cdot \frac{\frac{d^2 v}{d\xi^2}}{\frac{d^2 \xi}{d\xi^2}} l \cdot \frac{d\xi}{d\xi} d\xi. \quad (14)$$

Вывод матрицы геометрической жесткости стержневого элемента при сопротивлении изгибающим моментам K_{Mi}^r становится аналогичным построению матрицы жесткости стержневого элемента модели Бернулли – Эйлера [3], с тем отличием, что изгибающие моменты здесь являются внешними, передающимися на КЭ через его узлы. Таким образом, матрица K_{Mi}^r примет вид:

$$K_{Mi}^r = \frac{4 \cdot EJ}{l^3} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 3 \cdot l & -6 & 3 \cdot l \\ \hline 3 \cdot l & 2 \cdot l^2 & -3 \cdot l & l^2 \\ \hline -6 & -3 \cdot l & 6 & -3 \cdot l \\ \hline 3 \cdot l & l^2 & -3 \cdot l & 2 \cdot l^2 \\ \hline \end{array} \quad (15)$$

В (15) опущены нулевые строки и столбцы (с номерами 1 и 4), соответствующие степеням свободы двух узлов стержневого КЭ, направленных вдоль его оси.

Вывод матрицы геометрической жесткости КЭ при действии поперечных сил

Энергия, затрачиваемая поперечной силой Q при деформировании предельно малого фрагмента стержня dz , определяется значением силы и углом сдвига γ :

$$d\Pi = Q \cdot \gamma \cdot dz, \quad \gamma = \frac{\alpha}{GA} Q, \quad (16)$$

$$d\Pi = \frac{\alpha}{GA} \cdot Q \cdot Q \cdot dz, \quad (17)$$

где α – коэффициент, учитывающий форму поперечного сечения КЭ [1].

Тогда энергия, затраченная внешними поперечными силами по всему КЭ, составит

$$\Pi = \int_l \frac{\alpha}{GA} \cdot Q \cdot Q \cdot dz. \quad (18)$$

По аналогии с уже проделанной нами операцией выше заменим в (18) функцию прогибов $v(z)$ её приближением $\tilde{v}_i(\xi)$ с заменой переменной (11а).

Тогда (18) примет вид

$$\Pi = \int_0^1 \frac{\alpha}{GA} \cdot \tilde{Q}(\xi) \cdot \tilde{Q}(\xi) \cdot l \cdot \frac{d\xi}{d\xi} \cdot d\xi. \quad (19)$$

Допуская, что поперечная сила изменяется от узла к узлу вдоль КЭ по линейному закону, применяем к ее восполнению линейную функцию формы:

$$\tilde{Q}(\xi) = [N_1] \cdot \bar{Q}_i; \quad (20)$$

$$\tilde{Q}(\xi) = \begin{bmatrix} 1-\xi & \xi \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_l \\ Q_n \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Поперечные силы для левого и правого узла КЭ определяются скалярным перемножением 2-й и 5-й строк матрицы жесткости конечного элемента на вектор его узловых перемещений:

$$\begin{pmatrix} Q_l \\ Q_n \end{pmatrix} = K_{c\partial\partial}^6 \cdot \bar{v}_i^6, \quad (22)$$

где $K_{c\partial\partial}^6$ – матрица жесткости КЭ, в которой все строки кроме 2-й и 5-й нулевые.

$$K_{c\partial\partial}^6 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & \frac{12 \cdot EJ}{l^3} & \frac{6 \cdot EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12 \cdot EJ}{l^3} & \frac{6 \cdot EJ}{l^2} \\ \hline 0 & -\frac{12 \cdot EJ}{l^3} & -\frac{6 \cdot EJ}{l^2} & 0 & \frac{12 \cdot EJ}{l^3} & -\frac{6 \cdot EJ}{l^2} \\ \hline \end{array} \quad (23)$$

Опустим далее для удобства нулевые столбцы матрицы $K_{c\partial\partial}^6$ (23). Получим (23а) [3].

$$\mathbf{K}_{\text{сдв}}^e = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \frac{12 \cdot EJ}{l^3} & \frac{6 \cdot EJ}{l^2} & -\frac{12 \cdot EJ}{l^3} & \frac{6 \cdot EJ}{l^2} \\ \hline -\frac{12 \cdot EJ}{l^3} & -\frac{6 \cdot EJ}{l^2} & \frac{12 \cdot EJ}{l^3} & -\frac{6 \cdot EJ}{l^2} \\ \hline \end{array} \quad (23a)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_i^e = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{v}_0 \\ \varphi_0 \\ \mathbf{u}_l \\ \mathbf{v}_l \\ \varphi_l \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Соответственно исключим 1-ю и 4-ю строки и в векторе $\bar{\mathbf{v}}_i^e$ (24a).

$$\bar{\mathbf{v}}_i^e = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \varphi_0 \\ \mathbf{v}_l \\ \varphi_l \end{pmatrix} \quad (24a)$$

$$\tilde{Q}(\xi) = \frac{6 \cdot EJ}{l^3} \begin{array}{|c|c|} \hline 1-\xi & \xi \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & l & -2 & l \\ \hline -2 & -l & 2 & -l \\ \hline \end{array} \cdot \bar{\mathbf{v}}_i^e \quad (25)$$

или

$$\tilde{Q}(\xi) = \frac{6 \cdot EJ}{l^3} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & L_Q & & \\ \hline 2-4 \cdot \xi & l-2 \cdot l \cdot \xi & -2+4 \cdot \xi & l-2 \cdot \xi \cdot l \\ \hline \end{array} \cdot \bar{\mathbf{v}}_i^e. \quad (26)$$

Для дальнейшего упрощения формул введем параметр сдвиговой жесткости стержневого КЭ k_Q :

$$k_Q = \frac{\alpha \cdot 6 \cdot EJ}{l^3 \cdot GA} = \frac{12 \cdot \alpha \cdot (1+\nu)}{l^3} \cdot \frac{J}{A}, \quad (27)$$

$$\Pi = \int_0^1 \frac{6 \cdot EJ}{l^3} \cdot L_Q \cdot \bar{\mathbf{v}}_i^e \cdot k_Q \cdot L_Q \cdot \bar{\mathbf{v}}_i^e \cdot l \cdot \frac{d\xi}{d\xi} d\xi. \quad (28)$$

При постоянных размерах поперечного сечения и жесткости материала по длине стержня мы можем вынести параметры, описывающие жесткостные характеристики стержневого элемента за знак интеграла:

$$\Pi = \frac{6 \cdot EJ}{l^3} \cdot k_Q \int_0^1 L_Q \cdot \bar{\mathbf{v}}_i^e \cdot L_Q \cdot \bar{\mathbf{v}}_i^e \cdot l \cdot d\xi \quad (29)$$

или

$$\Pi = k \int_0^1 L_Q \cdot \bar{\mathbf{v}}_i^e \cdot L_Q \cdot \bar{\mathbf{v}}_i^e \cdot l \cdot d\xi, \quad (29a)$$

где $k = \frac{6 \cdot EJ}{l^3} \cdot k_Q$. (30)

Тогда матрица геометрической жесткости для поперечных сил будет формироваться следующим образом:

$$\mathbf{K}_{Qi}^\Gamma = k \int_0^1 L_Q^T \cdot L_Q \cdot l \cdot d\xi; \quad (31)$$

$$\mathbf{K}_{Qi}^\Gamma = k \int_0^1 \begin{matrix} L_Q^T \\ \begin{bmatrix} 2-4\cdot\xi \\ l-2\cdot l\cdot\xi \\ -2+4\cdot\xi \\ l-2\cdot l\cdot\xi \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} L_Q \\ \begin{bmatrix} 2-4\cdot\xi & l-2\cdot l\cdot\xi & -2+4\cdot\xi & l-2\cdot l\cdot\xi \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot l \, d\xi. \quad (32)$$

В результате интегрирования произведения векторов L_Q^T и L_Q (32) с участием k получим матрицу геометрической жесткости для поперечных сил:

$$\mathbf{K}_{Qi}^\Gamma = \frac{24 \cdot \alpha \cdot EJ^2}{l^5 \cdot A} \begin{bmatrix} 4 & 2 \cdot l & -4 & 2 \cdot l \\ 2 \cdot l & l^2 & -2 \cdot l & l^2 \\ -4 & -2 \cdot l & 4 & -2 \cdot l \\ 2 \cdot l & l^2 & -2 \cdot l & l^2 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Заключение

Теперь мы имеем все исходные матрицы, построенные для стержневого КЭ, чтобы в соответствии с алгоритмом метода конечных элементов сформировать глобальные матрицы всей расчетной модели, участвующие в модифицированной формулировке проблемы собственных значений:

$$(\mathbf{A}_{din} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{K} \cdot \Phi = \mathbf{K}^r \cdot \Phi \cdot \Lambda; \quad (34)$$

$$(\mathbf{A}_{in} + \mathbf{A}_{damp} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{K} \cdot \Phi = (\mathbf{K}_N^r + \mathbf{K}_M^r + \mathbf{K}_Q^r) \cdot \Phi \cdot \Lambda. \quad (34a)$$

Постановка задачи устойчивости (4а) дает возможность, в том числе, численно исследовать влияние диссипативных сил на устойчивость равновесия механических систем на основе теорем, обоснованных лордом Кельвином [5].

Обсуждение

Следует отметить, что участие в (4), (4а) параметра $\mathbf{A}_{din}$ и матриц, учитывающих вклад узловых моментов и поперечных сил ($\mathbf{K}_M^r$ и $\mathbf{K}_Q^r$), не взаимоувязаны между собой. Другими словами, динамический характер нагрузки, моделируемый параметром $\mathbf{A}_{din}$, можно задавать и без учета вклада узловых изгибающих моментов и поперечных сил в потерю устойчивости стержневых элементов. И наоборот, матрицы вклада узловых изгибающих моментов и поперечных сил возможно использовать для анализа устойчивости механических систем и под действием только статических нагрузок (при отсутствии инерционных и диссипативных сил).

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 25-11-00140).

Список использованных источников

1. Тимошенко, С. П. Механика материалов / С. П. Тимошенко, Дж. Гере. – М. : Мир. 1976. – 669 с.
2. Bathe, K. J. Numerical methods in finite element analysis / K. J. Bathe, E. L. Wilson. – Saddle River : Prentice-Hall Inc., 1976.
3. Сидоров, В. Н. Метод конечных элементов в задачах устойчивости и колебаний стержневых конструкций. Примеры расчётов в Mathcad и MATLAB. Учебное пособие / В. Н. Сидоров, Е. С. Бадина. – М. : Издательство АСВ, 2021. – 173 с.
4. Сидоров, В. Н. Модификация функции диссипации Рэлея для численного моделирования внутреннего демпфирования в стержневых конструкциях / В. Н. Сидоров, Е. С. Бадина, Д. О. Климушкин // Вестник МГСУ. – Т. 19, № 6. – 2024. – С. 960–970.
5. Алфутов, Н. А. Устойчивость движения и равновесия / Н. А. Алфутов, К. С. Колесников. – М. : Издательство МГТУ имени Н.Э.Баумана, 2003. – 255 с.
6. Золотов, А. Б. Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические методы / А. Б. Золотов, П. А. Акимов. – М. : Издательство АСВ, 2006.
7. Строительная механика: Статика упругих систем : учебник для вузов / В. Д. Потапов, А. В. Александров, С. Б. Косицын, Д. Б. Долотказин. – М. : Высшая школа, 2007. – 511 с.
8. Гайджуров, П. П. Расчет стержневых систем на устойчивость и колебания / П. П. Гайджуров. – Новочеркасск : ЮРГТУ, 2009.
9. Сидоров, В. Н. Соппротивление материалов / В. Н. Сидоров. – М. : Издательство «Архитектура-С», 2013.
10. Иванченко, И. И. Динамика мостов. Высокоскоростные подвижные, аэродинамические и сейсмические нагрузки / И. И. Иванченко. – М. : Наука, 2021. – 528 с.