

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ РАСПОЛАГАЕМЫХ НА РАЗЛИЧНЫХ ОСНОВАНИЯХ НА ОСНОВЕ ТРАНСФОРМИРОВАННОЙ ДИАГРАММЫ СДВИГА БЕТОНА

В бетонных подстилающих слоях полов помещений, при эксплуатации которых возможны резкие перепады температур, изменение влажностных условий, предусматривают устройство деформационных швов конструктивно, исходя из рекомендаций СНиП. При проектировании бетонных слоев полов СНиП 2.03.13-88 [1] устанавливает только два их параметра – толщину и класс бетона по прочности на сжатие. Какая-либо методика по расчету таких конструкций, учитывающая процессы температурных воздействий, усадки, протекающих в бетоне в период твердения, при взаимодействии проектируемого слоя с основанием отсутствует.

Проблема расчета напряженно-деформированного состояния монолитных бетонных полов, покрытий дорог, аэродромных бетонных покрытий (и, как следствие, место устройство деформационных швов) может быть решена на основе известного дифференциального уравнения, построенного с учетом трансформированной диаграммы сдвига бетона по основанию.

В настоящее время одной из сфер применения монолитных плит является использование их в качестве различного рода покрытий. Это покрытия полов производственных зданий, операционных помещений больниц, монолитные железобетонные покрытия автомобильных дорог и аэродромов. Однако на сегодняшний день приемлемых методов расчета таких плит, в том числе и на усадочные воздействия, не существует. Поэтому решение данного вопроса представляет большой интерес для проектировщиков и заказчиков.

Упомянутые выше монолитные плиты часто имеют большие площади или, что характерно для дорог, большую протяженность. Вследствие развития процесса усадки бетона существует большой риск возникновения растягивающих напряжений, которые могут приводить к появлению усадочных трещин еще до момента воздействия эксплуатационных нагрузок.

Эксплуатация дорожных или аэродромных покрытий происходит на открытом воздухе при постоянных воздействиях атмосферной влаги и перепадов температур. В таких условиях усадочные трещины приведут к существенному сокращению срока службы покрытий. Воздействиям агрессивных сред и интенсивных нагрузок подвержены и полы производственных цехов.

Таким образом, недопущение образования трещин от усадочных воздействий в указанных конструкциях ни на стадии их изготовления, ни в процессе всего срока эксплуатации, подталкивает инженеров и ученых к совершенствованию методов расчета данных конструкций с учетом процесса усадки бетона.

В данной работе рассмотрено современное состояние вопроса, представлена аналитическая модель развития деформаций усадки в плитных конструкциях, определены параметры этой модели, и выполнено исследование опытных образцов плит.

На сегодняшний день нормативным документом, регламентирующим проектирование полов производственных, жилых, общественных, административных и бытовых зданий является СНиП 2.03.13-88 [1].

При проектировании бетонных слоев полов нормы [1] устанавливают только два основных параметра – толщину плиты и класс бетона по прочности на сжатие. Методика расчета таких конструкций, учитывающая процессы температурных воздействий, усадки, протекающих в бетоне в период твердения, при взаимодействии проектируемого слоя с основанием отсутствует. По этой причине при проектировании монолитных плит, взаимодействующих с основанием, для исключения влияния на напряженно-деформированное состояние со стороны основания, применяют скользящий слой, а для борьбы с усадочными явлениями применяют арматурные сетки, которые располагают по середине высоты слоя (коэффициент армирования составляет 0,15–0,20%). При отказе от использования скользящего слоя монолитную плиту выполняют массивной (толщина 150–200 мм).

Ввиду того, что устранить усадку бетона, изготовленного из традиционных цементов, практически невозможно, и нельзя избежать колебаний температуры на площадках, то наилучшее решение – дать трещине возможность появиться в том месте, где ее появление желательно и, кроме того, в виде прямой линии. Такая линия и есть деформационный шов. В практике, как правило, назначают место будущей трещины волюнтаристским путем. Суть проблемы в точном определении (расчете) будущего места дислокации искусственной трещины.

Исследование напряженно-деформированного состояния бетона при развитии усадки продолжается уже не одно десятилетие. Этому вопросу посвящен целый ряд работ [2–9], причем в работах [4, 5] рассмотрены плиты покрытий различного назначения. В ряде случаев расчетные модели на воздействие усадки в конструкциях строятся на основе применения аналогии от температурного воздействия на конструкцию, так как механизм деформаций, возникающих в конструкциях от усадки и от температуры, во многом схож.

Широкие исследования по изучению влияния усадочных и температурных воздействий на плиту, находящуюся во взаимодействии с основанием, представлены в работе [5]. Здесь вид оснований варьировался от песчаного простого и песчаного с устроенным поверх полиэтиленовым покрытием до гравелистого и гравелистого с полиэтиленовым покрытием. В работе получены решения, использующие уравнения упругого деформирования конструкции. Напряжения в плите рассчитывались из условия, что тело конструкции считалось сформировавшимся. Таким образом, применялся традиционный метод расчета подобных задач.

В работе [5], приведено математическое описание поведения плиты, претерпевающей усадочные деформации в условиях ограничения усадки со стороны основания.

При этом были приняты следующие допущения:

- бетон ведет себя как абсолютно упругий материал;
- усадочные деформации имеют постоянный закон распределения по всей длине плиты;
- вертикальные деформации (выгибы) и ползучесть бетона не рассматриваются;
- деформации имеют постоянный закон распределения по высоте сечения конструкции.

Так как конструкция симметрична, то процессы моделируются только на одной половине плиты. Касательные напряжения, действующие на поверхности плиты, выражаются следующим образом:

$$\tau_{\max} = \frac{\tau_0}{\delta_0} \cdot |u|, \text{ для } 0 \leq |u| \leq \delta_0; \quad (1.1)$$

$$\tau_{\max} = \tau_0, \text{ для } |u| > \delta_0; \quad (1.2)$$

где: u – перемещение плиты относительно основания в любой взятой координате x .

Перемещение u находится из условия:

$$u(x) = u_\varepsilon(x) + u_c(x), \quad (1.3)$$

где: $u_{\varepsilon}(x)$ – перемещение, вызванное усадкой бетона;
 $u_{\varepsilon}(x)$ – перемещение, являющееся результатом внутреннего осевого напряжения от приложения внешней нагрузки;
 τ_0 – касательное напряжение;

δ_0 – перемещение, соответствующее касательному напряжению τ_0 .

Характеристика « $\tau_0 - \delta_0$ » является характеристикой контакта сдвигаемых материалов и принимается в зависимости от вида основания. Параметрические точки « $\tau_0 - \delta_0$ » были определены экспериментальными исследованиями [6, 7, 8, 9] сдвига образцов плит по различным видам оснований (табл. 1) На рис. 1 представлена аппроксимация кривой « $\tau_0 - \delta_0$ » принятая для математической модели в

Таблица 1

Характеристики « $\tau_{\max} - \delta_0$ » для 7 различных типов оснований

Тип основания	$\tau_{\max}$, МПа	δ_0 , мм
Цемент	0,106	0,025
Необработанный стабилизированный щебень (размером 32 мм)	0,104	0,25
Зернистое основание (гравий, песок, мелкий щебень)	0,023	0,50
Асфальтобетон	0,021	0,60
Асфальт	0,015	1,00
Глиняное основание, укрепленное известью	0,012	0,30
Обыкновенная глина	0,008	1,30

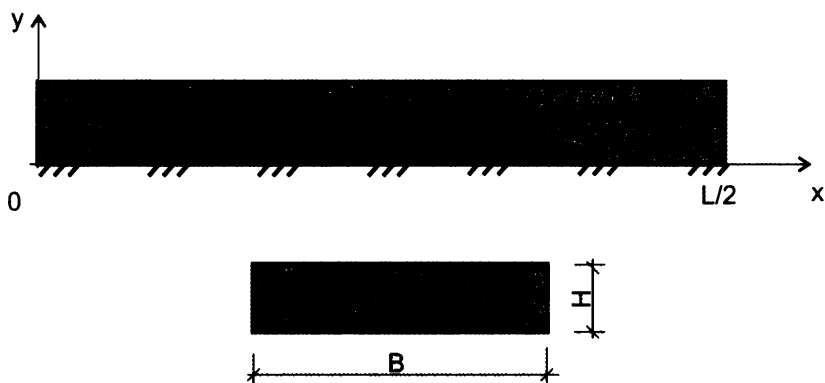


Рис. 1. Расчетная схема бетонной плиты [5]

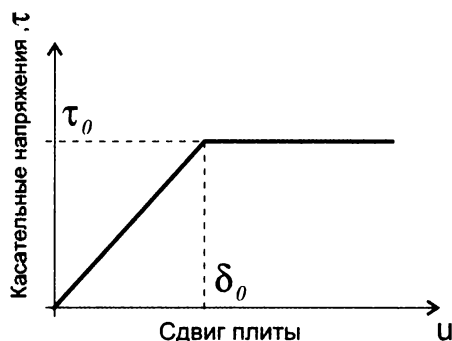


Рис. 2. Аппроксимированная зависимость « $\tau_0 - \delta_0$ », принятая в [5]

работе [5].

Исходя, из вышеизложенных предположений и допущений уравнение равновесия для участка плиты длиной dx записывалось как:

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial x} - \frac{\tau}{H} = 0 \quad (1.4)$$

С учетом того что $\sigma_c = E_{c,t} \cdot \varepsilon_{c,t}$, а $\varepsilon_{c,t} = \frac{du}{dx}$,

$$\frac{d\sigma_c}{dx} = E_{c,t} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} \quad (1.5)$$

Дифференциальное уравнение, описывающее деформацию в плите от действия усадки и внешней нагрузки, согласно [5] имеет вид:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{\tau}{E_{c,t} \cdot H} = 0 \quad (1.6)$$

Конечное решение дифференциального уравнения, описывающего деформации и напряжения в плите, имеет вид:

$$u = -\frac{1}{\beta} \cdot \left(\frac{\sigma_{c0}}{E_{c,t}} + \varepsilon_{c,t} \right) \cdot \frac{\sinh\left(\frac{L}{2} - x\right)}{\cosh \beta \left(\frac{L}{2}\right)} \quad (1.7)$$

$$\sigma_c = -E_{c,t} \cdot \varepsilon_{c,t} \cdot \left[1 - \frac{\cosh \beta \left(\frac{L}{2} - x\right)}{\cosh \beta \left(\frac{L}{2}\right)} \right] + \sigma_{c0} \cdot \frac{\cosh \beta \left(\frac{L}{2} - x\right)}{\cosh \beta \left(\frac{L}{2}\right)} \quad (1.8)$$

Расчет конструкции дорожного полотна на стадии II можно опустить по причине аналогичности решения.

В расчетные уравнения существующих деформационных моделей [5] входят так называемые характеристики сдвига бетона по основанию « $\tau_0 - \delta_0$ », аппроксимированные двухлинейной диаграммой Прандтля (рис. 2). Такое упрощение конечно же не может не сказаться на результатах расчета. Это подтолкнуло нас к поискам возможностей более точного описания диаграмм сдвига « $\tau_0 - \delta_0$ ».

Задача расчета напряженно-деформированного состояния монолитных бетонных полов, покрытий дорог, аэродромных бетонных покрытий (и, как следствие, место устройство деформационных швов) была решена на основе известного дифференциального уравнения (1.6), но построенного с учетом более точной трансформированной диаграммы сдвига бетона по основанию.

При проведении экспериментов по сдвигу бетонных образцов по бетонному «жесткому» основанию на специально разработанной нами сдвиговой установке был получен ряд диаграмм, связывающих касательные (сдвиговые) напряжения и перемещения. Кривые сдвига бетона по бетону «жесткому основанию» предложено аппроксимировать трехлинейной диаграммой сдвига (рис. 3). Использование такой формы диаграммы сдвига, при моделировании напряженно-деформированного состояния в конструкциях плит покрытий позволит более точно описать поведение плит, устроенных на бетонном основании, и подверженных вынужденным деформациям усадки или расширения.

Для записи расчетных уравнений модели учитывающей трехлинейную аппроксимацию кривых сдвига, необходимо рассмотреть некоторый выделенный участок конструкции (рис. 4).

Допущения, принятые в модели при расчете деформаций:

1. Бетон ведет себя, как абсолютно упругий материал, ползучесть бетона не рассматривается.
2. Усадочные деформации имеют постоянный закон распределения по всей длине плиты.
3. Вертикальные деформации (выгибы) не рассматриваются.
4. Деформации имеют постоянный закон распределения по высоте сечения конструкции.

Так как зависимость « $\tau_i - \delta_i$ » получена с учетом влияния собственного веса конструкции, то будем считать, что в данной постановке задачи проекции сил на ось «у» не рассматриваются.

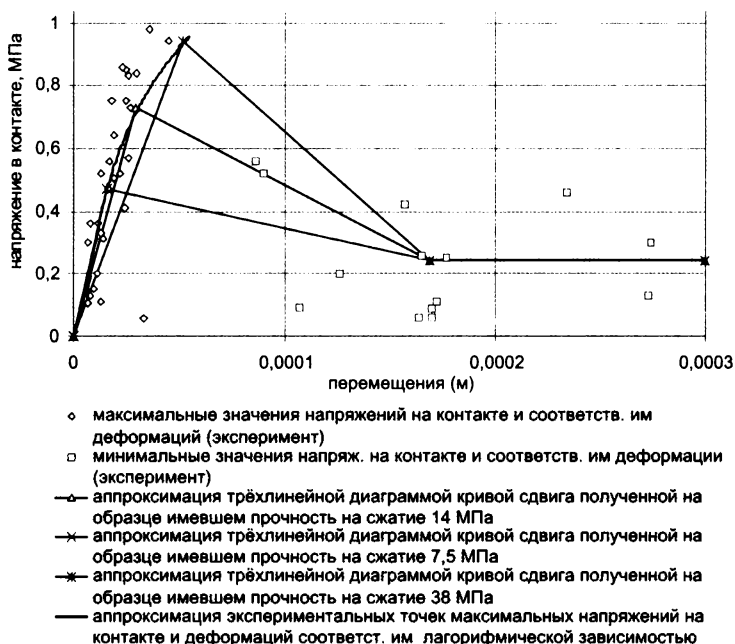


Рис. 3. Группа кривых сдвига при прочностях бетона на сжатие (кубиковых), от 0,9 МПа до 38 МПа

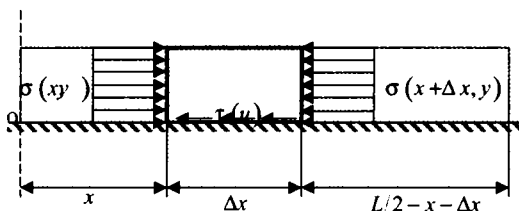


Рис. 4. Проекция сил на участок плиты длиной Δx

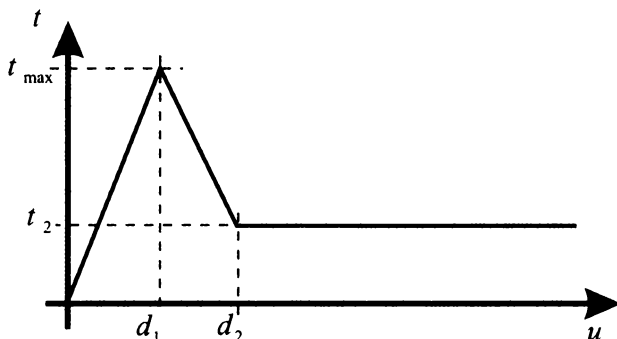


Рис. 5. Трансформированная диаграмма кривой сдвига, зависимость сдвига от касательных напряжений

Касательные напряжения, действующие на поверхности плиты выражаются, как:

$$\tau(u) = \frac{\tau_{\max}}{\delta_1} \cdot |u| \text{ для } 0 \leq |u| \leq \delta_1 \quad (1.9)$$

$$\tau(u) = k \cdot u + b \text{ для } \delta_1 \leq |u| \leq \delta_2 \quad (1.10)$$

где: $k = \frac{\tau_2 - \tau_{\max}}{\delta_2 - \delta_1}$; $b = \tau_{\max} - \frac{\delta_1}{\delta_2 - \delta_1}$;

$$\tau(u) = \tau_2 \text{ для } |u| \geq \delta_2 \quad (1.11)$$

где: u – перемещение плиты относительно основания в любой взятой координате x .

где: $\tau_{\max}$ – максимальные касательные напряжения на контакте;

δ_1 – перемещение соответствующее касательному напряжению

$\tau_{\max}$;

τ_2 – минимальные напряжения на контакте;

δ_2 – перемещение, соответствующее минимальному уровню касательных напряжений τ_2 .

Заменим действия внешних сил (на поверхности) соответствующей результирующей силой:

$$T = \tau(u) \cdot b \cdot \Delta x \quad (1.12)$$

Следуя принятыми предположениями силу $F(x)$ можем записать, как силу, приложенную в центре сечения плиты, таким образом:

$$F(x) = \sigma_c(x) \cdot b \cdot h \quad (1.13)$$

где: b – ширина плиты

h – высота плиты;

В соответствии с принципом Даламбера суммы проекций всех сил на горизонтальную ось равны нулю. Найдем эти проекции:

$$F(x + \Delta x) - F(x) - T = 0 \quad (1.14)$$

что равносильно:

$$F(x + \Delta x) - F(x) - \tau(u) \cdot \Delta x \cdot b = 0 \quad (1.15)$$

или:

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x = \tau(u) \cdot \Delta x \cdot b \quad (1.16)$$

Сократив на Δx , получаем:

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \tau(u) \cdot b \quad (1.17)$$

Перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем следующее дифференциальное равенство (в бесконечном приближении $\Delta x \equiv dx$):

$$\frac{dF(x)}{dx} = \tau(u) \cdot b \quad (1.18)$$

Подставив в формулу (1.18) выражения для силы $F(x)$ получим:

$$\frac{\sigma_c(x) \cdot b \cdot h}{dx} = \tau(u) \cdot b \quad (1.19)$$

или:

$$\sigma_c(x) = \frac{\tau(u) \cdot dx}{h} \quad (1.20)$$

Это уравнение (1.20) можно представить и в другом виде:

$$\frac{\sigma_c(x)}{dx} = \frac{\tau(u)}{h} \quad (1.21)$$

С учетом того, что $\sigma_c(x) = (\varepsilon_{sh} - \varepsilon_{sh,lim}) \cdot E_c$, а $\varepsilon_{sh,lim} = \frac{du}{dx}$, перепишем:

$$\frac{\sigma_c(x)}{dx} = E_c \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \quad (1.22)$$

где: $\varepsilon_{sh,lim}$ – деформация связной усадки (усадка, ограниченная со стороны основания).

Итак, общее дифференциальное уравнение, описывающее деформацию плиты, с учетом формул (1.21), (1.22) запишется как:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{\tau(u)}{E_c \cdot h} = 0 \quad (1.23)$$

Так как функция $\tau(u)$ имеет вид, указанный на рис. 5, то для $u \leq \delta_1$ запишем:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{\tau_{\max}}{\delta_1 \cdot E_c \cdot h} \cdot u(x) = 0 \quad (1.24)$$

для $\delta_1 \leq |u| \leq \delta_2$:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{k \cdot u(x) + b}{E_c \cdot h} = 0 \quad (1.25)$$

и для $|u| \geq \delta_2$ запишем:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{\tau_2}{E_c \cdot h} = 0 \quad (1.26)$$

Конечным решением уравнений (1.24, 1.25, 1.26) будет являться система:

$$\begin{cases} u(x) = C_1^1 \cdot \exp(\sqrt{\alpha} \cdot x) + C_2^1 \cdot \exp(-\sqrt{\alpha} \cdot x), & \text{if } 0 \leq x \leq x_1 \\ u(x) = C_1^2 \cdot \exp(\sqrt{\beta} \cdot x) + C_2^2 \cdot \exp(-\sqrt{\beta} \cdot x) - \frac{b}{k}, & \text{if } x_1 \leq x \leq x_2 \\ u(x) = \frac{\tau_2}{E_c \cdot h} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1^3 \cdot x + C_2^3 & \text{if } x_2 \leq x \leq L/2 \end{cases} \quad (1.27)$$

где: $\alpha = \frac{\tau_{\max}}{\delta_1 \cdot E_c \cdot h}$; $\beta = \frac{k}{E_c \cdot h}$



Рис. 6. Общий вид монолитных полос-плит П-п-X, П-п-XI, П-п-XII
(слева – направо)

Таким образом, для различных значений ε_{sh} и « $\tau_i - \delta_i$ » система (1.27) описывает закон изменения функции $u(x)$ при трехлинейной аппроксимации диаграммы сдвига.

В качестве примера приведем расчет собственных деформации бетонных полос-плит, выполненных в рамках программы по исследованию напряженно-деформированного состояния конструкций плит подверженных вынужденным деформациям усадки (рис. 6).

Полоса-плита П-п-X, была выполнена непосредственно на бетонном основании, ее геометрические размеры – $4000 \times 250 \times 60$ мм.

Полоса-плита П-п-XI, имела те же размеры, но между бетонным основанием и плитой располагался скользящий слой (полиэтиленовая пленка).

Размеры полосы-плиты П-п-XII, составляли $2000 \times 188 \times 40$ мм. Она как и полоса-плита П-п-XI, устраивалась на скользящем слое.

Таблица 2

Расход материалов на 1 м^3 бетонной смеси на ПЦ
(в сухом состоянии)

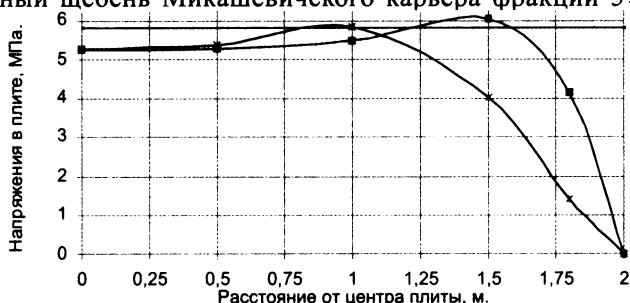
№ эксперимента	Расход			
	ПЦ	Щебень	Песок	Вода
Образцы серии. №4	450	1150	700	207

По центру ее поперечного сечения устанавливался арматурный стержень $\varnothing 12$ мм класса А-III (S400). Армирование полосы-плиты составляло – 1,5%.

Образец П-п-ХП, выполнялся на скользящем слое, как контрольный, для проверки полученных свободных деформаций усадки.

В качестве основания использовалась железобетонная многопустотная плита размерами $6,0 \times 1,2 \times 0,2$ м. В лабораторном эксперименте для бетона использовали портландцемент марки 500 Д0.

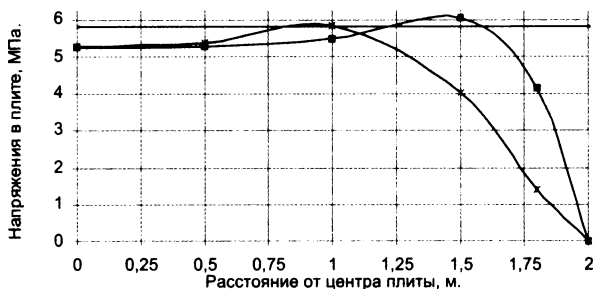
В качестве заполнителей для бетона в образцах, использовали песок Заславльского карьера с модулем крупности $M_k = 2,2 \div 2,4$, гранитный щебень Микашевичского карьера фракции $5 \div 20$ мм.



где:

- модель-двухлинейная аппроксимация (основание бетонное)
- модель-трёхлинейная аппроксимация (основание бетонное)
- предельно допустимый уровень напряжения

Рис. 7. Экспериментальные и теоретические значения усадочных деформации полосы-плиты П-п-Х (на 28 суток от начала затворения)



где:

- модель-двухлинейная аппроксимация (основание бетонное)
- модель-трёхлинейная аппроксимация (основание бетонное)
- предельно допустимый уровень

Рис. 8. Распределение напряжений по длине плиты (расчет произведен с учетом трёхлинейной и двухлинейной аппроксимации кривых сдвига)

Щебень перед использованием промывали в проточной воде. Водоцементное отношение было назначено равным, $B/C = 0,46$;

Состав бетонной смеси на 1 м^3 в сухом состоянии представлен в табл. 2.

Измерения деформаций полос производились индикаторами часового типа с ценой деления $0,001 \text{ м}$ на протяжении 28 суток. По исследованиям сдвига бетонного штампа по бетонному основанию и основанию со скользящим слоем (полиэтиленовая пленка) и установленным зависимостям, « $\tau_i - \delta_i$ » рис. 4, значениям свободной усадки ε_{sh} полученным на образцах призмах, размерами $7 \times 7 \times 20 \text{ см}$, выполненных из того же бетона и хранившихся в тех же условиях, что и полосы. По значениям модулей упругости, полученных нами на бетонных призмах размерами $10 \times 10 \times 40 \text{ см}$, были смоделированы собственные деформации и самонапряжение бетонных полос, рис. 7, рис. 8. Программа расчета была выполнена в прикладном пакете «Mathcad».

Выводы

1. Отклонение экспериментальных значений и теоретических значений деформаций (края полосы) полученных при моделировании по двухлинейной аппроксимации кривой сдвига (рис. 2) составляет 40%. Можно считать вполне приемлемым использование в модели такой аппроксимации диаграмм сдвига в случае сыпучих оснований (песок, гравий, щебень) или скользящего слоя (основание с полиэтиленовым покрытием). Здесь погрешность расчета конструкции будет весьма незначительной, так как в подоб-

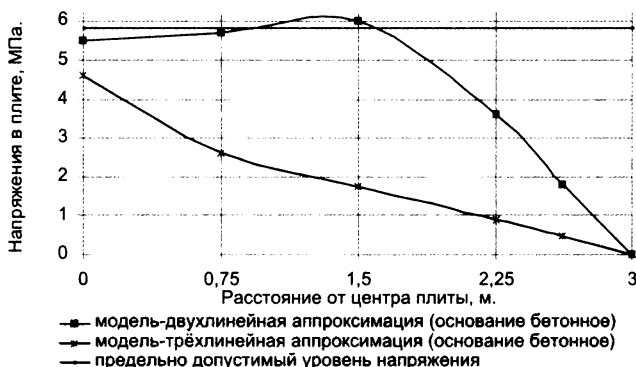


Рис. 9. Распределение напряжений в имитируемой плите высотой 200 мм, длиной 6 м

ных случаях не происходит выраженного падения напряжений при достижении максимального уровня напряжений на контакте. При использовании же в качестве основания бетона или как в работе [5] – цементного основания, щебня стабилизированного, двухлинейная аппроксимация кривой вносит определенную погрешность. Например, уже при трёхлинейной аппроксимации кривой сдвига расхождение значений между экспериментом и моделью составляет 4,7%.

2. Как видно из рис. 8, напряжения в экспериментальной плите приближаются к критическим уже на трети расстояния от края. Благодаря полученным данным при проектировании реальных конструкций, видно, что необходимо заложить большую толщину плиты или уменьшить длину неразрезной части. Например, если заложить толщину плиты равную 0,2 м, как рекомендует СНиП [1] при устройстве бетонного покрытия на бетонном основании, при этом увеличить длину неразрезной части до 6 м, тогда распределение напряжений в плите на 28 суток (изготовленной из того же бетона, что и полоса-плита П-п-Х), будет выглядеть, как показано на рис. 9.

Нижний график – распределение напряжений по длине плиты при трехлинейной аппроксимации диаграмм сдвига, верхний – при двухлинейной аппроксимации. Видно, что при расчете по двухлинейной аппроксимации сдвига напряжения приближаются к предельным уже на четверти плиты, в то время как при трехлинейной нигде не достигают предельного уровня.

Таким образом, при расчете по трехлинейной диаграмме можно значительно экономить материал и точнее прогнозировать место устройства деформационного шва.

3. Построенная математическая модель достаточно адекватно описывает процессы деформирования конструкций при усадке, требуются лишь некоторые доработки в области уточнения принимаемых в модели физико-механических характеристик материалов.

Список цитированных источников

1. СНиП 2.03.13-88. Полы. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1988. – 16 с.
2. Улицкий И.И. Теория и расчет железобетонных стержневых конструкций с учетом длительных процессов. – Киев: «Будівельник», 1967. – 346 с.
3. Улицкий И.И., Чжан Чжун-яо, Голышев А.Б. Расчет железобетонных конструкций с учетом длительных процессов. – Киев: Госстройиздат УССР, 1960. – 495 с.
4. Dan Pettersson. (1998). Stresses in concrete structures from ground

restraint, Licentiate thesis, Part I – 58c. Part II – 59–113 s.

5. Jun Zhang, Victor C.Li. Influence of supporting base characteristics on shrinkage-induced stresses in concrete pavements: *Journal of Transportation Engineering*, vol. 127, №6, 2001.

6. Stott J.P. (1961). «Test on materials for use in sliding layers under concrete road slabs». *Civ. Ingrg.*, 56(663), 1297–1299, 1301; (669), 1466–1468; (655), 1603–1605.

7. Wesevich J.W., Mc Cullough B.F., and Burns N.H. (1987). «Stabilized subbase friction study for concrete pavements». Res. Rep. 495-1, Ctr. for Transp. Res., University of Texas at Austin, Austin, Tex.

8. Wimsatt A.W., Mc Cullough B.F., and Burns N.H. (1987). «Methods of analyzing and friction influencing frictional effects of study for subbase». Res. Rep. 495-2F, Ctr. for Transp. Res., University of Texas at Austin, Austin, Tex.

9. Rozycki D.K., and Rasmussen R.O. (1998). «Assessment of slab-base interaction in PCC airfield pavements». *Airport Fac.: Innovations for The Next Century, Proc.*, 25th Int. Air Transp. Conf., M.T. McNeerney, ed., ASCE, New York, 403–422.